

TỔNG HỢP BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ

I. CÁC BẤT ĐẲNG THỨC THƯỜNG ĐƯỢC SỬ DỤNG

① Bất đẳng thức Cauchy (AM – GM)

- $\forall a, b \geq 0$, thì: $a + b \geq 2\sqrt{a.b}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $a = b$.
- $\forall a, b, c \geq 0$, thì: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{a.b.c}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c$.

Nhiều trường hợp đánh giá dạng: $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow a.b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ và $a.b.c \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$.

② Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz (Bunhiacôpki)

- $\forall a, b, x, y \in \mathbb{R}$, thì: $(a.x + b.y)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.
- $\forall a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$, thì: $(a.x + b.y + c.z)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

Nhiều trường hợp đánh giá dạng: $|a.x + b.y| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$.

Hệ quả. Nếu a, b, c là các số thực và x, y, z là các số dương thì:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad \text{và} \quad \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} : \text{bất đẳng thức cộng mẫu số.}$$

③ Bất đẳng thức vectơ

Xét các vectơ: $\vec{u} = (a; b)$, $\vec{v} = (x; y)$. Ta luôn có: $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{(a+x)^2 + (b+y)^2}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \vec{u} \text{ và } \vec{v} \text{ cùng hướng.}$$

④ Một số biến đổi hằng đẳng thức thường gặp

- $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$.
- $x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)^3 - 3(x+y)(y+z)(z+x)$.
- $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + (x+y+z)[x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx)]$.
- $(a-b)(b-c)(c-a) = ab^2 + bc^2 + ca^2 - (a^2b + b^2c + c^2a)$.
- $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab + bc + ca) - abc$.
- $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = \frac{2(a^3 + b^3 + c^3) - 6abc}{a+b+c}$.
- $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a)$.
- $\alpha.(a^2 + b^2) + \beta.ab = \frac{2\alpha + \beta}{4}(a+b)^2 + \frac{2\alpha - \beta}{2}(a-b)^2$ và $ab = \frac{(a-b)^2 - (a^2 + b^2)}{2}$.

⑤ Một số đánh giá cơ bản và bất đẳng thức phụ

Các đánh giá cơ bản thường được sử dụng (không cần chứng minh lại)

a. $\forall x; y; z \geq 0 \xrightarrow{\text{suy ra}} x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

- b. $\forall x; y; z \geq 0 \xrightarrow{\text{suy ra}} (x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz.$
 c. $\forall x; y; z \in \mathbb{R} \xrightarrow{\text{suy ra}} 3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x+y+z)^2.$
 d. $\forall x; y; z > 0 \xrightarrow{\text{suy ra}} (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2) \geq 3(x^2y + y^2z + z^2x).$
 e. $\forall x; y; z \geq 0 \xrightarrow{\text{suy ra}} (x+y+z)^2 \geq 3(xy + yz + zx).$
 f. $\forall x; y; z \geq 0 \xrightarrow{\text{suy ra}} x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x+y+z).$
 g. $\forall x; y; z \geq 0 \xrightarrow{\text{suy ra}} (xy + yz + zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z).$
 h. $\forall x; y; z \in \mathbb{R} \xrightarrow{\text{suy ra}} 3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \geq (xy + yz + zx)^2.$
 i. $\forall x; y; z \in \mathbb{R} \xrightarrow{\text{suy ra}} (x+y+z)(xy + yz + zx) \leq \frac{9}{8}(x+y)(y+z)(z+x).$

Các bất đẳng thức phụ thường được sử dụng (chứng minh lại khi áp dụng)

- j. $\forall x; y \geq 0 \xrightarrow{\text{suy ra}} x^3 + y^3 \geq \frac{1}{4}(x+y)^3.$
 k. $\forall xy \geq 1 \xrightarrow{\text{suy ra}} \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$ và $\forall xy \leq 1 \xrightarrow{\text{suy ra}} \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{2}{1+xy}.$
 Suy ra: $\forall xy \geq 1 \xrightarrow{\text{suy ra}} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \geq \frac{2}{1+\sqrt{xy}}$ và $\forall xy \leq 1 \xrightarrow{\text{suy ra}} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \leq \frac{2}{1+\sqrt{xy}}.$
 l. $\forall x; y \geq 1 \xrightarrow{\text{suy ra}} \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}.$
 m. $\forall x; y \in [0;1] \xrightarrow{\text{suy ra}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$
 n. $\forall \begin{cases} x, y \geq 0 \\ x+y > 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{suy ra}} \left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right) \geq \left(\frac{2}{x+y}-1\right)^2.$

Chứng minh các đánh giá cơ bản

a. Chứng minh: $\forall x; y; z \geq 0 \xrightarrow{\text{suy ra}} x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$

Áp dụng BĐT Cauchy: $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2y^2} = 2xy \\ y^2 + z^2 \geq 2\sqrt{y^2z^2} = 2yz \\ z^2 + x^2 \geq 2\sqrt{z^2x^2} = 2zx \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx. \text{ Dấu "=" khi } x = y = z.$

b. Chứng minh: $\forall x; y; z \geq 0 \xrightarrow{\text{suy ra}} (x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz.$

Áp dụng BĐT Cauchy $\begin{cases} x+y \geq 2\sqrt{xy} \\ y+z \geq 2\sqrt{yz} \\ z+x \geq 2\sqrt{zx} \end{cases} \Rightarrow (x+y)(y+z)(z+x) \geq \sqrt{x^2y^2z^2} = 8xyz. \text{ Dấu "=" khi } x = y = z.$

c. Chứng minh: $\forall x; y; z \in \mathbb{R} \xrightarrow{\text{suy ra}} 3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x+y+z)^2.$

Áp dụng BĐT Cauchy – Schwarz dạng cộng mẫu số ta được:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{1} \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{3} \Rightarrow 3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x+y+z)^2. \text{ Dấu "=" khi } x = y = z.$$

d. Chứng minh: $\forall x; y; z > 0 \xrightarrow{\text{suy ra}} (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2) \geq 3(x^2y + y^2z + z^2x).$

Ta có: $(x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2) = (x^3 + xy^2) + (y^3 + yz^2) + (z^3 + zx^2) + x^2y + y^2z + z^2x$

Áp dụng BĐT Cauchy cho từng dấu (...) ta được:

$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) \geq 2x^2y+2y^2z+z^2x+x^2y+y^2z+z^2x = 3(x^2y+y^2z+z^2x)$. Dấu "=" khi $x=y=z$.

e. Chứng minh: $\forall x; y; z \geq 0 \xrightarrow{\text{suy ra}} (x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$.

Ta có: $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \geq 3(xy+yz+zx)$. Dấu "=" khi $x=y=z$.

f. Chứng minh: $\forall x; y; z \geq 0 \xrightarrow{\text{suy ra}} x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geq xyz(x+y+z)$.

Đặt: $a=xy; b=yz; c=zx$ thì bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$: luôn đúng theo bất đẳng thức Cauchy (BĐT a.)

Dấu đẳng thức khi $x=y=z$ hoặc $y=z=0$ hoặc $x=y=0$ hoặc $z=x=0$.

g. Chứng minh: $\forall x; y; z \geq 0 \xrightarrow{\text{suy ra}} (xy+yz+zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z)$.

Đặt: $a=xy; b=yz; c=zx$ thì bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$: luôn đúng theo BĐT e.

Dấu đẳng thức khi $x=y=z$ hoặc $y=z=0$ hoặc $x=y=0$ hoặc $z=x=0$.

h. Chứng minh: $\forall x; y; z \in \mathbb{R} \xrightarrow{\text{suy ra}} 3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) \geq (xy+yz+zx)^2$.

Ta có: $3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) = 3 \cdot \left[\frac{(xy)^2}{1} + \frac{(yz)^2}{1} + \frac{(zx)^2}{1} \right] \xrightarrow{\text{Cauchy-Schwarz}} \geq (xy+yz+zx)^2$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$.

i. Chứng minh: $\forall x; y; z \in \mathbb{R} \xrightarrow{\text{suy ra}} (x+y+z)(xy+yz+zx) \leq \frac{9}{8}(x+y)(y+z)(z+x)$.

Ta có: $(x+y)(y+z)(z+x) \xrightarrow{\text{Cauchy}} \geq 2\sqrt{xy} \cdot \sqrt{yz} \cdot \sqrt{zx} = 8xyz$.

Mặt khác: $(x+y+z)(xy+yz+zx) = xyz + (x+y)(y+z)(z+x)$. Suy ra:

$(x+y+z)(xy+yz+zx) \leq \left(\frac{1}{8} + 1 \right) (x+y)(y+z)(z+x) = \frac{9}{8}(x+y)(y+z)(z+x)$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $x=y=z$.

Chứng minh các bất đẳng thức phụ

j. Chứng minh: $\forall x; y \geq 0 \xrightarrow{\text{suy ra}} x^3+y^3 \geq \frac{1}{4}(x+y)^3$.

Ta có: $x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3x \cdot y(x+y) \xrightarrow{\text{Cauchy}} \geq (x+y)^3 - 3 \cdot \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 \cdot (x+y) = \frac{(x+y)^3}{4}$. Dấu "=" khi $x=y$.

k. Chứng minh: $\forall xy \geq 1 \xrightarrow{\text{suy ra}} \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$ và $\forall xy \leq 1 \xrightarrow{\text{suy ra}} \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{2}{1+xy}$.

Chứng minh: $\forall xy \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$ (1)

Bất đẳng thức (1) tương đương với: $\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+xy} \right) + \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+xy} \right) \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{xy-x^2}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{xy-y^2}{(1+y^2)(1+xy)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)} \geq 0$

$\Leftrightarrow (y-x) \cdot \frac{x(1+y^2)-y(1+x^2)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} \geq 0 \Leftrightarrow (y-x) \cdot \frac{(x-y)+xy(y-x)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{(y-x)^2(xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} \geq 0$: đúng $\forall xy \geq 1$. Dấu "=" khi $x=y$ hoặc $xy=1$.

Chứng minh: $\forall xy \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{2}{1+xy}$ (2)

Ta làm tương tự và dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$ hoặc $xy = 1$.

Suy ra: $\forall xy \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \geq \frac{2}{1+\sqrt{xy}}$ và $\forall xy \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \leq \frac{2}{1+\sqrt{xy}}$.

Mở rộng: $\forall x; y; z \geq 1$ thì $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \geq \frac{3}{1+xyz}$ (3)

Chứng minh: Ghép từng cặp xoay vòng, cộng lại. Dấu "=" khi và chỉ khi: $x = y = z = 1$.

l. Chứng minh: $\forall x; y \geq 1 \xrightarrow{\text{suy ra}} \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}$.

Ta có: $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} \right)^2 + \frac{2}{(1+x)(1+y)} - \frac{1}{1+xy} \geq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{(y-x)^2}{(1+x)^2(1+y)^2} + \frac{1+xy-x-y}{(1+x)(1+y)(1+xy)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(y-x)^2}{(1+x)^2(1+y)^2} + \frac{(x-1)(y-1)}{(1+x)(1+y)(1+xy)} \geq 0$: đúng $\forall x, y \geq 1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

m. Chứng minh: $\forall x; y \in [0;1] \xrightarrow{\text{suy ra}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}$.

Ta có: $1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2}}$ (1)

Mặt khác $\forall x, y \in (0;1)$, thì $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{2}{1+xy}$ (2)

Thật vậy: (2) $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+xy} \right) + \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+xy} \right) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{xy-x^2}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{xy-y^2}{(1+y^2)(1+xy)} \leq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(y-x)^2(xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} \leq 0$: đúng $\forall xy \leq 1$.

Từ (1), (2), suy ra: $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}, \forall x; y \in [0;1]$. Dấu đẳng thức xảy ra khi: $x = y$.

n. Chứng minh: $\forall \begin{cases} x, y \geq 0 \\ x+y > 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{suy ra}} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \left(\frac{1}{y} - 1 \right) \geq \left(\frac{2}{x+y} - 1 \right)^2$.

Ta có: BĐT $\Leftrightarrow \frac{1}{xy} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \geq \frac{4}{(x+y)^2} - \frac{4}{x+y} \Leftrightarrow \frac{1}{xy} - \frac{4}{(x+y)^2} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{4}{x+y} \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{xy(x+y)^2} \geq \frac{(x-y)^2}{xy(x+y)}$
 $\Leftrightarrow (x-y)^2(1-x-y) \geq 0$: đúng với mọi $x+y < 1$ và dấu "=" khi và chỉ khi: $x = y$.

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ

TRONG CÁC ĐỀ THI THỬ NĂM 2016

Câu 1: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a, b, c \in [1; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$P = \frac{2(ab+bc+ca)}{2(2a+b+c)+abc} + \frac{8}{2a(b+c)+bc+4} - \frac{b+c+4}{\sqrt{bc}+1}$$

Trường THPT Anh Sơn 2 – Lần 2

Lời giải tham khảo

Vì $a, b, c \in [1; 2]$ nên ta có $(a-1)(b-2)(c-2) \geq 0$

$$\Leftrightarrow abc + 2(2a+b+c) \geq 2(b+c)a + bc + 4$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = 1$ hoặc $b = 2$ hoặc $c = 2$

Do đó và do $a \geq 1$ nên ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{2(ab+bc+ca)}{2(2a+b+c)+abc} + \frac{8}{2a(b+c)+bc+4} - \frac{b+c+4}{\sqrt{bc}+1} \\ &\leq \frac{2(ab+bc+ca)}{2a(b+c)+bc+4} + \frac{8}{2a(b+c)+bc+4} - \frac{b+c+4}{\sqrt{bc}+1} = \frac{2a(b+c)+bc+4+bc+4}{2a(b+c)+bc+4} - \frac{b+c+4}{\sqrt{bc}+1} \\ &= 1 + \frac{bc+4}{2a(b+c)+bc+4} - \frac{b+c+4}{\sqrt{bc}+1} \leq 1 + \frac{bc+4}{2(b+c)+bc+4} - \frac{b+c+4}{\sqrt{bc}+1} \leq 1 + \frac{bc+4}{bc+4\sqrt{bc}+4} - \frac{2\sqrt{bc}+4}{\sqrt{bc}+1} \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{bc} \in [1; 2]$. Xét hàm số $f(t) = 1 + \frac{t^2+4}{(t+2)^2} - \frac{2t+4}{t+1}$ trên $[1; 2]$

$$f'(t) = \frac{4t-8}{(t+2)^2} + \frac{2}{(t+1)^2} \geq -\frac{4}{27} + \frac{2}{9} > 0$$

nên $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $[1; 2]$ Suy ra $P \leq f(t) \leq f(2) = -\frac{7}{6}$

Vậy, giá trị lớn nhất của $P = -\frac{7}{6}$ khi $a = 1, b = c = 2$.

Câu 2: Cho các số thực a, b, c không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{9}{2}.$$

Trường THPT Bắc Yên Thành – Lần 1

Lời giải tham khảo

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{ab}{1-ab} + \frac{bc}{1-bc} + \frac{ca}{1-ca} \leq \frac{3}{2}$$

Ta có $\frac{ab}{1-ab} = \frac{2ab}{2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab} \leq \frac{2ab}{a^2 + b^2 + 2c^2}$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki $\frac{a^2}{a^2 + c^2} + \frac{b^2}{b^2 + c^2} \geq \frac{(a+b)^2}{a^2 + b^2 + 2c^2} \geq \frac{4ab}{a^2 + b^2 + 2c^2}$.

Vậy $\frac{ab}{1-ab} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{a^2 + c^2} + \frac{b^2}{b^2 + c^2} \right)$.

Tương tự $\frac{bc}{1-bc} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{b^2 + a^2} + \frac{c^2}{c^2 + a^2} \right), \frac{ac}{1-ac} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{c^2 + b^2} \right)$.

Cộng lại ta có điều phải chứng minh. Dấu bằng khi $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 3: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz = 8$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = (x+y)(y+z)(z+x) + \frac{48}{\sqrt{x+y+z+3}}$

Trường THPT Số 3 – Bảo Thắng – Lào Cai– Lần 1

Lời giải tham khảo

$$(x+y)(y+z)(z+x) = (x+y+z)xy + yz + zx - 8$$

Ta có : $a - b^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow a + b + c^2 \geq 3ab + bc + ca^* . \text{ Thay}$$

$$a = xy; b = yz; c = zx \text{ vào } (*) \Rightarrow xy + yz + zx^2 \geq 3xyz x + y + z$$

$$\Rightarrow xy + yz + zx \geq 2\sqrt{6x+y+z}$$

Do đó : $P \geq 2(x+y+z)\sqrt{6(x+y+z)} + \frac{48}{\sqrt{x+y+z+3}} - 8$

Đặt : $t = x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 6 \Rightarrow P \geq 2t\sqrt{6t} + \frac{48}{\sqrt{3+t}} - 8, (t = x + y + z, t \geq 6)$

Xét hàm số $f(t) = 2t\sqrt{6t} + \frac{48}{\sqrt{3+t}} - 8, (t \geq 6) \Rightarrow f'(t) = \frac{3\sqrt{6t(t+3)^3} - 24}{\sqrt{(t+3)^3}} \Rightarrow f'(t) > 0, \forall t \geq 6$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[6; +\infty)$. Vậy $\min_{[6; +\infty)} f(t) = f(6) = 80$

Suy ra $P \geq 80$ dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 2$

Kết luận : Giá trị nhỏ nhất của P là 80 đạt được khi $x = y = z = 2$

Câu 4: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{7}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{121}{14(ab + bc + ca)}$

Trường THPT Bình Minh – Ninh Bình – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $1 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \Rightarrow ab + bc + ca = \frac{1 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2}$.

Do đó $A = \frac{7}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{121}{7(1 - (a^2 + b^2 + c^2))}$

Đặt $t = a^2 + b^2 + c^2$.

Vì $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$ nên $0 < a < 1, 0 < b < 1, 0 < c < 1$

Suy ra $t = a^2 + b^2 + c^2 < a + b + c = 1$

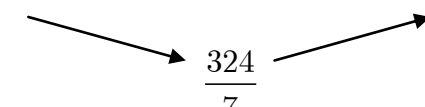
Mặt khác $1 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$

Suy ra $t = a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$. Vậy $t \in \left[\frac{1}{3}; 1\right)$

Xét hàm số $f(t) = \frac{7}{t} + \frac{121}{7(1-t)}, t \in \left[\frac{1}{3}; 1\right)$

$f'(t) = -\frac{7}{t^2} + \frac{121}{7(1-t)^2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{7}{18}$

BBT

t	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{18}$	1
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$			
	$\frac{324}{7}$		

Suy ra $f(t) \geq \frac{324}{7}, \forall t \in \left[\frac{1}{3}; 1\right]$. Vậy $A \geq \frac{324}{7}$ với mọi a, b, c thỏa điều kiện đề bài. Hơn nữa, với

$$a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{3}; c = \frac{1}{6} \text{ thì } \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = \frac{7}{18} \\ a + b + c = 1 \end{cases} \text{ và } A = \frac{324}{7} \text{ Vậy } \min A = \frac{324}{7}$$

Câu 5: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x > 2, y > 1, z > 0$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
$$P = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2(2x + y - 3)}} - \frac{1}{y(x-1)(z+1)}$$

Trường THPT Bồ Hạ – Lần 2

Lời giải tham khảo:

Đặt $a = x - 2, b = y - 1, c = z \Rightarrow a, b, c > 0$

$$P = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 1}} - \frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(c+1)^2}{2} \geq \frac{1}{4}(a+b+c+1)^2$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1$

Mặt khác $(a+1)(b+1)(c+1) \leq \frac{(a+b+c+3)^3}{27}$

Khi đó $P \leq \frac{1}{a+b+c+1} - \frac{27}{(a+b+c+3)^3}$. Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1$

Đặt $t = a+b+c+1 > 1$. Khi đó $P \leq \frac{1}{t} - \frac{27}{(t+2)^3}, t > 1$

$$f(t) = \frac{1}{t} - \frac{27}{(t+2)^3}, t > 1; f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{81}{(t+2)^4} = \frac{81t^2 - (t+2)^4}{t^2(t+2)^4}$$

Xét $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 81t^2 - (t+2)^4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 4$ (do $t > 1$) $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$

t	1	4	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	0	$\frac{1}{8}$	0

Từ BBT Ta có $\max f(x) = f(4) = \frac{1}{8}$

Vậy mà $xP = f(4) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c = 1 \\ a + b + c + 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1 \Rightarrow x = 3; y = 2; z = 1$

Câu 6: Cho $x, y, z \neq 0$ thỏa mãn $x + y + z \neq 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^3 + y^3 + 16z^3}{(x + y + z)^3}$

Trường THPT Cam Ranh – Khánh Hoà – Lần 1

Lời giải tham khảo

Trước hết ta chứng minh được: $x^3 + y^3 \geq \frac{(x + y)^3}{4}$

Đặt $x + y + z = a$. Khi đó $4P \geq \frac{(x + y)^3 + 64z^3}{a^3} = \frac{(a - z)^3 + 64z^3}{a^3} = (1 - t)^3 + 64t^3$ (với $t = \frac{z}{a}; 0 < t < 1$)

Xét hàm số $f(t) = (1 - t)^3 + 64t^3$ với $t \in [0; 1]$.

Có: $f'(t) = 3[64t^2 - (1 - t)^2]$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{9} \in [0; 1]$. Lập bảng biến thiên

$\Rightarrow \min_{[0; 1]} f(t) = \frac{64}{81} \Rightarrow$ GTNN của P là $\frac{16}{81}$ đạt được khi $x = y = 4z > 0$

Câu 7: Cho x, y, z là các số thực dương lớn hơn 1 và thỏa mãn điều kiện: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 2$

. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = (x - 1)(y - 1)(z - 1)$

Trường THPT Cam Ranh – Khánh Hoà – Lần 2

Lời giải tham khảo

Ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 2$, nên: $\frac{1}{x} \geq (1 - \frac{1}{y}) + (1 - \frac{1}{z}) = (\frac{y-1}{y}) + (\frac{z-1}{z}) \geq 2\sqrt{\frac{(y-1)(z-1)}{yz}}$ (1)

$\frac{1}{y} \geq (1 - \frac{1}{x}) + (1 - \frac{1}{z}) = (\frac{x-1}{x}) + (\frac{z-1}{z}) \geq 2\sqrt{\frac{(x-1)(z-1)}{xz}}$ (2)

$\frac{1}{z} \geq (1 - \frac{1}{x}) + (1 - \frac{1}{y}) = (\frac{x-1}{x}) + (\frac{y-1}{y}) \geq 2\sqrt{\frac{(x-1)(y-1)}{xy}}$ (3)

Nhân vế với vế của (1), (2), (3) ta được $(x - 1)(y - 1)(z - 1) \leq \frac{1}{8}$

Vậy $A_{\max} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{3}{2}$

Câu 8: Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^2}{(b+c)^2 + 5bc} + \frac{b^2}{(c+a)^2 + 5ca} - \frac{3}{4}(a+b)^2$

Trường THPT Cao Lãnh 2 – Đồng Tháp – Lần 1

Lời giải tham khảo

Áp dụng bất đẳng thức Côsi $\frac{a^2}{(b+c)^2 + 5bc} \geq \frac{a^2}{(b+c)^2 + \frac{5}{4}(b+c)^2} = \frac{4a^2}{9(b+c)^2}$

Tương tự: $\frac{b^2}{(c+a)^2 + 5ca} \geq \frac{4b^2}{9(c+a)^2}$

$$\frac{a^2}{(b+c)^2 + 5bc} + \frac{b^2}{(c+a)^2 + 5ca} \geq \frac{4}{9} \left(\frac{a^2}{(b+c)^2} + \frac{b^2}{(c+a)^2} \right) \geq \frac{2}{9} \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} \right)^2$$

$$= \frac{2}{9} \left(\frac{a^2 + b^2 + c(a+b)}{ab + c(a+b) + c^2} \right)^2 \geq \frac{2}{9} \left(\frac{\frac{(a+b)^2}{2} + c(a+b)}{\frac{(a+b)^2}{4} + c(a+b) + c^2} \right)^2 = \frac{2}{9} \left(\frac{2(a+b)^2 + 4c(a+b)}{(a+b)^2 + 4c(a+b) + 4c^2} \right)^2$$

Vì $a + b + c = 1 \Leftrightarrow a + b = 1 - c$ nên ta có

$$P \geq \frac{2}{9} \left(\frac{2(1-c)^2 + 4c(1-c)}{(1-c)^2 + 4c(1-c) + 4c^2} \right)^2 - \frac{3}{4}(1-c)^2 = \frac{8}{9} \left(1 - \frac{2}{c+1} \right)^2 - \frac{3}{4}(1-c)^2 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(c) = \frac{8}{9} \left(1 - \frac{2}{c+1} \right)^2 - \frac{3}{4}(1-c)^2, c \in (0; 1)$

$$f'(c) = \frac{16}{9} \left(1 - \frac{2}{c+1} \right) \frac{2}{(c+1)^2} - \frac{3}{2}(c-1); f'(c) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{3}$$

Bảng biến thiên

c	0	$\frac{1}{3}$	1
$f'(c)$	-	0	+
$f(c)$			

Dựa vào BBT ta có $f(c) \geq -\frac{1}{9}, \forall c \in (0; 1) \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $P \geq -\frac{1}{9}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{1}{9}$

Câu 9: Với x, y, z là các số thực đôi một phân biệt. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = \left(\frac{2x-y}{x-y} \right)^2 + \left(\frac{2y-z}{y-z} \right)^2 + \left(\frac{2z-x}{z-x} \right)^2.$$

Trường THPT Chuyên KHTN – Lần 2

Lời giải tham khảo

Đặt $a = \frac{x}{x-y}; b = \frac{y}{y-z}; c = \frac{z}{z-x}$. Suy ra $a - 1 = \frac{y}{x-y}; b - 1 = \frac{z}{y-z}; c - 1 = \frac{x}{z-x}$.

$$\Rightarrow abc = (a-1)(b-1)(c-1) \Leftrightarrow a+b+c = (ab+bc+ca) + 1.$$

$$\text{Ta có: } M = (a+1)^2 + (b+1)^2 + (c+1)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(a+b+c) + 3.$$

$$= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) + 2(a+b+c) + 3 = (a+b+c)^2 + 5 \geq 5.$$

Vậy Min $M = 5$ khi $a+b+c=0$, chẳng hạn $x=1; y=2; z=0$.

Câu 10: Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^3 + z^4 \geq x^3 + y^4 + z^5$, chứng minh rằng $x^3 + y^3 + z^3 \leq 3$

Trường THPT Chuyên KHTN– Lần 1

Lời giải tham khảo

Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^3 + z^4 \geq x^3 + y^4 + z^5$, chứng minh rằng $x^3 + y^3 + z^3 \leq 3$

Giả thiết có thể viết lại là $(x^3 - x^2) + (y^4 - y^3) + (z^5 - z^4) \leq 0$. Ta sẽ chứng minh các bất đẳng thức sau

$$x^3 - 1 \leq 3(x^3 - x^2)(1)$$

$$y^3 - 1 \leq 3(y^4 - y^3)(2)$$

$$z^3 - 1 \leq 3(z^5 - z^4)(3)$$

Thật vậy, các bất đẳng thức (1), (2), (3) lần lượt tương đương với các bất đẳng thức đúng dưới đây

$$(x-1)^2(2x+1) \geq 0, (y-1)^2(3y^2+2y+1) \geq 0, (z-1)^2(3z^3+2z+1) \geq 0.$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức (1), (2), (3) và sử dụng giả thiết được viết lại, ta có ngay điều phải chứng minh.

thức :

Câu 11: Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $a^2 + ab + b^2 = c^2$ và $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{(a+c)^2}{2a^2 + 2ac + c^2} + \frac{(b+c)^2}{2b^2 + 2bc + a^2} + \frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{ab}{a^2 + 4bc + b^2}$$

Trường THPT Chuyên KHTN – Lần 3

Lời giải tham khảo

Bổ đề : Cho $x, y > 0; xy \leq 1$ khi đó : $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{2}{1+xy}$ (*)

Thật vậy (*) $\Leftrightarrow \frac{(xy-1)(x-y)^2}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} \leq 0$ (Luôn đúng)

$$\frac{(a+c)^2}{2a^2 + 2ac + c^2} + \frac{(b+c)^2}{2b^2 + 2bc + a^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{a}{a+c}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{b}{b+c}\right)^2} \leq \frac{2}{1+\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}$$

Đặt $t = \frac{(a+c)(b+c)}{ab} = \frac{ab+c(a+b+c)}{ab} = \frac{(a+b)^2}{4} \geq 4$ thì $P \leq f(t), f(t) = \frac{2t}{1+t} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t+2}$

Ta có : $f'(t) = \frac{2}{(1+t)^2} - \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+2)^2} < 0$ do $\frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t+2)^2} \geq \frac{2}{t(t+2)} > \frac{2}{(t+1)^2}$

Suy ra : $f(t) \leq f(4) = \frac{121}{60}$ Dấu bằng xảy ra khi $t = 4 \Rightarrow a = b = c$. Vậy : $P_{\max} = \frac{121}{60}$

Câu 12: Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = 3(x+y+z) + 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$

Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Khánh Hoà – Lần 1

Lời giải tham khảo

Trước hết ta có: $(x-1)^2(x-4) \leq 0, \forall x < \sqrt{3}$ (dấu “=” xảy ra tại $x = 1$)

Hay : $x^2 + 9 \leq 6x + \frac{4}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2 + 9) \leq 3x + \frac{2}{x}$ (1)

Tương tự ta cũng có $\frac{1}{2}(y^2 + 9) \leq 3y + \frac{2}{y}$ (2)

$\frac{1}{2}(z^2 + 9) \leq 3z + \frac{2}{z}$ (3)

Cộng (1),(2) và (3) về theo về cuối cùng ta có: $\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + 27) \leq P$

Vậy $\min P = 15 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

Câu 13: Cho x, y, z là các số không âm thỏa mãn $x + y + z = \frac{3}{2}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P = x^3 + y^3 + z^3 + x^2y^2z^2$.

Trường THPT Chuyên Nguyễn Huệ – Lần 1

Lời giải tham khảo

▪ Giả sử $x = \min\{x; y; z\}$ suy ra $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 &= 3xyz + (x + y + z) \left[(x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx) \right] \\ &= 3xyz + \frac{27}{8} - \frac{9(xy + yz + zx)}{2} \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} P = x^3 + y^3 + z^3 + x^2y^2z^2 &= x^2y^2z^2 + 3xyz + \frac{27}{8} - \frac{9}{2}(xy + yz + zx) \\ &= \left(xyz - \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{64} + \frac{13}{4}xyz + \frac{27}{8} - \frac{9}{2}(xy + yz + zx) \\ &\geq \frac{215}{64} - \frac{9}{2}(xy + zx) - yz\left(\frac{9}{2} - \frac{13}{4}x\right) \end{aligned}$$

$$\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \frac{9}{2} - \frac{13}{4}x \geq 0 \Rightarrow -yz\left(\frac{9}{2} - \frac{13}{4}x\right) \geq -\left(\frac{y+z}{2}\right)^2\left(\frac{9}{2} - \frac{13}{4}x\right)$$

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{215}{64} - \frac{9}{2}x\left(\frac{3}{2} - x\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - x\right)^2\left(\frac{9}{2} - \frac{13}{4}x\right)$$

$$\text{Xét } f(x) = \frac{215}{64} - \frac{9}{2}x\left(\frac{3}{2} - x\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - x\right)^2\left(\frac{9}{2} - \frac{13}{4}x\right), x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$$

$$\text{Hàm số } f(x) \text{ nghịch biến trên } \left[0; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{25}{64}$$

$$\text{Vậy GTLN của } P \text{ bằng } \frac{25}{64} \text{ đạt khi } x = y = z = \frac{1}{2}.$$

Câu 14: Cho $x, y, z > 0$ và $5(x^2 + y^2 + z^2) = 9(xy + 2yz + zx)$.

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức } P = \frac{x}{y^2 + z^2} - \frac{1}{(x + y + z)^3}.$$

Trường THPT Chuyên Nguyễn Huệ – Lần 2

Lời giải tham khảo

Đặt $y + z = t$ ($t > 0$); $y^2 + z^2 \geq \frac{t^2}{2}$; $yz \leq \frac{t^2}{4}$

$$5(x^2 + y^2 + z^2) = 9(xy + 2yz + xz) \Leftrightarrow 5x^2 + 5(y + z)^2 - 9x(y + z) = 28yz$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 5t^2 - 9xt \leq 7t^2 \Leftrightarrow (5x + t)(x - 2t) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2t$$

$$P \leq \frac{2x}{t^2} - \frac{1}{27t^3} \text{ với } t > 0$$

$$f'(t) = -\frac{4}{t^2} + \frac{1}{9t^4}$$

$$\begin{cases} f'(t) = 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{6}$$

Lập bảng biến thiên suy ra GTLN của P bằng 16 đạt được tại $x = \frac{1}{3}$; $y = z = \frac{1}{12}$

Câu 15: Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x > y$; $(x + z)(y + z) = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{(x - y)^2} + \frac{4}{(x + z)^2} + \frac{4}{(y + z)^2}$

Trường THPT Chuyên Sơn La – Lần 1

Lời giải tham khảo

$$a = x + z \Rightarrow y + z = \frac{1}{a}$$

$$x > y \Rightarrow x + z > y + z \Rightarrow a > \frac{1}{a} \Rightarrow a > 1$$

$$x - y = x + z - (y + z) = \frac{a^2 - 1}{a}$$

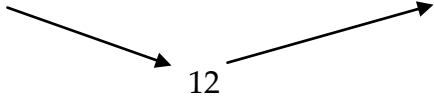
Thay vào P được:

$$P = \frac{a^2}{(a^2 - 1)^2} + \frac{4}{a^2} + 4a^2$$

$$P = \frac{a^2}{(a^2 - 1)^2} + 3a^2 + \frac{4}{a^2} + a^2 \geq \frac{a^2}{(a^2 - 1)^2} + 3a^2 + 4$$

Xét $f(t) = \frac{t}{(t - 1)^2} + 3t + 4$; $t = a^2 > 1$

$$f'(t) = \frac{-t-1}{(t-1)^3} + 3; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{3t^3 - 9t^2 + 8t - 4}{(t-1)^3} = 0 \Leftrightarrow t = 2; \quad (t > 1)$$

T	1	2	$+\infty$
f'	-	0	+
F			

$\min_{t>1} f(t) = 12$. Vậy $\min P = 12$ khi $x + z = \sqrt{2}; y + z = x - y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 16: Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\begin{cases} 2y \geq x^2 \\ y \leq -2x^2 + 3x \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x^4 + y^4 + \frac{2}{(x+y)^2}$$

Trường THPT Chuyên Vĩnh Phúc – Lần 1

Lời giải tham khảo

Từ giả thiết ta có $y \geq 0$ và $\frac{x^2}{2} \leq -2x^2 + 3x \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{6}{5}$ và $x^2 + y^2 \leq x^2 + (-2x^2 + 3x)^2 = 2x^2(2x^2 - 6x + 5)$

Xét hàm số $f(x) = 2x^2(2x^2 - 6x + 5); x \in \left[0; \frac{6}{5}\right]$ ta được $\max_{\left[0; \frac{6}{5}\right]} f(x) = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 2$

$$P = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 + \frac{2}{(x+y)^2} \geq (x^2 + y^2)^2 - \frac{(x^2 + y^2)^2}{2} + \frac{2}{x^2 + y^2}$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + y^2 \Rightarrow P \geq \frac{t^2}{2} + \frac{2}{t}, \quad 0 < t \leq 2$$

Xét hàm số:

$$g(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{2}{t}, \quad t \in (0; 2]$$

$$g'(t) = t - \frac{1}{t^2} = \frac{t^3 - 2}{t^2}; \quad g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{2}$$

Lập bảng biến thiên ta có $\min P = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$ khi $x = y = \frac{\sqrt[6]{16}}{2}$

Câu 17: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $T = \frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{c+a} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$

Trường THPT Chuyên Vĩnh Phúc – Lần 2

Lời giải tham khảo

$$T = \frac{4}{1-a} + \frac{4}{1-b} + \frac{4}{1-c} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{5a-1}{a-a^2} + \frac{5b-1}{b-b^2} + \frac{5c-1}{c-c^2}$$

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 1 $\Rightarrow a, b, c \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

Ta có $\frac{5a-1}{a-a^2} - (18a-3) = \frac{(3a-1)^2(2a-1)}{a-a^2} \leq 0, \forall a \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

Từ đó suy ra: $\frac{5a-1}{a-a^2} \leq 18a-3, \forall a \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

Ta cũng có 2 bất đẳng thức tương tự:

$$\frac{5b-1}{b-b^2} \leq 18b-3, \forall b \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \text{ và } \frac{5c-1}{c-c^2} \leq 18c-3, \forall c \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$$

Cộng các bất đẳng thức này lại với nhau ta có:

$$T = \frac{5a-1}{a-a^2} + \frac{5b-1}{b-b^2} + \frac{5c-1}{c-c^2} \leq 18(a+b+c) - 9 = 9.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3} \Rightarrow T_{\max} = 9$ đạt được $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$

Vậy Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 1, thì giá trị lớn nhất của biểu thức: $T = \frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{c+a} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$ bằng 9 và đạt được khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Chú ý: Để có được bất đẳng thức $\frac{5a-1}{a-a^2} \leq 18a-3, \forall a \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ ta đã sử dụng phương pháp tiếp tuyến

Câu 18: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $x + y = 2016$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \sqrt{5x^2 + xy + 3y^2} + \sqrt{3x^2 + xy + 5y^2} + \sqrt{x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{2x^2 + xy + y^2}$

Lời giải tham khảo

$P = A + B$. Trong đó $A = \sqrt{5x^2 + xy + 3y^2} + \sqrt{3x^2 + xy + 5y^2}$ và $B = \sqrt{x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{2x^2 + xy + y^2}$

$\Rightarrow A \geq 3(x + y) = 3 \cdot 2016 = 6048$ (*) dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1008$

$$6A = \sqrt{180x^2 + 36xy + 108y^2} + \sqrt{108x^2 + 36xy + 180y^2}$$

$$= \sqrt{(11x + 7y)^2 + 59(x - y)^2} + \sqrt{(11y + 7x)^2 + 59(y - x)^2} \geq (11x + 7y) + (11y + 7x) = 18(x + y)$$

$\Rightarrow B \geq 2(x + y) = 2 \cdot 2016 = 4032$ (**) dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1008$

$$4B = \sqrt{16x^2 + 16xy + 32y^2} + \sqrt{32x^2 + 16xy + 16y^2}$$

$$= \sqrt{(3x + 5y)^2 + 7(x - y)^2} + \sqrt{(3y + 5x)^2 + 7(y - x)^2} \geq (3x + 5y) + (3y + 5x) = 8(x + y)$$

Từ (*) và (**) ta được $P = A + B \geq 6048 + 4032 = 10080$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1008$. Vậy $P_{\min} = 10080 \Leftrightarrow x = y = 1008$

Câu 19: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\left(\frac{a + b + c}{2016}\right)^2 \leq 4abc$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{\sqrt{a}}{a + \sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{b}}{b + \sqrt{ca}} + \frac{\sqrt{c}}{c + \sqrt{ab}}$.

Trường THPT Chuyên Hạ Long – Lần 2

Lời giải tham khảo

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$P \leq \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a\sqrt{bc}}} + \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{b\sqrt{ca}}} + \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{c\sqrt{ab}}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{ab}} + \frac{1}{\sqrt[4]{bc}} + \frac{1}{\sqrt[4]{ca}} \right).$$

Với các số thực x, y, z , ta có $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0 \Leftrightarrow xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2$.

Do đó $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{ab}} + \frac{1}{\sqrt[4]{bc}} + \frac{1}{\sqrt[4]{ca}} \right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right) = \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}}{2\sqrt{abc}}$. Suy ra $P \leq \frac{a + b + c}{2\sqrt{abc}}$.

Từ giả thiết, ta có $a + b + c \leq 4032\sqrt{abc}$. Do đó $P \leq 2016$

Với $a = b = c = \frac{1}{1344^2}$, ta có $P = 2016$. Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 2016.

Câu 20: Cho hai số dương x, y phân biệt thỏa mãn: $x^2 + 2y = 12$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{4}{x^4} + \frac{4}{y^4} + \frac{5}{8(x-y)^2}$.

Trường THPT Chuyên Long An – Lần 1

Lời giải tham khảo

Từ điều kiện, dùng bất đẳng thức côsi suy ra: $0 < xy \leq 8$.

$$\text{Đánh giá } P \geq \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) + \frac{5}{64} \cdot \frac{1}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} (t > 2). \text{ Khi đó } P \geq \frac{1}{16} \cdot (t^2 - 2) + \frac{5}{64} \cdot \frac{1}{t - 2}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{1}{16} \cdot t^2 + \frac{5}{64} \cdot \frac{1}{t - 2} - \frac{1}{8} \text{ (với } t > 2)$$

Tính đạo hàm, vẽ bảng biến thiên, tìm được:

$$\min_{(2; +\infty)} f(t) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{27}{64}$$

Tìm được giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{27}{64}$ khi $x = 2$ và $y = 4$

Câu 21: Cho 3 số thực không âm a, b, c thỏa $5(a^2 + b^2 + c^2) = 6(ab + bc + ca)$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{2(a+b+c)} - (b^2 + c^2)$

Trường THPT Chuyên Nguyễn Tất Thành – Lần 1

Lời giải tham khảo

Từ điều kiện suy ra $a + b + c \leq 2(b + c)$

$$P \leq 2t - \frac{1}{2}t^4, t = \sqrt{b+c} \quad \max P = \frac{3}{2}, a=1, c=b=\frac{1}{2}$$

Câu 22: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $8(a^2 + b^2 + c^2) = 3(a + b + c)^2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a(1 - a^3) + b(1 - b^3) + c$.

Trường THPT Đa Phúc – Hà Nội – Lần 1

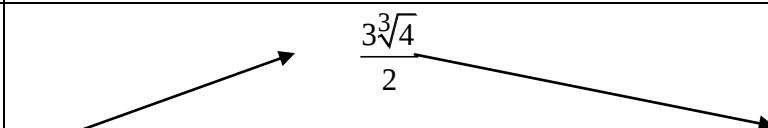
Lời giải tham khảo

$$+) \text{ Từ giả thiết ta có: } 5c^2 - 6(a+b)c + (a+b)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}(a+b) \leq c \leq a+b.$$

+) Ta có $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}(a+b)^4 \forall a, b \Rightarrow P \leq 2(a+b) - \frac{1}{8}(a+b)^4$

+) Xét $f(t) = 2t - \frac{t^4}{8}$ ($t \geq 0$), $f'(t) = 2 - \frac{t^3}{2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{4}$

+) BBT:...

T	0	$\sqrt[3]{4}$	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$			

+) $\text{Max}P = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} \\ c = \sqrt[3]{4} \end{cases}$

Câu 23: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{\sqrt{3}a}{b^2 + c^2} + \frac{\sqrt{3}b}{c^2 + a^2} + \frac{\sqrt{3}c}{a^2 + b^2}$.

Trường THPT Đa Phúc – Hà Nội – Lần 2

Lời giải tham khảo

Từ giả thiết $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 4 \\ a, b, c > 0 \end{cases} \Rightarrow a, b, c \in (0; 2)$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 4 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 4 - a^2 \dots$

Do đó $P = \frac{\sqrt{3}a}{b^2 + c^2} + \frac{\sqrt{3}b}{c^2 + a^2} + \frac{\sqrt{3}c}{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{3}a}{4 - a^2} + \frac{\sqrt{3}b}{4 - b^2} + \frac{\sqrt{3}c}{4 - c^2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4a - a^3} + \frac{\sqrt{3}b^2}{4b - b^3} + \frac{\sqrt{3}c^2}{4c - c^3}$

Vì $a, b, c > 0$.

Xét hàm số $f(x) = 4x - x^3$ với $x \in (0; 2)$. Có

$f'(x) = 4 - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pm 2\sqrt{3}}{3}$, $f(0) = 0$, $f(2) = 0$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0; 2)$ là

x	$-\infty$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$+\infty$
$f'(x)$		$- \quad 0 \quad +$	$\parallel$	$- \quad 0 \quad +$	$\parallel$	
$f(x)$	//		//		//	
	0		$\frac{16\sqrt{3}}{9}$		0	

$$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 4\frac{2\sqrt{3}}{3} - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{16\sqrt{3}}{9}$$

Từ bảng biến thiên ta có $0 < f(x) \leq \frac{16\sqrt{3}}{9}, \forall x \in (0; 2)$.

$$\text{Tức } 0 < 4x - x^3 \leq \frac{16\sqrt{3}}{9} \Rightarrow \frac{1}{4x - x^3} \geq \frac{9}{16\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}x^2}{4x - x^3} \geq \frac{9\sqrt{3}x^2}{16\sqrt{3}}, \forall x \in (0; 2).$$

Dấu “=” khi $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Áp dụng ta có

$$\frac{\sqrt{3}a^2}{4a - a^3} \geq \frac{9\sqrt{3}a^2}{16\sqrt{3}} = \frac{9a^2}{16}; \frac{\sqrt{3}b^2}{4b - b^3} \geq \frac{9\sqrt{3}b^2}{16\sqrt{3}} = \frac{9b^2}{16}; \frac{\sqrt{3}c^2}{4c - c^3} \geq \frac{9\sqrt{3}c^2}{16\sqrt{3}} = \frac{9c^2}{16}, (a, b, c \in (0; 2))$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$$P \geq \frac{9a^2}{16} + \frac{9b^2}{16} + \frac{9c^2}{16} = \frac{9}{16}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{9}{4}.$$

Và dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $\min P = \frac{9}{4}$ đạt được, khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 24: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn $2c + b = abc$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{3}{b+c-a} + \frac{4}{a+c-b} + \frac{5}{a+b-c}$

Trường THPT Phước Bình- Bình Phước – Lần 1

Lời giải tham khảo

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}, x > 0, y > 0$.

$$S = \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+c-b} + 2\left(\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+b-c}\right) + 3\left(\frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{a+b-c}\right)$$

suy ra $S \geq \frac{2}{c} + \frac{4}{b} + \frac{6}{a}$.

Từ giả thiết ta có $\frac{1}{c} + \frac{2}{b} = a$, nên $\frac{2}{c} + \frac{4}{b} + \frac{6}{a} = 2\left(\frac{1}{c} + \frac{2}{b} + \frac{3}{a}\right) = 2\left(a + \frac{3}{a}\right) \geq 4\sqrt{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của S bằng $4\sqrt{3}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \sqrt{3}$.

Câu 25: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2b^2 + c^2b^2 + 1 \leq 3b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $P = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{4b^2}{(1+2b)^2} + \frac{8}{(c+3)^2}$

Trường THPT Phước Bình- Bình Phước – Lần 2

Lời giải tham khảo

- Ta có: $P = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{4b^2}{(1+2b)^2} + \frac{8}{(c+3)^2} = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2b} + 1\right)^2} + \frac{8}{(c+3)^2}$

- Đặt $d = \frac{1}{b}$, khi đó ta có: $a^2b^2 + c^2b^2 + 1 \leq 3b$ trở thành $a^2 + c^2 + d^2 \leq 3d$

Mặt khác: $P = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{\left(\frac{d}{2} + 1\right)^2} + \frac{8}{(c+3)^2} \geq \frac{8}{\left(a + \frac{d}{2} + 2\right)^2} + \frac{8}{(c+3)^2}$

$$\geq \frac{64}{\left(a + \frac{d}{2} + c + 5\right)^2} = \frac{256}{(2a + d + 2c + 10)^2}$$

- Mà: $2a + 4d + 2c \leq a^2 + 1 + d^2 + 4 + c^2 + 1 = a^2 + d^2 + c^2 + 6 \leq 3d + 6$

Suy ra: $2a + d + 2c \leq 6$

- Do đó: $P \geq 1$ nên GTNN của P bằng 1 khi $a = 1, c = 1, b = \frac{1}{2}$

Câu 26: Cho a, b, c là các số thực dương.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{4a+2b+4\sqrt{2bc}} - \frac{4}{8+a+2b+3c} + \frac{1}{4+b+2c}$.

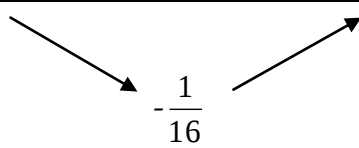
Lời giải tham khảo

Ta có $2\sqrt{2bc} \leq b+2c \Rightarrow \frac{1}{4a+2b+4\sqrt{2bc}} \geq \frac{1}{4a+4b+4c}$

và $\frac{-4}{8+a+2b+3c} \geq \frac{-1}{4+a+b+c} + \frac{-1}{4+b+2c}$

Suy ra $P \geq \frac{1}{4(a+b+c)} + \frac{-1}{4+(a+c+b)}$, Đặt $t = a+b+c, t > 0$

Xét $f(t) = \frac{1}{4t} + \frac{-1}{4+t}, \quad t > 0, \quad f'(t) = -\frac{1}{4t^2} + \frac{1}{(4+t)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4.$

T	0	4	$+\infty$
F'	-	0	+
f			

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{1}{16}$ khi $\begin{cases} b = 2c \\ a+b+c = b+2c \Leftrightarrow \begin{cases} a = c = 1 \\ b = 2 \end{cases} \\ a+b+c = 4 \end{cases}$.

Câu 27: Cho a, b, c là các số thực dương.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a+3c}{a+2b+c} + \frac{4b}{a+b+2c} - \frac{8c}{a+b+3c}.$

Trường THPT Phước Bình- Bình Phước – Lần 4

Lời giải tham khảo:

Đặt $\begin{cases} x = a+2b+c \\ y = a+b+2c \\ z = a+b+3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x+5y-3z \\ b = x-2y+z \\ c = -y+z \end{cases}$

Do đó ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{-x+2y}{x} + \frac{4x-8y+4z}{y} - \frac{-8y+8z}{z} = \left(\frac{4x}{y} + \frac{2y}{x} \right) + \left(\frac{8y}{z} + \frac{4z}{y} \right) - 17$$

$$P \geq 2\sqrt{\frac{4x}{y} \cdot \frac{2y}{x}} + 2\sqrt{\frac{8y}{z} \cdot \frac{4z}{y}} - 17 = 12\sqrt{2} - 17;$$

Đồng thức xảy ra khi $b = (1 + \sqrt{2})a, c = (4 + 3\sqrt{2})a$

Vậy GTNN của P là $12\sqrt{2} - 17$.

Câu 28: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab \geq 1; c(a + b + c) \geq 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{b+2c}{1+a} + \frac{a+2c}{1+b} + 6\ln(a+b+2c)$.

Trường THPT Phước Bình – Bình Phước – Lần 5

Lời giải tham khảo

$$\begin{aligned} P + 2 &= \frac{a+b+2c+1}{1+a} + \frac{a+b+2c+1}{1+b} + 6\ln(a+b+2c) \\ &= (a+b+2c+1) \left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \right) + 6\ln(a+b+2c) \end{aligned}$$

Ta chứng minh được các BĐT quen thuộc sau:

$$+) \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \quad (1)$$

$$+) \sqrt{ab} \leq \frac{ab+1}{2} \quad (2)$$

Thật vậy,

$$+) \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \Leftrightarrow (2+a+b)(1+\sqrt{ab}) \geq 2(1+a)(1+b)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 (\sqrt{ab} - 1) \geq 0 \text{ luôn đúng vì } ab \geq 1. \text{ Dấu "=" khi } a=b \text{ hoặc } ab=1$$

$$+) \sqrt{ab} \leq \frac{ab+1}{2} \Leftrightarrow (\sqrt{ab} - 1)^2 \geq 0. \text{ Dấu "=" khi } ab=1.$$

$$\text{Do đó, } \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \geq \frac{2}{1+\frac{ab+1}{2}} = \frac{4}{3+ab}$$

$$\geq \frac{4}{ab+bc+ca+c^2} = \frac{4}{(a+c)(b+c)} \geq \frac{16}{(a+b+2c)^2}$$

Đặt $t = a+b+2c, t > 0$ ta có:

$$P + 2 \geq f(t) = \frac{16(t+1)}{t^2} + 6\ln t, t > 0;$$

$$f'(t) = \frac{6}{t} - \frac{16(t+1)}{t^3} = \frac{6t^2 - 16t - 32}{t^3} = \frac{(t-4)(6t+8)}{t^3}$$

BBT

t	0	4	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$			

Vậy, GTNN của P là $+6\ln 4$ khi $a=b=c=1$.

Câu 29: Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $2(a^2 + b^2) = a^2b^2$.

Tìm Min P, với $P = \frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}$.

Trường THPT Hùng Vương – Bình Phước– Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $a^2b^2 = 2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2 \Rightarrow ab \geq a+b$

$$a^2 + b^2 + 1 = (a+b)^2 - 2ab + 1 \leq (a+b)^2 - 2(a+b) + 1 = (a+b-1)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + 1} \leq |a+b-1|$$

$$P = \left(\frac{a}{b+1} + 1 \right) + \left(\frac{b}{a+1} + 1 \right) - 2 + \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = (a+b+1) \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} \right) + \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} - 2$$

$$\geq (a+b+1) \frac{4}{a+b+2} + \frac{1}{|a+b-1|} - 2$$

Đặt $t = a+b$, ta có $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) = (ab)^2 \leq \frac{(a+b)^4}{16} \Rightarrow a+b \geq 4$

Xét $f(t) = \frac{4(t+1)}{t+2} + \frac{1}{t-1} - 2; t \geq 4$ ta được $\text{Min} P = M \inf(x) = \frac{5}{3}$ khi $x = y = 2$

Câu 30: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + 2b > c$ và $a^2 + b^2 + c^2 - 2 = ab + bc + ca$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a + c + 2}{a + b + c + a + b + 1} - \frac{a + b + 1}{a + c + a + 2b - c}$.

Trường THPT Hùng Vương – Bình Phước – Lần 2

Lời giải tham khảo

$$\begin{aligned}
 2 + ab + bc + ca &= a^2 + b^2 + c^2 \geq a^2 + 2bc \\
 \Rightarrow 2ab + ac + 1 &\geq a^2 + ab + bc + ca \quad \Rightarrow 2ab + ac + 1 \geq a + b + a + c \\
 \Rightarrow ab + ac + 1 &\geq \frac{a + b + a + c}{2} \quad \Rightarrow a + b + c + a + b + 1 \geq \frac{a + b + a + c}{2} + a + b \\
 \Rightarrow a + b + c + a + b + 1 &\geq \frac{a + b + a + c + 2}{2} \Rightarrow \frac{a + c + 2}{a + b + c + a + b + 1} \leq \frac{2}{a + b} \\
 a + c + a + 2b - c &\leq \frac{1}{4} (a + c + a + 2b - c)^2 = a + b^2 \\
 \Rightarrow \frac{a + b + 1}{a + c + a + 2b - c} &\geq \frac{a + b + 1}{a + b^2} = \frac{1}{a + b} + \frac{1}{a + b^2}
 \end{aligned}$$

Khi đó $P \leq \frac{2}{a + b} - \frac{1}{a + b} - \frac{1}{a + b^2} = \frac{1}{a + b} - \frac{1}{a + b^2}; t = \frac{1}{a + b} > 0$

Xét hàm số $f(t) = t - t^2; t > 0, f'(t) = 1 - 2t, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

t	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(t)$		+	0
$f(t)$	0	$\frac{1}{4}$	$-\infty$

Kết luận: $\text{Max} P = \frac{1}{4}$, khi $a = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}, b = c = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$

Câu 31: Cho a, b là các số thực thỏa mãn: $a + b = 2\sqrt{a + 2} + 3\sqrt{b - 2014} + 2012$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $T = (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + \frac{2015 + 2ab\sqrt{a + b + 1}}{\sqrt{a + b + 1}}$

Trường THPT Đồng Xoài – Bình Phước – Lần 1

Lời giải tham khảo

$$T = (a+b+1)^2 - 4(a+b+1) + 5 + \frac{2015}{\sqrt{a+b+1}}$$

$$\text{Max} = T = 4096577 + \frac{2015}{\sqrt{2026}}$$

$$\text{Min} = T = 4044122 + \frac{2015}{\sqrt{2013}}$$

Câu 32: Cho a, b, c là ba số dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 1}} - \frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

Trường THPT Đồng Xoài – Bình Phước– Lần 2

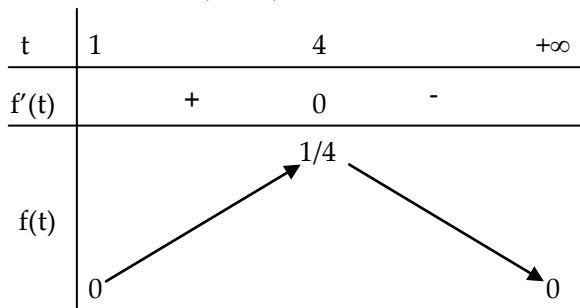
Lời giải tham khảo

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(c+1)^2}{2} = \frac{1}{2}[(a+b)^2 + (c+1)^2] \geq \frac{1}{4}(a+b+c+1)^2$$

$$(a+1)(b+1)(c+1) \leq \left(\frac{a+1+b+1+c+1}{3} \right)^3 = \left(\frac{a+b+c+3}{3} \right)^3$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } P &\leq \frac{2}{a+b+c+1} - \frac{54}{(a+b+c+3)^3} \\ &= \frac{2}{t} - \frac{54}{(t+2)^3} = f(t) \quad \text{với } t = a+b+c+1 \quad (t > 1) \end{aligned}$$

$$f'(t) = -\frac{2}{t^2} + \frac{162}{(t+2)^4}; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = 1(\text{loại}) \end{cases}$$



Vậy giá trị lớn nhất của $P = \frac{1}{4}$ khi $\begin{cases} a+b+c=3 \\ a=b=c \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1$

Câu 33: Cho các số thực dương a, b, c . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P = \frac{2}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}}.$$

Trường THPT Đồng Xoài – Bình Phước – Lần 3

Lời giải tham khảo

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \leq a + \frac{1}{2} \cdot \frac{a+4b}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{a+4b+16c}{3} = \frac{4}{3}(a+b+c).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 4b = 16c$.

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{3}{2(a+b+c)} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}}$$

$$\text{Đặt } t = a+b+c, t > 0. \text{ Khi đó ta có: } P \geq \frac{3}{2t} - \frac{3}{\sqrt{t}}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{3}{2t} - \frac{3}{\sqrt{t}} \text{ với } t > 0 \text{ ta có } f'(t) = \frac{3}{2t\sqrt{t}} - \frac{3}{2t^2}.$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2t\sqrt{t}} - \frac{3}{2t^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(t)$		–	0	+
$f(t)$				
			$-\frac{3}{2}$	

Do đó ta có $\min_{t>0} f(t) = -\frac{3}{2}$ khi và chỉ khi $t = 1$

Vậy ta có $P \geq -\frac{3}{2}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a=4b=16c \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{16}{21}, b = \frac{4}{21}, c = \frac{1}{21}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{3}{2}$ khi và chỉ khi $(a, b, c) = \left(\frac{16}{21}, \frac{4}{21}, \frac{1}{21}\right)$.

Câu 34: Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$

Trường THPT Chuyên Quang Trung – Bình Phước – Lần 2

Lời giải tham khảo

Giả thiết cho $2(a^4 + b^4) + 8c^2 = 9(a^2 + b^2)c \Leftrightarrow \boxed{c \leq a^2 + b^2 \leq 8c}$

Ta có:

$$P \leq \frac{(b+c)^2(a+c-2c)}{a+c} + \frac{(a+c)^2(b+c-2c)}{b+c} + 16\sqrt{c+1} = (b+c)^2 - 2c \left(\frac{(b+c)^2}{a+c} + \frac{(a+c)^2}{b+c} \right) + 16\sqrt{c+1}$$

$$\stackrel{BCS}{\leq} (b+c)^2 + (a+c)^2 - 2c(a+b+2c) + 16\sqrt{c+1} \leq 8c - 2c^2 + 16\sqrt{c+1}$$

Xét hàm $f(c) = 8c - 2c^2 + 16\sqrt{c+1}$ với $c \in (0; +\infty)$ có $f(c) = 0 \Leftrightarrow c = 3$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P_{\max} = 38$ khi $c = 3 \Rightarrow a = b = 2\sqrt{3}$.

Câu 35: Cho a, b, c thuộc đoạn $[1, 2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{4b+4c} + \frac{(b+c)^2 + 2bc}{c^2 + 4bc}$$

Trường THPT Quang Trung – Bình Phước – Lần 1

Lời giải tham khảo

$$\text{Ta có: } P = \frac{a}{4b+4c} + \frac{b^2}{c^2+4bc} + 1 = \frac{a^2}{4ba+4ac} + \frac{b^2}{c^2+4bc} + 1 \geq \frac{(a+b)^2}{c^2+4ab+4c(a+b)} + 1$$

$$\geq \frac{(a+b)^2}{c^2+(a+b)^2+4c(a+b)} + 1 = \frac{t^2}{t^2+4t+1} = f(t), t = \frac{a+b}{c} \in [1; 4]$$

Khi đó $f'(t) = \frac{2t + 4t^2}{(t^2 + 4t + 1)^2} > 0$

$P \geq f(1) = \frac{1}{6}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = \frac{c}{2}$.

Câu 36: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x \geq y \geq z$ và $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + 3y$.

Trường THPT Nguyễn Hữu Cánh – Bình Phước – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $\frac{x}{z} + xz \geq 2x, \quad \frac{z}{y} + yz \geq 2z$.

Từ đó suy ra $P = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + 3y \geq 2x - xz + 2z - yz + 3y$

$$= 2(x + z) + y(x + y + z) - xz - yz = 2(x + z) + y^2 + x(y - z)$$

Do $x > 0$ và $y \geq z$ nên $x(y - z) \geq 0$. Từ đây kết hợp với trên ta được

$$P = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + 3y \geq 2(x + z) + y^2 = 2(3 - y) + y^2 = (y - 1)^2 + 5 \geq 5.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 5 đạt khi $x = y = z = 1$

Câu 37: Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2x - 4y - 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 2(x + z) - y$.

Trường THPT Nguyễn Hữu Cánh – Bình Phước – Lần 2

Lời giải tham khảo

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2x - 4y - 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 \leq 4 \quad (1)$$

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Xét mặt cầu:

$$(S): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 4. \text{ Có tâm } I(1; -2; 0), \text{ bán kính } R = 2.$$

Xét mp $(\alpha): 2x - y + 2z - T = 0$

G/s $M(x; y; z)$. Từ (1) có điểm M nằm bên trong (S) và kể cả trên mặt cầu (S)

$$\Rightarrow d(I, (\alpha)) \leq R \Leftrightarrow \frac{|4 - T|}{3} \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq T \leq 10$$

- Với $T = -2$ thì M là giao điểm của $mp(\beta): 2x - y + 2z + 2 = 0$

Và đường thẳng Δ đi qua I và $\perp(\beta)$.

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$$

Với $T = 10$. Tương tự $M\left(\frac{7}{3}; -\frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right)$

$$\text{Vậy min } T = -2 \text{ khi } \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = z = -\frac{4}{3} \end{cases} \quad \text{max } T = 10 \text{ khi } \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = -\frac{8}{3} \\ z = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Câu 38: Cho ba số thực dương x, y, z . Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{4}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 4}} - \frac{9}{(x+y)\sqrt{(x+2z)(y+2z)}}$$

Trường THPT Nguyễn Hữu Cánh – Bình Phước – Lần 3

Lời giải tham khảo

$$\begin{aligned} * x^2 + y^2 + z^2 + 4 &= \frac{1}{2}[(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2) + (z^2 + 4) + (z^2 + 4)] \geq \frac{1}{2}[(x^2 + y^2) + 2xy + (z^2 + 2^2) + 2z] \\ &= \frac{1}{2}[(x+y)^2 + (z+2)^2] \geq \frac{1}{4}[(x+y)^2 + (z+2)^2 + 2(x+y)(z+2)] \geq \frac{1}{4}(x+y+z+2)^2 \end{aligned}$$

$$* (x+y)\sqrt{(x+2z)(y+2z)} \leq (x+y) \frac{1}{2}(x+y+4z) = \frac{1}{6}(3x+3y)(x+y+4z) \quad (1)$$

$$\text{Vì } \sqrt{(3x+3y)(x+y+4z)} \leq \frac{1}{2}(3x+3y+x+y+4z) = 2(x+y+z) \text{ nên}$$

$$(1) \Leftrightarrow (x+y)\sqrt{(x+2z)(y+2z)} \leq \frac{4}{6}(x+y+z)^2$$

$$\text{Vậy } P \leq \frac{8}{x+y+z+2} - \frac{27}{2(x+y+z)^2}$$

$$\text{Đặt } t = x+y+z, \text{ xét hàm số } f(t) = \frac{8}{t+2} - \frac{27}{2t^2} \text{ với } t > 0$$

$$\text{Ta có } f'(t) = -\frac{8}{(t+2)^2} + \frac{27}{t^3} \quad f'(t) = \frac{-8t^3 + 2t^2 + 108t + 108}{t^3(t+2)^2}, \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6 \Rightarrow f(6) = \frac{5}{8}$$

t	0	6	$+\infty$	
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$			$\frac{5}{8}$	

Vậy $P \leq \frac{5}{8}$. Suy ra $\max P = \frac{5}{8}$ khi $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x=y=z \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=2$.

Câu 39: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa: $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}.$$

Trường THPT Hà Huy Tập – Lần 1

Lời giải tham khảo

$$A = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}.$$

Từ giả thiết $x^2(y+z) \geq 2x^2\sqrt{yz} = 2x^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{x}} = 2x\sqrt{x}$

Tương tự: $y^2(z+x) \geq 2y\sqrt{y}$; $z^2(x+y) \geq 2z\sqrt{z}$

Khi đó $A \geq \frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$

Đặt $\begin{cases} a = x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y} \\ b = y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z} \\ c = z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\sqrt{x} = \frac{4c+a-2b}{9} \\ y\sqrt{y} = \frac{4a+b-2c}{9} \\ z\sqrt{z} = \frac{4b+c-2a}{9} \end{cases}$

Bất đẳng thức trở thành: $A \geq \frac{2}{9} \left(\frac{4c+a-2b}{b} + \frac{4a+b-2c}{c} + \frac{4b+c-2a}{a} \right)$

$$= \frac{2}{9} \left[4 \left(\frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) - 6 \right] \geq 2$$

Kết luận Min $A = 2$ khi $x = y = z = 1$.

Câu 40: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a \in [0;1], b \in [0;2], c \in [0;3]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2(2ab+ac+bc)}{1+2a+b+3c} + \frac{8-b}{b+c+b(a+c)+8} + \frac{b}{\sqrt{12a^2+3b^2+27c^2}+8}$.

Trường THPT Anh Sơn 2 – Nghệ An – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $a \in [0;1], b \in [0;2], c \in [0;3] \Rightarrow \begin{cases} (1-a)(b+c) \geq 0 \\ (2-b)(a+c) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c \geq ab+ac \\ 2a+2c \geq ab+bc \end{cases} \Rightarrow 2a+b+3c \geq 2ab+bc+ac$
(1)

$$\Rightarrow \frac{2(2ab+ac+bc)}{1+2a+b+3c} \leq \frac{2(2ab+ac+bc)}{1+2ab+ac+bc}$$

Mặt khác $b+c \geq a(b+c)$ vì $a \in [0;1]$, suy ra

$$\frac{8-b}{b+c+b(a+c)+8} \leq \frac{8-b}{a(b+c)+b(a+c)+8} = \frac{8-b}{2ab+bc+ac+8}$$

Với mọi số thực x, y, z ta có $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2xy + 2yz + 2zx$

$\Leftrightarrow 3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x+y+z)^2$ (2). Áp dụng (2) và (1) ta có

$$\sqrt{12a^2+3b^2+27c^2} = \sqrt{3[(2a)^2+b^2+(3c)^2]} \geq \sqrt{(2a+b+3c)^2} = 2a+b+3c \geq 2ab+bc+ac$$

$$\Rightarrow \frac{b}{\sqrt{12a^2+3b^2+27c^2}+8} \leq \frac{b}{2ab+bc+ac+8}$$

$$\text{Suy ra } P \leq \frac{2(2ab+bc+ac)}{1+2ab+bc+ac} + \frac{8-b}{2ab+bc+ac+8} + \frac{b}{2ab+bc+ac+8}$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{2(2ab+bc+ac)}{1+2ab+bc+ac} + \frac{8}{2ab+bc+ac+8}. \text{ Đặt } t = 2ab+bc+ac \text{ với } t \in [0;13].$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{2t}{t+1} + \frac{8}{t+8}; t \in [0;13]$ có $f'(t) = \frac{2}{(t+1)^2} - \frac{8}{(t+8)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

Tính $f(0) = 1; f(6) = \frac{16}{7}; f(13) = \frac{47}{21} \Rightarrow f(t) \leq \frac{16}{7}, \forall t \in [0;13]$ và $f(t) = \frac{16}{7}$ khi $t = 6$. Do đó $P \leq \frac{16}{7}$.

Khi $a = 1; b = 2; c = \frac{2}{3}$ thì $P = \frac{16}{7}$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{16}{7}$.

Câu 42: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x+z}{x+2y+1} + \frac{z}{y+1} - \frac{4x^2}{(x+y)^2}$

Trường THPT Thực Hành Cao Nguyên – Tây Nguyên – Lần 1

Lời giải tham khảo

$$GT \Rightarrow 2x + 2xy = z^2 + (x+y)^2 \geq 2z(x+y) \rightarrow x + xy \geq xz + yz \quad (1)$$

Dấu bằng khi $x + y = z$

Từ (1) và x, y, z dương suy ra $\frac{z}{y+1} \leq \frac{x}{y+1}, \frac{x+z}{x+2y+1} \leq \frac{x}{x+y}$

$$\Rightarrow P \leq \frac{2x}{x+y} - 4 \left(\frac{x}{x+y} \right)^2$$

Đặt $t = \frac{x}{x+y} > 0 \rightarrow P \leq 2t - 4t^2$. Xét hàm số $f(t) = 2t - 4t^2, 0 < t < 1$

Lập BBT cho ta $f(t) \leq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$

Kết luận: $MaxP = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (x; y; z) = \left(\frac{1}{13}; \frac{3}{13}; \frac{4}{13}\right)$

Câu 43: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a \geq b \geq c$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 5$.

Chứng minh rằng: $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) \geq -4$

Trường THPT- Đoàn Thị Điểm – Khánh Hoà – Lần 1

Lời giải tham khảo

Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số dương ta có: $3 = ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} \Rightarrow abc \leq 1$.

Suy ra: $1 + a^2(b+c) \geq abc + a^2(b+c) = a(ab+bc+ca) = 3a \Rightarrow \frac{1}{1+a^2(b+c)} \leq \frac{1}{3a} \quad (1)$.

Tương tự ta có: $\frac{1}{1+b^2(c+a)} \leq \frac{1}{3b} \quad (2), \frac{1}{1+c^2(a+b)} \leq \frac{1}{3c} \quad (3)$.

Cộng (1), (2) và (3) theo vế với vế ta có:

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)} + \frac{1}{1+b^2(c+a)} + \frac{1}{1+c^2(a+b)} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) = \frac{ab+bc+ca}{3abc} = \frac{1}{abc} \quad \square$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $abc = 1, ab+bc+ca = 3 \Rightarrow a = b = c = 1, (a, b, c > 0)$.

Câu 44: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $S = \frac{x^2}{\sqrt{y^3+8}} + \frac{y^2}{\sqrt{z^3+8}} + \frac{z^2}{\sqrt{x^3+8}} + \sqrt{x^2+y^2+z^2+1}$

Trường THPT Đoàn Thượng – Hải Dương – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) = 9 \Rightarrow x+y+z \geq 3$

Mặt khác $(x+y+z+1)^2 \leq 4(x^2+y^2+z^2+1) \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2+1} \geq \frac{1}{2}(x+y+z+1) \geq 2$

Đồng thức xảy ra $x=y=z=1$

$$0 < \sqrt{y^3+8} = \sqrt{(y+2)(y^2-2y+4)} \leq \frac{(y+2)+(y^2-2y+4)}{2} = \frac{y^2-y+6}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{y^3+8}} \geq \frac{2x^2}{y^2-y+6} \text{ . Tương tự cộng lại ta được}$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{y^3+8}} + \frac{y^2}{\sqrt{z^3+8}} + \frac{z^2}{\sqrt{x^3+8}} \geq 2 \left(\frac{x^2}{y^2-y+6} + \frac{y^2}{z^2-z+6} + \frac{z^2}{x^2-x+6} \right)$$

Đồng thức xảy ra $x=y=z=1$

$$\begin{aligned} \text{Ta lại có } \frac{x^2}{y^2-y+6} + \frac{y^2}{z^2-z+6} + \frac{z^2}{x^2-x+6} &\geq \frac{(x+y+z)^2}{y^2-y+6+z^2-z+6+x^2-x+6} \\ &= \frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2 - (x+y+z) + 12} \end{aligned}$$

Đặt $t = x+y+z, t \geq 3$ và xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{t^2-t+12}, t \geq 3$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{-t^2+24t}{(t^2-t+12)^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t=0, t=24$$

t	3	24	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$		$\frac{48}{47}$	
	$\frac{1}{2}$		1

$$\Rightarrow \min_{[3;+\infty)} f(t) = \frac{1}{2} \Rightarrow S \geq 3, S=3 \Leftrightarrow x=y=z=1. \text{ Vậy } \min S = 3$$

Câu 45: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{ab}{3+c^2} + \frac{bc}{3+a^2} - \frac{a^3b^3+b^3c^3}{24a^3c^3}$.

Lời giải tham khảo

- Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có :

$$\begin{aligned} \frac{ab}{3+c^2} + \frac{bc}{3+a^2} &= \frac{ab}{(c^2+a^2)+(c^2+b^2)} + \frac{bc}{(a^2+b^2)+(a^2+c^2)} \\ &\leq \frac{ab}{2\sqrt{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}} + \frac{bc}{2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a^2}{c^2+a^2} + \frac{b^2}{c^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{b^2}{c^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} \right) \leq \frac{1}{4} \left(1 + \frac{b^2}{2bc} + \frac{b^2}{2ab} \right) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{b}{2c} + \frac{b}{2a} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{b}{c} + \frac{b}{a} \right). \end{aligned}$$

- Xét bất đẳng thức : $x^3 + y^3 \geq \frac{1}{4}(x+y)^3$ (phải chứng minh bất này)

Áp dụng : $\frac{a^3b^3 + b^3c^3}{c^3a^3} \geq \frac{(ab+bc)^3}{4c^3a^3} = \frac{1}{4} \left(\frac{b}{c} + \frac{b}{a} \right)^3 \Rightarrow P \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{b}{c} + \frac{b}{a} \right) - \frac{1}{96} \left(\frac{b}{c} + \frac{b}{a} \right)^3$.

Đặt $t = \frac{b}{c} + \frac{b}{a}$, khi đó $t > 0$ và $P \leq -\frac{1}{96}t^3 + \frac{1}{8}t + \frac{1}{4}$.

Xét hàm số $f(t) = -\frac{1}{96}t^3 + \frac{1}{8}t + \frac{1}{4}$ với $t > 0$.

Ta có $f'(t) = -\frac{1}{32}t^2 + \frac{1}{8}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$, vì $t > 0$.

Suy ra bảng biến thiên:

t	0	2	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$		$\frac{5}{12}$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P \leq \frac{5}{12}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{5}{12}$, đạt được khi $a = b = c = 1$

Câu 46: Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P = \frac{x+y}{\sqrt{xy+z}} + \frac{y+z}{\sqrt{yz+x}} + \frac{z+x}{\sqrt{zx+y}}$

Lời giải tham khảo

Ta có

$x + y + z = 1 \Rightarrow x + y = 1 - z$

$$\frac{x+y}{\sqrt{xy+z}} = \frac{1-z}{\sqrt{xy+1-x-y}} = \frac{1-z}{\sqrt{(1-x)(1-y)}}$$

$$\frac{y+z}{\sqrt{yz+x}} = \frac{1-x}{\sqrt{yz+1-y-z}} = \frac{1-x}{\sqrt{(1-y)(1-z)}}$$

$$\frac{z+x}{\sqrt{zx+y}} = \frac{1-y}{\sqrt{zx+1-x-z}} = \frac{1-y}{\sqrt{(1-x)(1-z)}}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} P &= \frac{x+y}{\sqrt{xy+z}} + \frac{y+z}{\sqrt{yz+x}} + \frac{z+x}{\sqrt{zx+y}} \\ &= \frac{1-z}{\sqrt{(1-x)(1-y)}} + \frac{1-x}{\sqrt{(1-y)(1-z)}} + \frac{1-y}{\sqrt{(1-x)(1-z)}} \\ &\geq 3\sqrt[3]{\frac{1-z}{(1-x)(1-y)} \cdot \frac{1-x}{(1-y)(1-z)} \cdot \frac{1-y}{(1-x)(1-z)}} = 3 \end{aligned}$$

Vậy Min $P = 3$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

Câu 47: Cho x, y, z là ba số dương có tổng bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$P = \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} + \sqrt{1-z}.$$

Trường THPT Đông Du – Đắk-lăk– Lần 2

Lời giải tham khảo

+ Áp dụng BĐT AM-GM, ta có

$$\sqrt{(1-x) \cdot \frac{2}{3}} \leq \frac{1-x + \frac{2}{3}}{2} = \frac{5-3x}{6}$$

+ Tương tự, ta thu được

$$\sqrt{(1-x) \cdot \frac{2}{3}} + \sqrt{(1-y) \cdot \frac{2}{3}} + \sqrt{(1-z) \cdot \frac{2}{3}} \leq \frac{5-3x}{6} + \frac{5-3y}{6} + \frac{5-3z}{6} = 2$$

+ Suy ra $P \leq \sqrt{6}$

+ Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Câu 48: Cho a, b, c là các số dương và $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{bc}{\sqrt{3a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{3b+ca}} + \frac{ab}{\sqrt{3c+ab}}$$

Trường THPT Đông Du – Đắk - Lắk – Lần 3

Lời giải tham khảo

Với $a + b + c = 3$ ta có $\frac{bc}{\sqrt{3a+bc}} = \frac{bc}{\sqrt{a(a+b+c)+bc}} = \frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{bc}{2} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right)$

Theo BĐT Cô-Si: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \geq \frac{2}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}$, dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow b = c$

Tương tự $\frac{ca}{\sqrt{3b+ca}} \leq \frac{ca}{2} \left(\frac{1}{b+a} + \frac{1}{b+c} \right)$ và $\frac{ab}{\sqrt{3c+ab}} \leq \frac{ab}{2} \left(\frac{1}{c+a} + \frac{1}{c+b} \right)$

Suy ra $P \leq \frac{bc+ca}{2(a+b)} + \frac{ab+bc}{2(c+a)} + \frac{ab+ca}{2(b+c)} = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. Vậy $\max P = \frac{3}{2}$ khi $a = b = c = 1$.

Câu 49: Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y - 1 = \sqrt{2x-4} + \sqrt{y+1}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = (x+y)^2 - \sqrt{9-x-y} + \frac{1}{\sqrt{x+y}}$.

Trường THPT Đồng Gia – Hải Dương – Lần 1

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x \geq 2; y \geq -1; 0 < x + y \leq 9$;

Ta có $0 \leq x + y - 1 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x-2} + 1 \cdot \sqrt{y+1} \leq \sqrt{3(x+y-1)} \Rightarrow (x+y-1)^2 \leq 3(x+y-1)$
 $\Rightarrow 0 \leq x + y - 1 \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq x + y \leq 4$.

Đặt $t = x + y, t \in [1; 4]$, ta có $S = t^2 - \sqrt{9-t} + \frac{1}{\sqrt{t}}$

$S'(t) = 2t + \frac{1}{2\sqrt{9-t}} - \frac{1}{2t\sqrt{t}} > 0, \forall t \in [1; 4]$. Vậy $S(t)$ đồng biến trên $[1; 4]$.

Suy ra

$S_{\max} = S(4) = 4^2 - \sqrt{9-4} + \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{33-2\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = 4; y = 0;$

$S_{\min} = S(1) = 2 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2; y = -1.$

Câu 50: Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{3+ab+bc+ca} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}.$$

Trường THPT Đồng Xoài – Bình Phước – Lần 2

Lời giải tham khảo

Áp dụng Bất đẳng thức $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ ta có:

$$(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c) = 9abc > 0$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca \geq 3\sqrt{abc}$$

Ta có: $(1+a)(1+b)(1+c) \geq (1+\sqrt[3]{abc})^3, \forall a, b, c > 0$. Thật vậy:

$$(1+a)(1+b)(1+c) = 1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc \geq$$

$$1 + 3\sqrt{abc} + 3\sqrt{(abc)^2} + abc = (1 + \sqrt[3]{abc})^3$$

$$\text{Khi đó } P \leq \frac{2}{3(1+\sqrt{abc})} + \frac{\sqrt[3]{abc}}{1+\sqrt[3]{abc}} = Q \quad (1)$$

$$\text{Đặt } \sqrt[3]{abc} = t. \text{ Vì } a, b, c > 0 \text{ nên } 0 < abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = 1$$

$$\text{Xét hàm số } Q = \frac{2}{3(1+t^3)} + \frac{t^2}{1+t^2}, \quad t \in (0;1]$$

$$\Rightarrow Q'(t) = \frac{2t(t-1)(t^5-1)}{(1+t^3)^2(1+t^2)^2} \geq 0, \quad \forall t \in (0;1]$$

$$\text{Do hàm số đồng biến trên } (0;1] \text{ nên } Q = Q(t) \leq Q(1) = \frac{5}{6} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } P \leq \frac{5}{6}$$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{5}{6}, \text{ đạt được khi và chỉ khi: } a = b = c = 1.$$

Câu 51: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a^2 + 2b = 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{4}{a^4} + \frac{4}{b^4} + \frac{5}{8(a-b)^2}$$

Trường THPT Đồng Đậu – Vĩnh Phúc – Lần 2

Lời giải tham khảo

Từ giả thiết và bất đẳng thức CôSi ta có:

$$a^2 + 2b = 12 \Leftrightarrow a^2 + 4 + 2b = 16 \Leftrightarrow 4a + 2b \leq 16 \Leftrightarrow 2\sqrt{4a \cdot 2b} \leq 16 \Leftrightarrow 0 < ab \leq 8$$

$$\text{Do đó } P \geq \frac{a^2 b^2}{64} \left(\frac{4}{a^4} + \frac{4}{b^4} \right) + \frac{ab}{8} \cdot \frac{5}{8(a-b)^2} = \frac{1}{16} \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) + \frac{5}{64} \cdot \frac{1}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ (t > 2), \text{ ta có } P \geq \frac{1}{16} t^2 + \frac{5}{64} \cdot \frac{1}{t-2} - \frac{1}{8}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{16} t^2 + \frac{5}{64} \cdot \frac{1}{t-2} - \frac{1}{8}$ trên $(2; +\infty)$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{1}{8} t - \frac{5}{64} \cdot \frac{1}{(t-2)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}$$

BBT:

t	2	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(t)$		- 0 +	
$f(t)$	$+\infty$	$\frac{27}{64}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min_{(2; +\infty)} f(t) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{27}{64}$

Suy ra $P \geq \frac{27}{64}$, dấu bằng xảy ra khi $a = 2, b = 4$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{27}{64}$ khi $a = 2, b = 4$.

Câu 52: Cho a, b, c là những số dương thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{4}{a^2+7} + \frac{4}{b^2+7} + \frac{4}{c^2+7}$$

Trường GDTX Cam Lâm – Khánh Hoà – Lần 1

Lời giải tham khảo

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ ($x > 0, y > 0$)

Ta có: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} \geq \frac{4}{a+2b+c}; \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{4}{a+b+2c}; \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{4}{2a+b+c}$

Ta lại có:

$$\frac{1}{2a+b+c} \geq \frac{2}{2a^2+b^2+c^2+4} = \frac{2}{a^2+7} \Leftrightarrow 2a^2+b^2+c^2+4-4a-2b-2c \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0$$

Tương tự: $\frac{1}{2b+c+a} \geq \frac{2}{b^2+7}; \frac{1}{2c+a+b} \geq \frac{2}{c^2+7}$

Từ đó suy ra $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{4}{a^2+7} + \frac{4}{b^2+7} + \frac{4}{c^2+7}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Câu 53: Cho các số x, y, z là những số thực dương thỏa mãn: $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+x} + \frac{z^2}{z+x}$

Trường GDTX Cam Lâm _ Khánh Hoà – Lần 2

Lời giải tham khảo

Áp dụng bất đẳng thức Cô Si, ta có:

$$\frac{x^2}{x+y} = x - \frac{xy}{x+y} \geq x - \frac{xy}{2\sqrt{xy}} = x - \frac{\sqrt{xy}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x+y} \geq x - \frac{\sqrt{xy}}{2} \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

Chúng minh tương tự ta có: $\frac{y^2}{y+z} \geq y - \frac{\sqrt{yz}}{2} \quad (2)$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $y = z$

$$\frac{z^2}{x+z} \geq z - \frac{\sqrt{xz}}{2} \quad (3) \text{ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } x = z$$

Từ (1); (2); (3) suy ra $A \geq x + y + z - \frac{1}{2}$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$

Chỉ ra được: $x + y + z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \Rightarrow x + y + z \geq 1$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

Khi đó: $A \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

Vậy $A_{\min} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$

Câu 54: Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn: $a + b + c = 3$.

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{ab + bc + ca}{a^2b + b^2c + c^2a} \geq 4$

:Trường GDTX Nha Trang – Khánh Hoà – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có: $3(a^2 + b^2 + c^2) = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) = a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2$

mà $a^3 + ab^2 \geq 2a^2b$

$b^3 + bc^2 \geq 2b^2c$

$c^3 + ca^2 \geq 2c^2a$

Suy ra $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a) > 0$

Suy ra $VT \geq a^2 + b^2 + c^2 + \frac{ab + bc + ca}{a^2b + b^2c + c^2a} \Rightarrow VT \geq a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}$

Đặt $t = a^2 + b^2 + c^2$, ta chứng minh được $t \geq 3$.

Suy ra: $VT \geq t + \frac{9-t}{2t} = \frac{t}{2} + \frac{9}{2t} + \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \geq 3 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 4 \Rightarrow VT \geq 4$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Câu 55: Cho các số thực dương a, b, c . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{4a^3 + 3b^3 + 2c^3 - 3b^2c}{(a + b + c)^3}$$

Trường GDTX Nha Trang – Khánh Hoà – Lần 2

Lời giải tham khảo

+ Theo bất Cô-si: $3b^2c \leq 2b^3 + c^3$ (*). Dấu = xảy ra khi $b=c$

Ta sẽ cm : $b^3 + c^3 \geq \frac{(b+c)^3}{4}$ (**); $\forall b, c > 0$. Thật vậy :

$$(**) \Leftrightarrow 4(b^3 + c^3) \geq b^3 + c^3 + 3b^2c + 3bc^2 \Leftrightarrow b^3 + c^3 - b^2c - bc^2 \geq 0 \Leftrightarrow (b+c)(b-c)^2 \geq 0$$

Điều này đúng $\forall b, c > 0$; dấu = xảy ra khi $b=c$

+ Áp dụng(*), (**) ta được $P \geq \frac{4a^3 + \frac{(b+c)^3}{4}}{(a+b+c)^3} = 4t^2 + \frac{1}{4}(1-t)^3$; với $t = \frac{a}{a+b+c}$ và $t \in (0;1)$

+ Xét $f(t) = 4t^3 + \frac{1}{4}(1-t)^3$; $t \in (0;1)$. Ta có $f'(t) = 12t^2 - \frac{3}{4}(1-t)^2$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{5}$

BBT	t	0	1/5	1
	f'(t)	-		+
	f(t)	giảm	4/25	tăng

Suy ra $P \geq \frac{4}{25}$; Dấu = xảy ra khi $\begin{cases} b=c \\ \frac{a}{a+b+c} = \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow 2a = b = c$

Câu 56: Xét các số thực x, y thỏa mãn điều kiện : $x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức : $P = x + y$.

Trường THPT Hoàng Hoa Thám – Lần 1

Lời giải tham khảo

Giả sử T là tập giá trị của P, khi đó ta đi tìm m để hệ $\begin{cases} 3(\sqrt{x+1} + \sqrt{y+2}) = m \\ x + y = m \end{cases}$ (I)

có nghiệm.

Đặt $u = \sqrt{x+1} \geq 0, v = \sqrt{y+2} \geq 0$, ta có : $\begin{cases} 3(u+v) = m \\ u^2 + v^2 = m+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = \frac{m}{3} \\ u.v = \frac{1}{2} \left(\frac{m^2}{9} - m - 3 \right) \end{cases}$ (II)

Hệ (I) có nghiệm khi và chỉ khi hệ (II) có nghiệm (u; v) với $u \geq 0, v \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{3} \geq 0 \\ \frac{m^2}{3} - m - 3 \geq 0 \\ \left(\frac{m}{3}\right)^2 \geq 2\left(\frac{m^2}{9} - m - 3\right) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{9+3\sqrt{21}}{2} \leq m \leq 9+3\sqrt{15}$$

Vậy tập giá trị T của P là đoạn $\left[\frac{9+3\sqrt{21}}{2}; 9+3\sqrt{15}\right]$, suy ra minP và maxP

Câu 57: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{7}{a^2+b^2+c^2} + \frac{121}{14(ab+bc+ca)}$

Trường THPT Yên Mỹ - Hưng yên – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $1 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 + 2(ab+bc+ca) \Rightarrow ab+bc+ca = \frac{1-(a^2+b^2+c^2)}{2}$.

Do đó $A = \frac{7}{a^2+b^2+c^2} - \frac{121}{7(1-(a^2+b^2+c^2))}$

Đặt $t = a^2+b^2+c^2$.

Vì $a, b, c > 0$ và $a+b+c=1$ nên $0 < a < 1, 0 < b < 1, 0 < c < 1$

Suy ra $t = a^2+b^2+c^2 < a+b+c = 1$

Mặt khác $1 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 + 2(ab+bc+ca) \stackrel{B.C.S}{\leq} 3(a^2+b^2+c^2)$

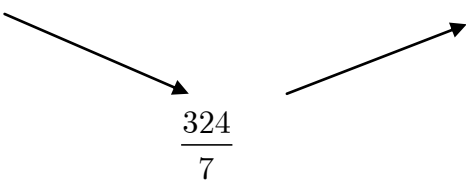
Suy ra $t = a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$. Vậy $t \in \left[\frac{1}{3}; 1\right)$

Xét hàm số $f(t) = \frac{7}{t} + \frac{121}{7(1-t)}$; $t \in \left[\frac{1}{3}; 1\right)$

$$f'(t) = -\frac{7}{t^2} + \frac{121}{7(1-t)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{7}{18}$$

BBT

t	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{18}$	1
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$			

Suy ra $f(t) \geq \frac{324}{7}$; $\forall t \in \left[\frac{1}{3}; 1\right]$. Vậy $A \geq \frac{324}{7}$ với mọi $a; b; c$ thỏa điều kiện đề bài. Hơn nữa, với

$$a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{3}; c = \frac{1}{6} \text{ thì } \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = \frac{7}{18} \\ a + b + c = 1 \end{cases} \text{ và } A = \frac{324}{7}$$

Vậy $\min A = \frac{324}{7}$

Câu 58: Cho a, b, c là ba số thuộc đoạn $[0; 1]$. Chứng minh:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1$$

Trường THPT Hồng Lĩnh – Hà Tĩnh – Lần 1

Lời giải tham khảo

Do vai trò a, b, c như nhau nên giả sử $a \leq b \leq c$, khi đó:

Đặt $S = a + b + c + 1 \Rightarrow b + c + 1 = S - a \geq S - c$

$$a + c + 1 \geq S - c;$$

$$a + b + 1 \geq S - c.$$

Ta có $(1-a)(1-b)(1+a+b) \leq 1$ (*)

$$\Leftrightarrow (1-a-b+ab)(1+a+b) - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -a^2 - b^2 - ab + a^2b + ab^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow b(a+b)(a-1) - a^2 \leq 0 \text{ đúng do } a, b \in [0; 1]. \text{ Vậy (*) đúng.}$$

Mà (*) $\Leftrightarrow (1-a)(1-b)(S-c) \leq 1$

$$\Leftrightarrow (1-a)(1-b) \leq \frac{1}{S-c} \Leftrightarrow (1-a)(1-b)(1-c) \leq \frac{1-c}{S-c}$$

Do đó:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c)$$

$$\leq \frac{a}{S-c} + \frac{b}{S-c} + \frac{c}{S-c} + \frac{1-c}{S-c} \leq \frac{S-c}{S-c} = 1$$

đpcm.

Câu 59: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + 2b > c$ và $a^2 + b^2 + c^2 - 2 = ab + bc + ca$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a+c+2}{a(b+c+a+b+1)} - \frac{a+b+1}{a+c(a+2b-c)}$.

Trường THPT Hùng Vương – Bình Phước – Lần 3

Lời giải tham khảo

$$2 + ab + bc + ca = a^2 + b^2 + c^2 \geq a^2 + 2bc$$

$$\Rightarrow 2ab + ac + 1 \geq a^2 + ab + bc + ca \quad \Rightarrow 2ab + ac + 1 \geq a + b + a + c$$

$$\Rightarrow ab + ac + 1 \geq \frac{a+b}{2} + \frac{a+c}{2} \quad \Rightarrow a(b+c+a+b+1) \geq \frac{a+b}{2} + \frac{a+c}{2} + a + b$$

$$\Rightarrow a(b+c+a+b+1) \geq \frac{a+b}{2} + \frac{a+c+2}{2} \Rightarrow \frac{a+c+2}{a(b+c+a+b+1)} \leq \frac{2}{a+b}$$

$$\frac{a+c}{a+2b-c} \leq \frac{1}{4} \frac{a+c+a+2b-c}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+1}{a+c(a+2b-c)} \geq \frac{a+b+1}{a+b} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+b}$$

Khi đó $P \leq \frac{2}{a+b} - \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+b} = 0; t = \frac{1}{a+b} > 0$

Xét hàm số $f(t) = t - t^2; t > 0, f'(t) = 1 - 2t, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

t	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(t)$		+	0 -
$f(t)$	0	$\frac{1}{4}$	$-\infty$

Kết luận: $Max P = \frac{1}{4}$, khi $a = \frac{2+\sqrt{2}}{2}, b = c = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

Câu 60: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x \geq y \geq z$ và $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + 3y$.

Trường THPT Kê Sắt – Hải Dương– Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $\frac{x}{z} + xz \geq 2x, \quad \frac{z}{y} + yz \geq 2z$.

Từ đó suy ra $P = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + 3y \geq 2x - xz + 2z - yz + 3y$
 $= 2(x + z) + y(x + y + z) - xz - yz = 2(x + z) + y^2 + x(y - z)$

Do $x > 0$ và $y \geq z$ nên $x(y - z) \geq 0$. Từ đây kết hợp với trên ta được

$$P = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + 3y \geq 2(x + z) + y^2 = 2(3 - y) + y^2 = (y - 1)^2 + 5 \geq 5.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 5 đạt khi $x = y = z = 1$

Câu 61: Cho các số thực dương x, y sao cho $x + y < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{1 - x - y}$.

Trường THPT Khánh Sơn – Khánh Hoà– Lần 2

Lời giải tham khảo

$$\begin{aligned} P &= \frac{a+b+c}{a} + 4 \cdot \frac{a+b+c}{b} + 9 \cdot \frac{a+b+c}{c} \\ &= 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{4a}{b} + 4 + \frac{4c}{b} + \frac{9a}{c} + \frac{9b}{c} + 9 \\ &= \left(\frac{b}{a} + \frac{4a}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{9a}{c} \right) + \left(\frac{4c}{b} + \frac{9b}{c} \right) + 14 \quad (1) \end{aligned}$$

Đặt $1 - x - y = z \Rightarrow x + y + z = 1$

Vì $x + y + z = 1$. Ta đặt

$$x = \frac{a}{a+b+c}, \quad y = \frac{b}{a+b+c}, \quad z = \frac{c}{a+b+c} \quad (a, b, c > 0)$$

Áp dụng bất đẳng thức cô- si, ta có

$$\frac{b}{a} + \frac{4a}{b} \geq 4 \quad (2)$$

$$\frac{c}{a} + \frac{9a}{c} \geq 6 \quad (3)$$

$$\frac{4c}{b} + \frac{9b}{c} \geq 12 \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra $P \geq 36$.

Dấu "=" xảy ra $x = \frac{1}{6} \vee y = \frac{1}{3}$

Vậy $\min P = 36$.

Câu 62: Cho các số thực dương a, b, c.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{3a^4 + 3b^4 + 25c^3 + 2}{(a+b+c)^3}$

Trường THPT Khoái Châu – Hưng Yên– Lần 2

Lời giải tham khảo

- Áp dụng BĐT Cô - Si ta có: $2a^4 + (a^4 + 1) \geq 2a^4 + 2a^2 \geq 4a^3$ hay $3a^4 + 1 \geq 4a^3$.

- Tương tự $3b^4 + 1 \geq 4b^3 \Rightarrow M \geq \frac{4a^3 + 4b^3 + 25c^3}{(a+b+c)^3}$

Mà $(a-b)^2(a+b) \geq 0 \Rightarrow 4(a^3 + b^3) \geq (a+b)^3$

$$\Rightarrow M \geq \frac{(a+b)^3 + 25c^3}{(a+b+c)^3} = \left(\frac{a+b}{a+b+c} \right)^3 + 25 \left(\frac{c}{a+b+c} \right)^3 = \left(1 - \frac{c}{a+b+c} \right)^3 + 25 \left(\frac{c}{a+b+c} \right)^3$$

Đặt $t = \frac{c}{a+b+c}$ ($0 < t < 1$)

Xét hàm số $f(t) = (1-t)^3 + 25t^3$ ($0 < t < 1$)

có: $f'(t) = -3[(1-t)^2 - (5t)^2], f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{6} \\ t = -\frac{1}{4} \end{cases}$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	0	$\frac{1}{6}$	1	$+\infty$
$f'(t)$			-	0	+
$f(t)$					

$\frac{25}{36}$

Vậy $\min f(t) = f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{25}{36}$ khi $t = \frac{1}{6}$ hay $\min M = \frac{25}{36}$ $a = b = 1, c = \frac{2}{5}$.

Câu 63: Cho hai số dương x, y phân biệt thỏa mãn: $x^2 + 2y = 12$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{4}{x^4} + \frac{4}{y^4} + \frac{5}{8(x-y)^2}$.

Trường THPT Kinh Môn – Hải Dương – Lần 1

Lời giải tham khảo

Từ điều kiện, dùng bất đẳng thức Côsi suy ra: $0 < xy \leq 8$.

Đánh giá
$$P \geq \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) + \frac{5}{64} \cdot \frac{1}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2}$$

Đặt $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} (t > 2)$. Khi đó $P \geq \frac{1}{16} \cdot (t^2 - 2) + \frac{5}{64} \cdot \frac{1}{t - 2}$ Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{16} \cdot t^2 + \frac{5}{64} \cdot \frac{1}{t - 2} - \frac{1}{8}$ (với $t >$

2) Tính đạo hàm, vẽ bảng biến thiên, tìm được:

$\min_{(2; +\infty)} f(t) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{27}{64}$ Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{27}{64}$ khi $x = 2$ và $y = 4$

Câu 64: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $4x^3 + 8y^6 = 1$.

Tìm GTLN của biểu thức:
$$P = \frac{x + 2y^2 + 2^3}{5x^2 + y^2 - 5x + y + 3}$$

Trường THPT Lạc Long Quân – Khánh Hoà – Lần 1

Lời giải tham khảo

$\forall a, b > 0$ ta có $4a^3 + b^3 \geq a + b^3$ (1)

Thật vậy:

$(1) \Leftrightarrow 4a^3 + b^3 \geq a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \Leftrightarrow 3a^3 + b^3 \geq 3ab(a+b)$

$\Leftrightarrow a + b \cdot a^2 - ab + b^2 \geq ab(a+b) \Leftrightarrow a + b \cdot a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow a + b \cdot a - b^2 \geq 0$ (2)

Vì $a, b > 0$ nên (2) luôn đúng. Dấu “=” xảy ra khi $a = b$.

Suy ra (1) được chứng minh.

Áp dụng bất (1) với $a = x, b = 2y^2$, ta có :

$$1 = 4x^3 + 8y^6 = 4 \left[x^3 + 2y^2 \right] \geq x + 2y^2 \Rightarrow x + 2y^2 \leq 1$$

Lại có :

$$\begin{aligned} 5x^2 + y^2 - 5x + y + 3 &= 5x^2 - 5x + 5y^2 - 5y + 3 \\ &= 5 \left(x^2 - x + \frac{1}{4} \right) + 5 \left(y^2 - y + \frac{1}{4} \right) - \frac{10}{4} + 3 = 5 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + 5 \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } P = \frac{x + 2y^2 + 2^3}{5x^2 + y^2 - 5x + y + 3} \leq \frac{1 + 2^3}{\frac{1}{2}} = 54$$

$$\text{Ta có } P = 54 \text{ khi } \begin{cases} 4x^3 + 8y^6 = 1 \\ x = 2y^2 \\ x = y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

Vậy Giá trị lớn nhất của biểu thức là $P_{\max} = 54$, đạt được khi $x = y = \frac{1}{2}$

Câu 65: Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = xyz$.

Chứng minh rằng : $\sqrt{x + yz} + \sqrt{y + xz} + \sqrt{z + xy} \geq \sqrt{xyz} + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

Trường THPT Lạc Long Quân – Khánh Hoà – Lần 2

Lời giải tham khảo

Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z} \Rightarrow a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ac} + \sqrt{c+ab} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac} + 1$$

Thật vậy,

$$\sqrt{a+bc} = \sqrt{a(a+b+c)+bc} = \sqrt{a^2+a(b+c)+bc} \geq$$

$$\sqrt{a^2+2a\sqrt{bc}+bc}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a+bc} \geq \sqrt{(a+\sqrt{bc})^2} = a + \sqrt{bc}$$

$$\text{Tương tự, } \sqrt{b+ac} \geq b + \sqrt{ac},$$

$$\sqrt{c+ab} \geq c + \sqrt{ab}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được:

$$\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ac} + \sqrt{c+ab} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac} + a + b + c$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ac} + \sqrt{c+ab} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac} + 1 \Rightarrow \text{đpcm}$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = y = z = 3$$

Câu 66: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn $2c + b = abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{3}{b+c-a} + \frac{4}{a+c-b} + \frac{5}{a+b-c}$

Trường THPT Lam Kinh – Lần 1

Lời giải tham khảo

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}, x > 0, y > 0$.

$$S = \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+c-b} + 2\left(\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+b-c}\right) + 3\left(\frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{a+b-c}\right)$$

suy ra $S \geq \frac{2}{c} + \frac{4}{b} + \frac{6}{a}$.

Từ giả thiết ta có $\frac{1}{c} + \frac{2}{b} = a$, nên $\frac{2}{c} + \frac{4}{b} + \frac{6}{a} = 2\left(\frac{1}{c} + \frac{2}{b} + \frac{3}{a}\right) = 2\left(a + \frac{3}{a}\right) \geq 4\sqrt{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của S bằng $4\sqrt{3}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \sqrt{3}$.

Câu 67: Cho x, y, z là các số thực thuộc đoạn $[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x)$

Trường THPT Lê Lợi – Thanh Hoá – Lần 1

Lời giải tham khảo

Đặt $f(x) = 2x^3 - yx^2 - z^2x + 2(y^3 + z^3) - y^2z$. Ta có:

$$f'(x) = 6x^2 - 2yx - z^2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 = \frac{1}{6}(y - \sqrt{y^2 + 6z^2}); x = x_2 = \frac{1}{6}(y + \sqrt{y^2 + 6z^2})$$

Nhận xét: $x_1 \notin (0;1)$, lập bảng biến thiên ta thấy khi $x_2 \in (0;1)$ hay $x_2 \notin (0;1)$ thì $\max_{x \in [0;1]} f(x) = \max \{f(0); f(1)\}$.

$$\text{Mà } f(0) = 2(y^3 + z^3) - y^2z \leq 2(y^3 + z^3) - y^2z + (2 - y - z^2) = f(1)$$

$$\Rightarrow f(x) \leq f(1) = 2y^3 - zy^2 - y + 2z^3 - z^2 + 2 \quad (1)$$

$$\text{Lại đặt } g(y) = 2y^3 - zy^2 - y + 2z^3 - z^2 + 2,$$

$$g'(y) = 6y^2 - 2zy - 1; g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = y_1 = \frac{1}{6}(z - \sqrt{z^2 + 6}); y = y_2 = \frac{1}{6}(z + \sqrt{z^2 + 6})$$

Nhận xét tương tự suy ra $\max_{y \in [0;1]} g(y) = \max \{g(0); g(1)\}$.

$$\text{Lại có } g(0) = 2z^3 + 2 - z^2 \leq 2z^3 + 2 - z^2 + (1 - z) = g(1). \text{ Suy ra}$$

$$g(y) \leq g(1) = 2z^3 + 2 - z^2 + (1 - z) = 2z^3 - z^2 - z + 3 \quad (2)$$

$$\text{Cuối cùng đặt } h(z) = 2z^3 - z^2 - z + 3 \text{ với } z \in [0;1], h'(z) = 6z^2 - 2z - 1.$$

$$h'(z) = 0 \Leftrightarrow z_1 = \frac{1 - \sqrt{7}}{6}; z_2 = \frac{1 + \sqrt{7}}{6}. \text{ Lập bảng biến thiên suy ra: } \max_{z \in [0;1]} h(z) = h(1) = 3 \quad (3)$$

Dấu bằng xảy ra ở (1), (2), (3) khi $x = y = z = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3 đạt được khi $x = y = z = 1$.

Câu 68: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x > 2, y > 1, z > 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2(2x + y - 3)}} - \frac{1}{y(x-1)(z+1)}.$$

Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Khánh Hoà – Lần 1

Lời giải tham khảo

Đặt $a = x - 2, b = y - 1, c = z \Rightarrow a, b, c > 0$. Khi đó:

$$P = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 1}} - \frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)}. \text{ Ta có:}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(c+1)^2}{2} \geq \frac{1}{4}(a+b+c+1)^2$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1$. Mặt khác

$$(a+1)(b+1)(c+1) \leq \frac{(a+b+c+3)^3}{27}. \text{ Khi đó :}$$

$$P \leq \frac{1}{a+b+c+1} - \frac{27}{(a+b+c+3)^3}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } a=b=c=1.$$

Đặt $t = a+b+c+1 \Rightarrow t > 1$. Khi đó $P \leq \frac{1}{t} - \frac{27}{(t+2)^3} = f(t), t > 1$. Ta có :

$$f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{81}{(t+2)^4}, t > 1;$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow (t+2)^4 = 81t^2 \Leftrightarrow (t+2)^2 = 9t (t > 1) \\ \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 4 (t > 1)$$

Lập bảng biến thiên hàm f trên khoảng $(1; +\infty)$. Ta có f có giá trị lớn nhất bằng $f(4) = \frac{1}{8}$.

$$\text{Vậy } \max P = f(4) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c=1 \\ a+b+c+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$$

Câu 69: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x+y)(y+z)(z+x) - \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z}$

Trường THPT Lương Thế Vinh – Lần 1

Lời giải tham khảo

Áp dụng BĐT Cosi: $x^3 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} \geq 4x$ hay $x^3 + 3\sqrt[3]{x} \geq 4x$

Tương tự: $y^3 + 3\sqrt[3]{y} \geq 4y; z^3 + 3\sqrt[3]{z} \geq 4z$

Cộng từng vế BDT ta được $x^3 + y^3 + z^3 + 3(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}) \geq 4(x+y+z) = 12, (1)$

Ta có: $x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)^3 - 3(x+y)(y+z)(z+x)$

Thay vào (1) ta được: $27 - 3(x+y)(y+z)(z+x) + 3(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}) \geq 12$

Suy ra: $P \leq 5$. Đẳng thức xảy ra khi: $x=y=z=1$

Câu 70: Cho các số thực dương x, y, z . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{9}{7x+y+4\sqrt{xy}+18\sqrt[3]{xyz}} + \frac{1}{2}(x+y+z)^2 + 2$$

Lời giải tham khảo

Ta có: $4\sqrt{xy} = 2\sqrt{x \cdot 4y} \leq x + 4y$; $18\sqrt[3]{xyz} = 3\sqrt[3]{x \cdot 4y \cdot 9z} \leq x + 4y + 9z$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 4y = 9z$

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{1}{x+y+z} + \frac{1}{2}(x+y+z)^2 + 2$$

Đặt $t = x + y + z, (t > 0)$, xét hàm số $f(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{t} + 2 \quad (t > 0)$

Lập bảng biến thiên tìm được $\min f(t) = \frac{7}{2} \Leftrightarrow t = 1$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x = \frac{36}{49}; y = \frac{9}{49}; z = \frac{4}{49}$$

Câu 71: Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn: $x + y + z \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^2}{yz + \sqrt{8+x^3}} + \frac{y^2}{zx + \sqrt{8+y^3}} + \frac{z^2}{xy + \sqrt{8+z^3}}.$$

Trường THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có BĐT: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ (*) với $a, b, c, x, y, z > 0$ và chứng minh.

(Học sinh không chứng minh (*) trừ 0.25)

$$\text{Áp dụng (*) ta có: } P \geq \frac{(x+y+z)^2}{xy + yz + zx + \sqrt{8+x^3} + \sqrt{8+y^3} + \sqrt{8+z^3}}$$

$$\text{Ta có: } \sqrt{8+x^3} = \sqrt{(2+x)(4-2x+x^2)} \leq \frac{2+x+4-2x+x^2}{2} = \frac{6-x+x^2}{2}$$

$$\sqrt{8+y^3} = \sqrt{(2+y)(4-2y+y^2)} \leq \frac{2+y+4-2y+y^2}{2} = \frac{6-y+y^2}{2}$$

$$\sqrt{8+z^3} = \sqrt{(2+z)(4-2z+z^2)} \leq \frac{2+z+4-2z+z^2}{2} = \frac{6-z+z^2}{2}$$

$$\text{Suy ra: } P \geq \frac{2(x+y+z)^2}{2xy + 2yz + 2zx + 18 - (x+y+z) + x^2 + y^2 + z^2}$$

$$= \frac{2(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2 - (x+y+z) + 18}$$

Đặt $t = x + y + z$ ($t \geq 3$). Khi đó: $P \geq \frac{2t^2}{t^2 - t + 18}$ Xét hàm số: $f(t) = \frac{2t^2}{t^2 - t + 18}$ với $t \geq 3$.

$$f'(t) = \frac{2(-t^2 + 36t)}{(t^2 - t + 18)^2} \text{ Ta có: } f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 36$$

BBT:

x	3	36	$+\infty$
y'	+	0	-
y	$\nearrow$ 3/4	$\rightarrow$ 144/71	$\searrow$ 2

Từ BBT ta có: GTNN của P là: $\frac{3}{4}$ khi $t = 3$.

Vậy GTNN của P là: $\frac{3}{4}$ khi $x = y = z = 1$.

Câu 72: Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 2(a + b + c) - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

Trường THPT Lý Thường Kiệt – Bình Thuận – Lần 1

Lời giải tham khảo

Xét hàm số $f(x) = 2x - \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}; x \in (-\sqrt{3}; 0)$

$$f(x) = -x - \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{2} + 3x - \frac{1}{2} \geq 2 + \frac{3}{2}(x+1)^2 - 2 \geq 0 \Rightarrow 2x - \frac{1}{x} \geq \frac{1}{2} - \frac{3x^2}{2}; \forall x \in (-\sqrt{3}; 0)$$

$$\text{Nên } 2a - \frac{1}{a} \geq \frac{1}{2} - \frac{3a^2}{2}; 2b - \frac{1}{b} \geq \frac{1}{2} - \frac{3b^2}{2}; 2c - \frac{1}{c} \geq \frac{1}{2} - \frac{3c^2}{2}$$

$$\Rightarrow A = 2(a + b + c) - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \frac{3}{2} - \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \geq -3$$

Vậy: $\min A = -3$ khi $a = b = c = -1$

Câu 73: Cho x, y, z là ba số dương thỏa mãn: $\frac{2}{3x+2y+z+1} + \frac{2}{3x+2z+y+1} = (x+y)(x+z)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{2(x+3)^2 + y^2 + z^2 - 16}{2x^2 + y^2 + z^2}$.

Trường THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh – Lần 2

Lời giải tham khảo

Ta có: $(x+y)(x+z) \leq \frac{(x+y+x+z)^2}{4} = \frac{(2x+y+z)^2}{4}$

$$2 \left(\frac{1}{3x+2y+z+1} + \frac{1}{3x+2z+y+1} \right) \geq \frac{8}{3(2x+y+z)+2}$$

Từ giả thiết suy ra: $\frac{8}{3(2x+y+z)+2} \leq \frac{(2x+y+z)^2}{4}$

Đặt: $2x+y+z=t$ ($t>0$) $\Rightarrow \frac{8}{3t+2} \leq \frac{t^2}{4} \Leftrightarrow (t-2)(3t^2+8t+16) \geq 0$

$$\Leftrightarrow t \geq 2 \Rightarrow 2x+y+z \geq 2$$

Mà: $4 \leq (2x+y+z)^2 \leq (2^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \geq \frac{2}{3}$.

Ta có: $P = \frac{2x^2+y^2+z^2+12x+2}{2x^2+y^2+z^2} = 1 + \frac{12x+2}{x^2+x^2+y^2+z^2} \leq 1 + \frac{12x+2}{x^2+\frac{2}{3}} = 1 + \frac{36x+6}{3x^2+2}$

Xét hàm số: $f(x) = 1 + \frac{36x+6}{3x^2+2}$ với $x > 0$.

Ta có: $f'(x) = \frac{-36(3x^2+x-2)}{(3x^2+2)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (loại)} \\ x = \frac{2}{3} \Rightarrow f\left(\frac{2}{3}\right) = 10 \end{cases}$

Lập BBT Suy ra: $f(x) \leq 10 \Rightarrow P \leq 10$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 10. Dấu “=” xảy ra khi: $x = \frac{2}{3}, y = z = \frac{1}{3}$.

Câu 74: Cho a, b, c là 3 số thực dương và thỏa $21ab+2bc+8ca \leq 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$.

Trường THPT Marie Curie - Hà Nội– Lần 1

Lời giải tham khảo

• Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c} \Rightarrow x, y, z > 0, 2x+8y+21z \leq 12xyz$ và $S = x+2y+3z$.

• $2x+8y+21z \leq 12xyz \Rightarrow z(12xy-21) \geq 2x+8y \Rightarrow \begin{cases} z \geq \frac{2x+8y}{12xy-21} \\ 12xy-21 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z \geq \frac{2x+8y}{12xy-21} \\ x > \frac{7}{4y} \end{cases}$

• Ta có: $S \geq x+2y+\frac{2x+8y}{4xy-7}$.

• Xét hàm số $f(x) = x+2y+\frac{2x+8y}{4xy-7}$ trên $\left(\frac{7}{4y}; +\infty\right)$

$$f'(x) = 1 - \frac{14+32y^2}{(4xy-7)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4y} + \frac{\sqrt{32y^2+14}}{4y} \in \left(\frac{7}{4y}; +\infty\right)$$

• Lập bảng biến thiên cho hàm số $y = f(x)$ ta có:

$$S \geq f(x) \geq f\left(\frac{7}{4y} + \frac{\sqrt{32y^2+14}}{4y}\right) = 2y + \frac{9}{4y} + \frac{\sqrt{32y^2+14}}{4y}$$

• Xét hàm số $g(y) = 2y + \frac{9}{4y} + \frac{\sqrt{32y^2+14}}{4y}$ trên $(0; +\infty)$

$$g'(y) = \frac{(8y^2-9)\sqrt{32y^2+14}-28}{4y^2\sqrt{32y^2+14}} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5}{4} \in (0; +\infty)$$

• Lập bảng biến thiên cho hàm số $z = g(y)$ ta có: $S \geq g(y) \geq g\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{15}{2}$

• Vậy $\min S = \frac{15}{2}$ khi $a = \frac{1}{3}, b = \frac{4}{5}, c = \frac{3}{2}$.

Câu 75: Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x+y = 26\sqrt{x-3} + 3\sqrt{y-2013} + 2016$

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $M = (x-1)^2 + (y-1)^2 + \frac{2016+2xy\sqrt{x+y+1}}{\sqrt{x+y+1}}$.

Trường THPT Minh Châu – Hưng Yên – Lần 3

Lời giải tham khảo

$$M = x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 2 + \frac{2016}{\sqrt{x+y+1}} = (x+y+1)^2 - 4(x+y+1) + 5 + \frac{2016}{\sqrt{x+y+1}}$$

Đặt $t = \sqrt{x+y+1}$ thì ta được $M = t^4 - 4t^2 + 5 + \frac{2016}{t}$

Điều kiện của t:

Đặt $a = \sqrt{x-3}; b = \sqrt{y-2013}$ ta được $x = a^2 + 3; y = b^2 + 2013$ và

$$a^2 + 3 + b^2 + 2013 = 26a + 3b + 2016 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 26a + 3b \leq \sqrt{(26^2 + 3^2)(a^2 + b^2)}$$

Hay $0 \leq a^2 + b^2 \leq \sqrt{685}$

Từ đó ta được $x+y+1 = a^2 + b^2 + 2017 \in [2017; 2072]$ nên $t \in D = [\sqrt{2017}; \sqrt{2072}]$

Xét hàm số $f(t) = t^4 - 4t^2 + 5 + \frac{2016}{t}; t \in D$

$$f'(t) = 4t^3 - 8t - \frac{2016}{t^2} = \frac{4t^5 - 8t^4 - 2016}{t^2} = \frac{4t^4(t-2) - 2016}{t^2} > 0 \forall t \in [\sqrt{2017}; \sqrt{2072}]$$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên D

$$\max M = f(\sqrt{2072}) = 4284901 + \frac{36}{37} \text{ khi } t = \sqrt{2072} \text{ ta được } \begin{cases} a^2 + b^2 = 685 \\ \frac{a}{26} = \frac{b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 26 \\ b = 3 \end{cases} \text{ hay}$$

$x = 679; y = 2022$

$$\min M = f(\sqrt{2017}) = 4060226 + \frac{2016}{2017} \text{ khi } t = \sqrt{2017} \text{ hay } x = 3; y = 2013$$

Câu 76: Cho ba số thực dương $x; y; z$ thỏa mãn: $xyz = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{\log_3^2 x + 1} + \sqrt{\log_3^2 y + 1} + \sqrt{\log_3^2 z + 1}$$

Trường THPT Nam Duyên Hà – Thái Bình– Lần 1

Lời giải tham khảo

Trong mp(Oxy), gọi $\vec{a} = (\log_3 x, 1), \vec{b} = (\log_3 y, 1), \vec{c} = (\log_3 z, 1)$

$$\text{và } \vec{n} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \Rightarrow \vec{n} = (1; 3)$$

Ta có: $|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| \geq |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| \Rightarrow \sqrt{\log_3^2 x + 1} + \sqrt{\log_3^2 y + 1} + \sqrt{\log_3^2 z + 1} \geq \sqrt{1^2 + 3^2}$

$\Rightarrow P \geq \sqrt{10}$, dấu = xảy ra khi ba vecto $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng hướng và kết hợp điều kiện đề bài ta được $x = y = z = \sqrt[3]{3}$

Vậy $\min P = \sqrt{10}$ khi $x = y = z = \sqrt[3]{3}$

Câu 77: Cho các số x, y, z thỏa mãn $0 < x \leq y \leq z$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = xy^2 + yz^2 + zx^2 - xyz - \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{6}.$$

Trường THPT Thanh Chương 3 – Thanh Hoá – Lần 1

Lời giải tham khảo

Vì $0 < x \leq y \leq z$

nên

$$x(x-y)(y-z) \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - xy)(y-z) \geq 0 \Leftrightarrow x^2y - x^2z - xy^2 + xyz \geq 0 \Leftrightarrow x^2y + xyz \geq x^2z + xy^2$$

$$xy^2 + yz^2 + zx^2 - xyz = (x^2z + xy^2) + yz^2 - xyz \leq (x^2y + xyz) + yz^2 - xyz = y(x^2 + z^2)$$

Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$\begin{aligned} y(x^2 + z^2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2y^2(x^2 + z^2)(x^2 + z^2)} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{2y^2 + (x^2 + z^2) + (x^2 + z^2)}{3} \right)^3} = 2 \sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \right)^3} \end{aligned}$$

Do đó

$$P = xy^2 + yz^2 + zx^2 - xyz - \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{6} \leq 2 \sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \right)^3} - \frac{3}{2} \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \right)^2$$

Đặt $t = \sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \right)}$ ($t > 0$). Ta có $P \leq f(t) = 2t^3 - \frac{3}{2}t^4$.

$f'(t) = 6t^2 - 6t^3 = 6t^2(1-t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Lập bảng biến thiên của hàm $f(t)$ suy ra được

$$f(t) \leq f(1) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow P \leq \frac{1}{2}.$$

Ta thấy $P = \frac{1}{2}$ khi $x = y = z = 1$. Vậy giá trị lớn nhất cần tìm là $\max P = \frac{1}{2}$ khi $x = y = z = 1$.

Câu 78: Cho $x, y, z > 0$. Tìm GTNN của biểu thức : $P = \frac{3x}{y+z} + \frac{4y}{z+x} + \frac{5z}{x+y}$.

Trường Cao Đẳng Nghề Nha Trang – Lần 2

Lời giải tham khảo

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{3x}{y+z} + 3 \right) + \left(\frac{4y}{z+x} + 4 \right) + \left(\frac{5z}{x+y} + 5 \right) - 12 \\ &= (x+y+z) \left(\frac{3}{y+z} + \frac{4}{z+x} + \frac{5}{x+y} \right) - 12 \\ &= \frac{1}{2} \left((\sqrt{x+y})^2 + (\sqrt{y+x})^2 + (\sqrt{z+x})^2 \right) \left[\left(\sqrt{\frac{3}{y+z}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{4}{z+x}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{x+y}} \right)^2 \right] - 12 \\ &\geq \frac{1}{2} (\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5})^2 - 12 \\ \text{Min} P &= \frac{1}{2} (\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5})^2 - 12 \Leftrightarrow \frac{y+z}{\sqrt{3}} = \frac{z+x}{2} = \frac{x+y}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Câu 79: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa: $x + y + z = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$M = 8 \left(\frac{x^2}{(y+z)^2 + 5yz} + \frac{y^2}{(x+z)^2 + 5xz} \right) - \frac{3}{2} (x+y)^2$$

Trường Trung cấp Nghề Ninh Hoà – Lần 1

Lời giải tham khảo

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho y, z và x, z :

$$\frac{x^2}{(y+z)^2 + 5yz} \geq \frac{x^2}{(y+z)^2 + \frac{5}{4}(y+z)^2} = \frac{4}{9} \cdot \frac{x^2}{(y+z)^2}$$

$$\frac{y^2}{(x+z)^2 + 5xz} \geq \frac{y^2}{(x+z)^2 + \frac{5}{4}(x+z)^2} = \frac{4}{9} \cdot \frac{y^2}{(x+z)^2}$$

Dấu “=” khi $y = z = x$. Khi đó :

$$\frac{x^2}{(y+z)^2 + 5yz} + \frac{y^2}{(x+z)^2 + 5xz} \geq \frac{4}{9} \cdot \left[\frac{x^2}{(y+z)^2} + \frac{y^2}{(x+z)^2} \right]$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz:

$$\frac{2}{9} \cdot \left[\frac{x^2}{(y+z)^2} + \frac{y^2}{(x+z)^2} \right] (1^2 + 1^2) \geq \frac{2}{9} \left[\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} \right]^2$$

Mà

$$\begin{aligned} \frac{2}{9} \left[\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} \right]^2 &= \frac{2}{9} \left[\frac{(x^2 + y^2) + z(x+y)}{xy + z(x+y) + z^2} \right]^2 \\ &\geq \frac{2}{9} \left[\frac{\frac{(x+y)^2}{2} + z(x+y)}{\frac{(x+y)^2}{4} + z(x+y) + z^2} \right]^2 = \frac{2}{9} \left[\frac{2(x+y)^2 + 4z(x+y)}{(x+y)^2 + 4z(x+y) + 4z^2} \right]^2 \end{aligned}$$

Do $x + y + z = 2 \Rightarrow x + y = 2 - z$ nên

$$\begin{aligned} M &\geq \frac{16}{9} \left[\frac{2(2-z)^2 + 4z(2-z)}{(2-z)^2 + 4z(2-z) + 4z^2} \right]^2 - \frac{3}{2}(2-z)^2 \\ \Leftrightarrow M &\geq \frac{64}{9} \left(\frac{z-2}{z+2} \right)^2 - \frac{3}{2}(z-2)^2 \end{aligned}$$

Do $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow z \in (0; 2)$. Xét hàm số: $F(z) = \frac{64}{9} \left(\frac{z-2}{z+2} \right)^2 - \frac{3}{2}(z-2)^2$ trên $(0; 2)$ có:

$$\begin{aligned} F'(z) &= \frac{128}{9} \left(\frac{z-2}{z+2} \right) \frac{4}{(z+2)^2} - 3(z-2) \\ &= (z-2) \left[\frac{512}{9} \cdot \frac{1}{(z+2)^3} - 3 \right] = \frac{(z-2)}{9(z+2)^3} [512 - 27(z+2)^3] \end{aligned}$$

Trên $(0; 2)$, $F'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{2}{3}$. Ta lập bảng biến thiên:

z	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	2	$+\infty$
F'(z)		-	0	+	
F(z)					

Từ bảng biến thiên suy ra $M \geq F(z) \geq -\frac{8}{9}$. Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = \frac{2}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\min M = -\frac{8}{9}$ khi $x = y = z = \frac{2}{3}$

Câu 80: Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2 + y^2}{z^2} + \frac{2z}{x + y}$

Trường Trung Cấp Nghề Ninh Hoà – Lần 2

Lời giải tham khảo

Từ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$ suy ra $2xy = (x + y)z \Leftrightarrow \frac{2xy}{z^2} = \frac{x + y}{z}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho x, y ta lại có:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x + y}{xy} \geq \frac{4(x + y)}{(x + y)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{z} \geq \frac{4}{(x + y)}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y$. Suy ra $\frac{x + y}{z} \geq 2$ (*)

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } P &= \frac{x^2 + y^2}{z^2} + \frac{2z}{x + y} = \left[\frac{x + y}{z} \right]^2 - \frac{2xy}{z^2} + \frac{2z}{x + y} \\ &= \left[\frac{x + y}{z} \right]^2 - \frac{x + y}{z} + \frac{2z}{x + y} \end{aligned}$$

Đặt $t = \frac{x + y}{z}$, từ (*) ta có $t \geq 2$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - t + \frac{2}{t}$, $t \geq 2$

Ta có: $f'(t) = \frac{2t^3 - t^2 - 2}{t^2} > 0, \forall t \geq 2$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[2; +\infty)$ nên $f(t) \geq f(2) = 3, \forall t \geq 2$

Dấu “=” xảy ra khi $t = 2 \Leftrightarrow x + y = 2z$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\min P = 3$ khi $x = y = z$

Câu 81: Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{3}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức: $P = 8xyz + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}$

Trường THPT Ngô Sỹ Liên – Bắc Giang – Lần 2

Lời giải tham khảo

• Ta có: $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{x^2y^2z^2}}$, đặt $t = \sqrt[3]{xyz} > 0$

Mà $\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < t \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow P \geq 8t^3 + \frac{3}{t^2}$. Xét hàm số $f(t) = 8t^3 + \frac{3}{t^2}$

Ta có $\forall t \neq 0, f'(t) = 24t^2 - \frac{6}{t^3}, f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[5]{\frac{1}{4}}$

• Lập bảng xét dấu ta có: $f(t) \geq 13$ với mọi giá trị t thỏa mãn $0 < t \leq \frac{1}{2}$

Suy ra $P \geq 13$. Dấu bằng xảy ra khi $t = \frac{1}{2}$ hay $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Kết luận.

Câu 82: Cho $x > 0, y > 0$ thỏa mãn $x^2y + xy^2 = x + y + 3xy$. Tìm GTNN của biểu thức

$P = x^2 + y^2 + \frac{(1 + 2xy)^2 - 3}{2xy}$.

Trường THPT Nguyễn Trí Thanh – Lần 1

Lời giải tham khảo

+ Ta có

$x^2y + xy^2 = x + y + 3xy \Leftrightarrow xy(x + y) = x + y + 3xy \quad (1)$

do $x > 0; y > 0$ nên $x + y > 0$

$\Rightarrow x + y = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 3 \geq \frac{4}{x + y} + 3 \Rightarrow (x + y)^2 - 3(x + y) - 4 \geq 0$
(1)

$\Rightarrow [(x + y) + 1][(x + y) - 4] \geq 0 \Rightarrow x + y \geq 4$

$\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{xy} + \frac{3}{x + y} \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{x + y} = \frac{1}{xy}$
(1)

$$\text{Nên } P = (x+y)^2 + 2 - \frac{1}{xy} = (x+y)^2 + 1 + \frac{3}{x+y}$$

$$+ \text{Đặt } x+y=t \ (t \geq 4) \Rightarrow P = t^2 + \frac{3}{t} + 1 = f(t)$$

$$+ \text{Ta có } f'(t) = 2t - \frac{3}{t^2} = \frac{2t^3 - 3}{t^2} > 0 \forall t > 4. \text{ Nên } f(t) \text{ đồng biến trên nửa khoảng } [4; +\infty) \Rightarrow$$

$$P = f(t) \geq f(4) = \frac{71}{4}$$

Hay giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{71}{4}$ khi $x=y=2$

Câu 83: Cho ba số thực dương x, y, z thuộc đoạn $[1; 4]$ và thỏa mãn $x+y+z=6$. Tìm giá trị nhỏ

$$\text{nhất của biểu thức: } T = \frac{z}{8(x^2+y^2)} + \frac{x^2+y^2-1}{xyz}.$$

Trường THPT Hàn Thuyên – Bắc Ninh – Lần 2

Lời giải tham khảo

$$\frac{x^2+y^2}{xy} \geq 2, (x-1)(y-1) = xy - x - y + 1 \geq 0 \Rightarrow xy \geq 5 - z \Rightarrow -\frac{1}{xyz} \geq \frac{-1}{(5-z)z}$$

$$x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy \leq z^2 - 10z + 26$$

$$\text{ĐS: } T = \frac{1}{2}, x=y=1; z=4$$

Câu 84: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z \leq \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{z(xy+1)^2}{y^2(yz+1)} + \frac{x(yz+1)^2}{z^2(zx+1)} + \frac{y(zx+1)^2}{x^2(xy+1)}.$$

Trường THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu - Lần 2

Lời giải tham khảo

♥ Biến đổi biểu thức P , ta có:
$$P = \frac{\left(x + \frac{1}{y}\right)^2}{y + \frac{1}{z}} + \frac{\left(y + \frac{1}{z}\right)^2}{z + \frac{1}{x}} + \frac{\left(z + \frac{1}{x}\right)^2}{x + \frac{1}{y}}$$

♥ Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a+b+c \quad (a, b, c > 0) \quad (1)$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{a^2}{b} + b \geq 2a, \frac{b^2}{c} + c \geq 2b, \frac{c^2}{a} + a \geq 2c \Rightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c.$$

Sử dụng (1) ta suy ra: $P \geq \left(x + \frac{1}{y}\right) + \left(y + \frac{1}{z}\right) + \left(z + \frac{1}{x}\right) = x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = Q$

♥ Tiếp tục đánh giá Q , ta có: $Q \geq 3\sqrt[3]{xyz} + \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}$

Đặt $t = \sqrt[3]{xyz}$, ta có: $0 < t = \sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3} \leq \frac{1}{2}$

♥ Khi đó: $Q \geq 3t + \frac{3}{t} = 12t + \frac{3}{t} - 9t \geq 2\sqrt{36} - \frac{9}{2} = \frac{15}{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{2}$

Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{15}{2}$, đạt khi $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Câu 85: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $0 \leq a < b \leq c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2a^2 + b^2 + c^2}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)} + \frac{a + b + c}{(a + b)c} + 20(a + b + c).$$

Trường THPT Nguyễn Siêu – Hưng Yên – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{a^2 + c^2} + \frac{1}{a + b} + \frac{1}{c} + 20(a + b + c)$

Vì $0 \leq a < b \leq c$ nên $a^2 + b^2 \leq ab + b^2 \leq \left(\frac{a}{2} + b\right)^2$ dấu bằng xảy ra khi $a=0$

Tương tự $a^2 + c^2 \leq \left(\frac{a}{2} + c\right)^2$ dấu bằng xảy ra khi $a=0$

Do đó $P \geq \frac{1}{\left(\frac{a}{2} + b\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2} + c\right)^2} + \frac{1}{a + b} + \frac{1}{c} + 20(a + b + c)$ dấu bằng xảy ra khi $a=0$

Áp dụng các bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{8}{(x+y)^2} \text{ Dấu bằng xảy ra khi } x=y \text{ (phải chứng minh)}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \text{ Dấu bằng xảy ra khi } x=y$$

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{8}{(a+b+c)^2} + \frac{4}{a+b+c} + 20(a+b+c)$$

Đặt $t=a+b+c$ với $t>0$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{8}{t^2} + \frac{4}{t} + 20t, \quad t > 0$$

$$\text{Ta có } f'(t) = -8\frac{2t}{t^4} - \frac{4}{t^2} + 20 = \frac{20t^3 - 4t - 16}{t^3}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 20t^3 - 4t - 16 = (t-1)(20t^2 + 20t + 16) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Bảng biến thiên

T	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$+\infty$ ↘ 32		↗ $+\infty$

$$\text{Suy ra } P \geq 32 \text{ dấu bằng đạt được khi } \begin{cases} a=0, b=c \\ a+b=c \\ t=a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=c=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 32.

Câu 86: Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa điều kiện $4(xz + y) \geq y^2 + 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{8}(\sqrt{2x^2 + 2z^2} + y)^2 + \frac{(y-z)(2x+4y)+2}{(x+y+z)^2}$

Trường THPT Nguyễn Trãi - KonTum – Lần 1

Lời giải tham khảo

$$\begin{aligned} * \text{ Ta có: } 4(xz + y) \geq y^2 + 4 &\Rightarrow 4xz \geq (2-y)^2 \Rightarrow 2\sqrt{xz} \geq |2-y| \geq 2-y \\ &\Rightarrow 2 \leq 2\sqrt{xz} + y \leq x + y + z. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 * P &= \frac{1}{8} \left(\sqrt{2x^2 + 2z^2} + y \right)^2 + \frac{(y-z)(2x+4y)+2}{(x+y+z)^2} + 1 - 1 \\
 &= \frac{1}{8} \left(\sqrt{2x^2 + 2z^2} + y \right)^2 + \frac{(x+2y)^2}{(x+y+z)^2} + \frac{(z-y)^2}{(x+y+z)^2} + \frac{2}{(x+y+z)^2} - 1
 \end{aligned}$$

Vi: $\sqrt{2x^2 + 2z^2} \geq x + z, \forall x, z \geq 0$ (dấu "=" xảy ra khi $x = z$)

nên: $\frac{1}{8} \left(\sqrt{2x^2 + 2z^2} + y \right)^2 \geq \frac{1}{8} (x+y+z)^2 = 2 \left(\frac{x+y+z}{4} \right)^2$

$$P \geq 2 \left(\frac{x+y+z}{4} \right)^2 + \frac{(x+2y)^2}{(x+y+z)^2} + \frac{(z-y)^2}{(x+y+z)^2} + \frac{2}{(x+y+z)^2} - 1 \quad (2)$$

* Ta có: $(a-b)^2 + (a-c)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b+c), \forall a, b, c \quad (3)$

(Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$)

Áp dụng (3), từ (2) ta có :

$$P \geq 2 \cdot \frac{x+y+z}{4} \cdot \frac{x+y+z}{x+y+z} + \frac{2}{(x+y+z)^2} - 1 = \frac{x+y+z}{2} + \frac{2}{(x+y+z)^2} - 1$$

* Đặt $t = x+y+z, t \geq 2$ (từ (1))

Xét hàm số: $f(t) = \frac{1}{2}t + \frac{2}{t^2} - 1, \quad t \geq 2$

Ta có: $f'(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{t^3} = \frac{t^3 - 8}{2t^3} \geq 0, \forall t \geq 2$

$\Rightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[2; +\infty) \Rightarrow \min f(t) = f(2) = \frac{1}{2}$

Vậy $\min P = 1/2$, đạt được khi $x = z = 1$ và $y = 0$.

Câu 87: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $xy + x + y = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{3x}{y+1} + \frac{3y}{x+1} + \frac{xy}{x+y} - (x^2 + y^2)$$

Trường THPT – Nguyễn Viết Xuân – Phú Yên – Lần 1

Lời giải tham khảo

Đặt $t = x+y \Rightarrow xy = 3-t; x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = t^2 - 2(3-t) = t^2 + 2t - 6$

Ta có $xy \leq \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 \Rightarrow 3-t \leq \frac{1}{4}t^2 \Leftrightarrow t \geq 2$

$$\text{Suy ra } P = \frac{3(x^2 + y^2) + 3(x + y)}{xy + x + y + 1} + \frac{xy}{x + y} - (x^2 + y^2) = -t^2 + t + \frac{12}{t} - \frac{5}{2}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = -t^2 + t + \frac{12}{t} - \frac{5}{2} \text{ với } t \geq 2$$

$$\text{Ta có } f'(t) = -2t + 1 - \frac{2}{t^2} < 0, \forall t \geq 2. \text{ Suy ra hàm số } f(t) \text{ nghịch biến với } t \geq 2$$

$$\Rightarrow P \leq f(t) \leq f(2) = \frac{3}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{3}{2}$ khi $x = y = 1$.

Câu 88: Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = (x + y + z)^2 - \frac{x^3 + y^3 + z^3}{9xyz} + \frac{3}{xy + yz + zx}$

Trường THPT Nguyễn Văn Trỗi – Lần 1

Lời giải tham khảo

$$\text{Ta có: } (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 3 + 2(xy + yz + zx)$$

$$\text{lại có: } x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z) \left[x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx) \right] + 3xyz$$

$$= (x + y + z) \left[3 - (xy + yz + zx) \right] + 3xyz \text{ nên } \frac{x^3 + y^3 + z^3}{9xyz} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) \left[3 - (xy + yz + zx) \right]$$

$$\text{Mặt khác: } \begin{cases} xy + yz + zx \geq \sqrt[3]{x^2 \cdot y^2 \cdot z^2} \\ \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{x^2 \cdot y^2 \cdot z^2}} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \geq \frac{9}{xy + yz + zx}$$

$$\text{Suy ra: } P \leq 3 + 2(xy + yz + zx) - \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{xy + yz + zx} \right) \left[3 - (xy + yz + zx) \right] + \frac{3}{xy + yz + zx}$$

$$= \frac{11}{3} + 2(xy + yz + zx) \leq \frac{11}{3} + 2 \left(\frac{x^2 + y^2 + y^2 + z^2 + z^2 + x^2}{2} \right) = \frac{29}{3}$$

$$\text{Vậy: } P_{\max} = \frac{121}{60} \text{ đạt được khi: } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ xy = yz = zx \\ xy + yz + zx = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Câu 89: Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{4a+2b+4\sqrt{2bc}} - \frac{4}{8+a+2b+3c} + \frac{1}{4+b+2c}.$$

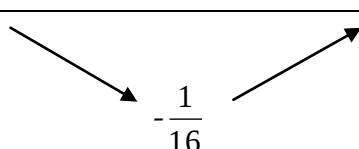
Trường THPT Như Xuân – Thanh Hoá - Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $2\sqrt{2bc} \leq b+2c \Rightarrow \frac{1}{4a+2b+4\sqrt{2bc}} \geq \frac{1}{4a+4b+4c}$ và $\frac{-4}{8+a+2b+3c} \geq \frac{-1}{4+a+b+c} + \frac{-1}{4+b+2c}$

Suy ra $P \geq \frac{1}{4(a+b+c)} + \frac{-1}{4+(a+c+b)}$, Đặt $t = a+b+c, t > 0$

xét $f(t) = \frac{1}{4t} + \frac{-1}{4+t}, \quad t > 0, \quad f'(t) = -\frac{1}{4t^2} + \frac{1}{(4+t)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4.$

t	0	4	$+\infty$
f'	-	0	+
f			

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{1}{16}$ khi $\begin{cases} b = 2c \\ a+b+c = b+2c \Leftrightarrow \begin{cases} a = c = 1 \\ b = 2 \end{cases} \\ a+b+c = 4 \end{cases}$

Câu 90: Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x+y+1=z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3}{x+yz} + \frac{y^3}{y+zx} + \frac{z^3}{z+xy} + \frac{14}{(z+1)\sqrt{(x+1)(y+1)}}$$

Trường THPT Phạm Văn Đồng – Phú Yên – Lần 1

Lời giải tham khảo

▪ Từ giả thiết $x+y+z=1$ ta có: $(x+1)(y+1) = z+xy \leq \frac{(x+y+2)^2}{4} = \frac{(z+1)^2}{4}$

Nên $P \geq \frac{x^3}{x+yz} + \frac{y^3}{y+zx} + \frac{4z^3+28}{(z+1)^2}$

▪ Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$\frac{x^3}{x+yz} + \frac{y^3}{y+zx} = \frac{x^4}{x^2+xyz} + \frac{y^4}{y^2+xyz} \geq \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2+2xyz} \geq \frac{x^2+y^2}{1+z} \geq \frac{(x+y)^2}{2(1+z)} = \frac{(z-1)^2}{2(1+z)}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{9z^3 - z^2 - z + 57}{2(z+1)^2} = f(z).$$

$$\text{Đặt } g(z) = 2f(z) \Rightarrow g'(z) = \frac{(3z-5)\left(3z^3 + \frac{51z^2}{3} + 37z + 23\right)}{(z+1)^4}$$

▪ Lập bảng biến thiên ta có: $f(z) \geq f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{53}{8}$

Vậy $\min P = \frac{53}{8}$ khi $(x; y; z) = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

Câu 91: Cho x là số thực thuộc đoạn $\left[-1; \frac{5}{4}\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{5-4x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{5-4x} + 2\sqrt{1+x} + 6}$$

Trường THPT Phan Bội Châu – Lần 2

Lời giải tham khảo

Đặt $a = \sqrt{5-4x}$, $b = \sqrt{1+x} \Rightarrow a^2 + 4b^2 = 9$ ($a, b \geq 0$)

$$\Rightarrow \exists \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] : a = 3\sin \alpha, \quad 2b = 3\cos \alpha$$

Khi đó: $P = \frac{a-b}{a+2b+6} = \frac{2\sin \alpha - \cos \alpha}{2\sin \alpha + 2\cos \alpha + 4}$

Xét hàm số $f(\alpha) = \frac{2\sin \alpha - \cos \alpha}{2\sin \alpha + 2\cos \alpha + 4}$ với $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$f'(\alpha) = \frac{4\sin \alpha + 8\cos \alpha - 2}{(2\sin \alpha + 2\cos \alpha + 4)^2} > 0 \quad \text{với } \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$f(x)$ đồng biến trên $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f(0) = -\frac{1}{6}; \quad \max_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

Vậy $\min P = -\frac{1}{6}$ khi $x = \frac{5}{4}$; $\max P = \frac{1}{3}$ khi $x = -1$

Câu 92: Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $2x+3y \leq 7$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2xy + y + \sqrt{5(x^2 + y^2)} - 24\sqrt[3]{8(x+y) - (x^2 + y^2 + 3)}$

Trường THPT Phan Thúc Trực – Nghệ An – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $6(x+1)(y+1) = (2x+2)(3y+3) \leq \left(\frac{2x+2+3y+3}{2}\right)^2 \leq 36 \Rightarrow x+y+xy \leq 5$.

Ta có $5(x^2 + y^2) \geq (2x+y)^2 \Rightarrow \sqrt{5(x^2 + y^2)} \geq 2x+y$ và

$$(x+y-3)^2 = x^2 + y^2 + 9 + 2xy - 6x - 6y \geq 0 \Leftrightarrow 2(x+y+xy+3) \geq 8(x+y) - (x^2 + y^2 + 3)$$

Suy ra $P \geq 2(xy+x+y) - 24\sqrt[3]{2(x+y+xy+3)}$

Đặt $t = x+y+xy$, $t \in (0; 5]$, $P \geq f(t) = 2t - 24\sqrt[3]{2t+6}$

Ta có $f'(t) = 2 - \frac{24 \cdot 2}{3\sqrt[3]{(2t+6)^2}} = 2 - \frac{16\sqrt[3]{(2t+6)^2} - 8}{\sqrt[3]{(2t+6)^2}} < 0, \forall t \in (0; 5]$

$\Rightarrow$ hàm số $f(t)$ nghịch biến trên nửa khoảng $(0; 5]$.

Suy ra $\min f(t) = f(5) = 10 - 48\sqrt[3]{2}$

Vậy $\min P = 10 - 48\sqrt[3]{2}$, khi $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Câu 93: Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng: $\frac{2a}{a+2} + \frac{3b}{b+3} + \frac{c}{c+1} \leq \frac{6(a+b+c)}{a+b+c+6}$

Trường THPT Phù Cừ - Hưng Yên – Lần 1

Lời giải tham khảo

Bất đẳng thức tương đương với

$$\left(\frac{a+2}{4} - \frac{2a}{a+2}\right) + \left(\frac{b+3}{4} - \frac{3b}{b+3}\right) + \left(\frac{c+1}{4} - \frac{c}{c+1}\right) \geq \frac{a+b+c+6}{4} - \frac{6(a+b+c)}{a+b+c+6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-2)^2}{4(a+2)} + \frac{(b-3)^2}{4(b+3)} + \frac{(c-1)^2}{4(c+1)} \geq \frac{(a+b+c-6)^2}{4(a+b+c+6)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-2)^2}{a+2} + \frac{(b-3)^2}{b+3} + \frac{(c-1)^2}{c+1} \geq \frac{(a+b+c-6)^2}{a+b+c+6} \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$VT(2) \geq \frac{[(a-2)+(b-3)+(c-1)]^2}{(a+2)+(b+3)+(c+1)} = \frac{(a+b+c-6)^2}{a+b+c+6} = VP(2)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=2; b=3; c=1$.

Vậy bất đẳng thức (2) đúng. Do đó bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Câu 94: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{4(x^4 + y^4)}{x^2 + y^2} - \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \text{ trong đó } a, b \text{ là hai số thực dương.}$$

Trường THPT Phú Riềng – Bình Phước – Lần 1

Lời giải tham khảo

$$\text{Ta có : } P \geq \frac{4(x^2 + y^2)^2}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} - (x^2 + y^2) + \frac{4}{x^2 + y^2} = x^2 + y^2 + \frac{4}{x^2 + y^2}$$

Xét hàm số $f(t) = t + \frac{4}{t}$, với $t = x^2 + y^2, t \in (0; +\infty)$.

$$\text{Ta có : } f(t) = t + \frac{4}{t}; f'(t) = 0 \Rightarrow t = \pm 2$$

Lập bảng biến thiên hàm số $f(t)$ trên khoảng $(0; +\infty)$, ta tìm được :

$$\min_{(0; +\infty)} f(t) = 4, \text{ đạt được khi } t=2.$$

Từ đó tìm được GTNN của biểu thức P bằng 4, đạt được khi $x=y=1$.

Câu 95: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x \geq y \geq z$ và $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + 3y$.

Trường THPT Phú Riềng – Bình Phước – Lần 2

Lời giải tham khảo

$$\text{Ta có } \frac{x}{z} + xz \geq 2x, \quad \frac{z}{y} + yz \geq 2z \quad .$$

$$\text{Từ đó suy ra } P = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + 3y \geq 2x - xz + 2z - yz + 3y$$

$$= 2(x+z) + y(x+y+z) - xz - yz = 2(x+z) + y^2 + x(y-z)$$

Do $x > 0$ và $y \geq z$ nên $x(y-z) \geq 0$. Từ đây kết hợp với trên ta được

$$P = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + 3y \geq 2(x+z) + y^2 = 2(3-y) + y^2 = (y-1)^2 + 5 \geq 5.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 5 đạt khi $x=y=z=1$

Câu 96: Cho các số thực a, b thỏa mãn $a, b \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^5b + ab^5 + \frac{6}{a^2 + b^2} - 3(a+b)$$

Trường THPT Phú Riềng – Bình Phước – Lần 3

Lời giải tham khảo

Do $a, b \leq 1$ nên $(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab \geq a+b-1 \geq 0$

$$\text{Suy ra: } a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \leq (a+b)^2 - 2(a+b-1)$$

$$\text{Mà } a^5b + ab^5 = ab(a^4 + b^4), a^4 + b^4 \geq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)^2 \geq \frac{1}{8}(a+b)^4$$

$$\text{Suy ra: } P \geq \frac{1}{8}(a+b-1)(a+b)^4 + \frac{6}{(a+b)^2 - 2(a+b-1)} - 3(a+b)$$

$$\text{Đặt } t = (a+b) \text{ thì } 1 \leq t \leq 2, \text{ xét hàm số } f(t) = \frac{1}{8}(t-1)t^4 + \frac{6}{(t-1)^2 + 1} - 3t$$

$$\text{Với } t \in [1; 2] \text{ có } f'(t) = \frac{1}{8}(5t^4 - 4t^3 - 24) - \frac{12(t-1)}{(t^2 - 2t + 2)^2} < 0 \forall t \in [1; 2]$$

Nên f(t) nghịch biến trên $[1; 2]$. Do đó: $f(t) \geq f(2) = -1$

Vậy $\min P = -1$ khi $a = b = 1$

Câu 97: Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn: $a + b + c = \frac{3}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt[3]{a+3b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b+3c}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c+3a}}$$

Trường THPT Phú Xuyên B – Lần 1

Lời giải tham khảo

áp dụng Bất đẳng thức Côsi cho ba số dương ta có

$$(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 3\sqrt[3]{xyz} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} = 9 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} \quad (*)$$

áp dụng (*) ta có:
$$P = \frac{1}{\sqrt[3]{a+3b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b+3c}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c+3a}} \geq \frac{9}{\sqrt[3]{a+3b} + \sqrt[3]{b+3c} + \sqrt[3]{c+3a}}$$

áp dụng Bất đẳng thức Côsi cho ba số dương ta có:

$$\sqrt[3]{(a+3b)1.1} \leq \frac{a+3b+1+1}{3} = \frac{1}{3}(a+3b+2)$$

$$\sqrt[3]{(b+3c)1.1} \leq \frac{b+3c+1+1}{3} = \frac{1}{3}(b+3c+2)$$

$$\sqrt[3]{(c+3a)1.1} \leq \frac{c+3a+1+1}{3} = \frac{1}{3}(c+3a+2)$$

Suy ra
$$\sqrt[3]{a+3b} + \sqrt[3]{b+3c} + \sqrt[3]{c+3a} \leq \frac{1}{3}[4(a+b+c)+6] = \frac{1}{3}\left[4 \cdot \frac{3}{4} + 6\right] = 3$$

Do đó $P \geq 3$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = \frac{3}{4} \\ a+3b = b+3c = c+3a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c = \frac{1}{4}$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 3 khi $a=b=c = 1/4$

Câu 98: Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn: $xy + yz + zx = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$P = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{y^2 + z^2} + \frac{1}{z^2 + x^2} + \frac{5}{2}(x+1)(y+1)(z+1).$$

Trường THPT Quốc Oai – Hà Nội – Lần 1

Lời giải tham khảo

Giả sử $z = \min\{x; y; z\}$. Đặt $x + \frac{z}{2} = u; y + \frac{z}{2} = v \Rightarrow u, v > 0$

Ta có: $x^2 + z^2 \leq \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}z^2 - xz \leq 0 \Leftrightarrow z(3z - 4x) \leq 0$ luôn đúng.

Vậy $x^2 + z^2 \leq \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 = u^2; y^2 + z^2 \leq v^2; x^2 + y^2 \leq u^2 + v^2$.

Mà với $u, v > 0$, ta có: $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} \geq \frac{4}{u+v}$ và $\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} \geq \frac{8}{(u+v)^2}$

Vậy

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{y^2 + z^2} + \frac{1}{z^2 + x^2} &\geq \frac{1}{u^2 + v^2} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} = \frac{1}{u^2 + v^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}\right) \\ &\geq \frac{1}{u^2 + v^2} + \frac{1}{2uv} + \frac{6}{(u+v)^2} \geq \frac{4}{(u+v)^2} + \frac{6}{(u+v)^2} = \frac{10}{(u+v)^2} = \frac{10}{(x+y+z)^2} \end{aligned}$$

Mà $(x+1)(y+1)(z+1) = xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1 = xyz + x + y + z + 2 \geq x + y + z + 2$ Vậy

$$P \geq \frac{10}{(x+y+z)^2} + \frac{5}{2}(x+y+z) + 5. \text{ Đặt } x+y+z=t; t \geq \sqrt{3}$$

Xét $f(t) = \frac{10}{t^2} + \frac{5}{2}t + 5$ với $t \geq \sqrt{3}$. Ta có: $f'(t) = \frac{-20}{t^3} + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow t^3 = 8 \Leftrightarrow t = 2$

Từ đó, ta có: $P \geq f(2) = \frac{10}{2^2} + \frac{5}{2} \cdot 2 + 5 = 10 + \frac{5}{2} = \frac{25}{2}$.

Khi $x=y=1; z=0$ thì $P = \frac{25}{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{25}{2}$.

Câu 99: Cho a,b,c thuộc đoạn [1;2] .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{(a+b)^2}{c^2 + 4(ab+bc+ca)}$.

Trường THPT – Quỳnh Lưu 1 – Nghệ An – Lần 1

Lời giải tham khảo

Cho a,b,c thuộc đoạn [1;2] . Tìm GTNN của $P = \frac{(a+b)^2}{c^2 + 4(ab+bc+ca)}$.

$$P = \frac{(a+b)^2}{c^2 + 4(ab+bc+ca)} = \frac{(a+b)^2}{c^2 + 4(a+b)c + 4ab}$$

Ta có $4ab \leq (a+b)^2$ nên $P \geq \frac{(a+b)^2}{c^2 + 4(a+b)c + (a+b)^2} = \frac{\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)^2}{1 + 4\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)^2}$

Đặt $t = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ vì a, b, c thuộc [1;2] nên t thuộc [1;4]

Ta có $f(t) = \frac{t^2}{4 + 4t + t^2}$, $f'(t) = \frac{4t^2 + 2t}{(1 + 4t + t^2)^2} > 0$ với mọi t thuộc [1;4]

Hàm số f(t) đồng biến trên [1;4] nên f(t) đạt GTNN bằng $\frac{1}{6}$ khi t = 1

Dấu bằng xảy ra khi a = b ; $\frac{a+b}{c} = 1$, a,b,c thuộc [1;2] $\Leftrightarrow a=b=1$ và c=2

Vậy $\text{Min} P = \frac{1}{6}$ khi a=b=1 và c=2

Câu 100: Cho các số dương x, y . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{3x^2 + y^2}} - \frac{2}{3(x+y)^3}.$$

Trường THPT Quỳnh Lưu 3 – Nghệ An – Lần 1

Lời giải tham khảo

Xét biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{3x^2 + y^2}} - \frac{2}{3(x+y)^3}$

Trước hết ta chứng minh $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{3x^2 + y^2}} \leq \frac{2}{x+y}$

Thật vậy, $\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{3x^2 + y^2}} \right)^2 \leq 2 \left(\frac{1}{x^2 + 3y^2} + \frac{1}{3x^2 + y^2} \right) = \frac{8(x^2 + y^2)}{(x^2 + 3y^2)(3x^2 + y^2)}$

Xét $\frac{8(x^2 + y^2)}{(x^2 + 3y^2)(3x^2 + y^2)} - \frac{4}{(x+y)^2} = \frac{4[2(x^2 + y^2)(x+y)^2 - (x^2 + 3y^2)(3x^2 + y^2)]}{(x^2 + 3y^2)(3x^2 + y^2)(x+y)^2}$

$$= \frac{-4(x-y)^4}{(x^2 + 3y^2)(3x^2 + y^2)(x+y)^2} \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{3x^2 + y^2}} \leq \frac{2}{x+y}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x=y$

Như vậy, $P \leq \frac{2}{x+y} - \frac{2}{3(x+y)^3}$

Đặt, $t = \frac{1}{x+y}, t > 0$. Xét hàm số $f(t) = 2t - \frac{2t^3}{3} \Rightarrow f'(t) = 2 - 2t^2; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$

Ta có bảng biến thiên

t	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+	0	-
$f(t)$				$\frac{4}{3}$	

Từ BBT ta thấy GTLN của $f(t)$ là $4/3$ khi $t=1$.

Vậy, GTLN của P là $4/3$ khi $x = y = \frac{1}{2}$

Câu 101: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx + xyz = 4$.

Chứng minh rằng: $3\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 \geq (x+2)(y+2)(z+2)$.

Sở GD & ĐT Bắc Giang – Lần 1

Lời giải tham khảo

Từ giả thiết suy ra $0 < xy, yz, zx < 4$

Đặt $\sqrt{zy} = 2\cos A, \sqrt{xz} = 2\cos B, \sqrt{xy} = 2\cos C$, trong đó A, B, C là các góc nhọn.

Từ giả thiết suy ra

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1 \Leftrightarrow (\cos C + \cos(A-B))(\cos C + \cos(A+B)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos C + \cos(A+B) = 0$$

Suy ra A, B, C là ba góc nhọn của một tam giác.

Ta có:

$$z = \frac{2\cos A \cos B}{\cos C}; y = \frac{2\cos A \cos C}{\cos B}; x = \frac{2\cos C \cos B}{\cos A}$$

$$YCBT \Leftrightarrow \frac{3(\cos A + \cos B + \cos C)^2}{2\cos A \cos B \cos C} \geq \frac{8\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}{\cos A \cos B \cos C}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\left(1 + 4\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}\right) \geq 4\sin A \sin B \sin C \Leftrightarrow \frac{1}{\sin A \sin B \sin C} + \frac{1}{2\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \geq \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sin A \sin B \sin C} + \frac{1}{2\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \geq \frac{1}{\left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right)^3} + \frac{1}{2\left(\frac{\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}}{3}\right)^3} \geq \frac{8}{3\sqrt{3}} + \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Câu 102: Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\begin{cases} 2y \geq x^2 \\ y \leq -2x^2 + 3x \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x^4 + y^4 + \frac{2}{(x+y)^2}$$

Sở GD & ĐT Vĩnh Phúc – Lần 1

Lời giải tham khảo

Từ giả thiết ta có $y \geq 0$ và $\frac{x^2}{2} \leq -2x^2 + 3x \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{6}{5}$ và

$$x^2 + y^2 \leq x^2 + (-2x^2 + 3x)^2 = 2x^2(2x^2 - 6x + 5)$$

Xét hàm số $f(x) = 2x^2(2x^2 - 6x + 5); x \in \left[0; \frac{6}{5}\right]$ ta được $\underset{\left[0; \frac{6}{5}\right]}{\text{Max}} f(x) = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 2$

$$P = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 + \frac{2}{(x+y)^2} \geq (x^2 + y^2)^2 - \frac{(x^2 + y^2)^2}{2} + \frac{2}{x^2 + y^2}$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + y^2 \Rightarrow P \geq \frac{t^2}{2} + \frac{2}{t}, 0 < t \leq 2$$

Xét hàm số:

$$g(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{2}{t}, t \in (0; 2]$$

$$g'(t) = t - \frac{1}{t^2} = \frac{t^3 - 2}{t^2}; g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{2}$$

Lập bảng biến thiên ta có $\underset{2}{\text{Min}} P = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$ khi $x = y = \frac{\sqrt[6]{16}}{2}$

Câu 103: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{16}{x+y+z}$. Tìm giá trị lớn nhất của

biểu thức: $P = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz}$.

Sở GD & ĐT Hà Tĩnh – Lần 1

Lời giải tham khảo

Đặt $a = \frac{x}{y}; b = \frac{y}{z}; c = \frac{z}{x}$. Ta có: $a, b, c > 0; abc = 1$ và $P = (a-1)(b-1)(c-1)$

Giả thiết trở thành: $a + b + c + ab + bc + ca = 13$ (1)

Vì $a, b, c > 0; abc = 1$ nên trong ba số a, b, c có tồn tại 1 số, giả sử a có tính chất $0 < a \leq 1$.

Từ (1) và $abc = 1$. Ta có: $b + c = \frac{13 - a - \frac{1}{a}}{1 + a}$.

Suy ra:

$$P = a + b + c - ab - bc - ca = 2(a + b + c) - 13 = \frac{2a^3 - 13a^2 + 13a - 2}{a^2 + a}.$$

Xét hàm số: $f(a) = \frac{2a^3 - 13a^2 + 13a - 2}{a^2 + a}$ trên $(0; 1]$.

Ta có:

$$f'(a) = \frac{2(a^4 + 2a^3 - 13a^2 + 2a + 1)}{a^2(a+1)^2} = \frac{2(a^2 - 3a + 1)(a^2 + 5a + 1)}{a^2(a+1)^2} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Lập bảng biến thiên của $f(a)$ trên $(0; 1]$ thu được $f(a) \leq f\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) = \sqrt{5}$.

Do đó, $P \leq \sqrt{5}$. Khi $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}; y = 1; z = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ thì $P = \sqrt{5}$.

Vậy, giá trị lớn nhất của P là $\sqrt{5}$.

Câu 104: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{(b+c)^2 + 5bc} + \frac{b^2}{(c+a)^2 + 5ca} - \frac{3}{4}(a+b)^2.$$

Sở GD & ĐT Lào Cai – Lần 1

Lời giải tham khảo

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\frac{a^2}{(b+c)^2 + 5bc} \geq \frac{a^2}{(b+c)^2 + \frac{5}{4}(b+c)^2} = \frac{4a^2}{9(b+c)^2}. \text{ Tương tự, ta có } \frac{b^2}{(c+a)^2 + 5ca} \geq \frac{4b^2}{9(c+a)^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \frac{a^2}{(b+c)^2 + 5bc} + \frac{b^2}{(c+a)^2 + 5ca} &\geq \frac{4}{9} \left(\frac{a^2}{(b+c)^2} + \frac{b^2}{(c+a)^2} \right) \geq \frac{2}{9} \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} \right)^2 \\ &= \frac{2}{9} \left(\frac{a^2 + b^2 + c(a+b)}{ab + c(a+b) + c^2} \right)^2 \geq \frac{2}{9} \left(\frac{\frac{(a+b)^2}{2} + c(a+b)}{\frac{(a+b)^2}{4} + c(a+b) + c^2} \right)^2 = \frac{2}{9} \left(\frac{2(a+b)^2 + 4c(a+b)}{(a+b)^2 + 4c(a+b) + 4c^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Vì $a + b + c = 1 \Leftrightarrow a + b = 1 - c$ nên

$$P \geq \frac{2}{9} \left(\frac{2(1-c)^2 + 4c(1-c)}{(1-c)^2 + 4c(1-c) + 4c^2} \right)^2 - \frac{3}{4}(1-c)^2 = \frac{8}{9} \left(1 - \frac{2}{c+1} \right)^2 - \frac{3}{4}(1-c)^2. \quad (1)$$

Xét hàm số $f(c) = \frac{8}{9} \left(1 - \frac{2}{c+1} \right)^2 - \frac{3}{4}(1-c)^2$ với $c \in (0; 1)$.

$$\text{Ta có } f'(c) = \frac{16}{9} \left(1 - \frac{2}{c+1} \right) \cdot \frac{2}{(c+1)^2} - \frac{3}{2}(c-1);$$

$$f'(c) = 0 \Leftrightarrow (c-1)(64 - (3c+3)^3) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{3}.$$

Bảng biến thiên:

c	0	$\frac{1}{3}$	1
$f'(c)$		0	+
$f(c)$			

$\swarrow$ $-\frac{1}{9}$ $\nearrow$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(c) \geq -\frac{1}{9}$ với mọi $c \in (0; 1)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P \geq -\frac{1}{9}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{1}{9}$, đạt khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Câu 105: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $\frac{4a}{b} \left(1 + \frac{2c}{b}\right) + \frac{b}{a} \left(1 + \frac{c}{a}\right) = 6$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{bc}{a(b+2c)} + \frac{2ca}{b(c+a)} + \frac{2ab}{c(2a+b)}$.

Sở GD & ĐT Quảng Nam – Lần 1

Lời giải tham khảo

Đặt $x = \frac{2}{a}, y = \frac{4}{b}, z = \frac{1}{c}$ ($x, y, z > 0$).

Điều kiện đã cho trở thành: $\frac{x^3 + y^3}{xyz} + 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = 6$ (*)

Ta có: $x^3 + y^3 \geq \frac{(x+y)^3}{4}$ và $(x+y)^2 \geq 4xy$

Do đó: $\frac{x^3 + y^3}{xyz} \geq \frac{(x+y)^3}{4xyz} \geq \frac{4xy(x+y)}{4xyz} = \frac{x+y}{z}$

Mặt khác $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ nên $6 = \frac{x^3 + y^3}{xyz} + 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq \frac{x+y}{z} + 4 \Rightarrow 0 < \frac{x+y}{z} \leq 2$.

Ta có: $P = \frac{x}{y+2z} + \frac{y}{2z+x} + \frac{4z}{x+y} = \frac{x^2}{xy+2zx} + \frac{y^2}{2yz+xy} + \frac{4z}{x+y}$

$\geq \frac{(x+y)^2}{2xy+2z(x+y)} + \frac{4z}{x+y} \geq \frac{(x+y)^2}{\frac{(x+y)^2}{2} + 2z(x+y)} + \frac{4z}{x+y} = \frac{2(x+y)}{x+y+4z} + \frac{4z}{x+y}$

Suy ra: $P \geq \frac{2 \frac{x+y}{z}}{\frac{x+y}{z} + 4} + \frac{4}{\frac{x+y}{z}}$.

Đặt $t = \frac{x+y}{z}$, $0 < t \leq 2$. Ta có $P \geq \frac{2t}{t+4} + \frac{4}{t}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{2t}{t+4} + \frac{4}{t}$ ($0 < t \leq 2$).

$f'(t) = \frac{4(t^2 - 8t - 16)}{t^2(t+4)^2} < 0, \forall t \in (0; 2] \Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $(0; 2]$.

Suy ra: $P \geq f(t) \geq f(2) = \frac{8}{3}$.

$P = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \frac{x+y}{z} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow 2a = b = 4c$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{8}{3}$, khi $2a = b = 4c$.

Câu 106: Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện: $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^2(b+c)}{bc} + \frac{b^2(c+a)}{ca} + \frac{c^2(a+b)}{ab}$

Trường THPT Trần Cao Vân – Khánh Hoà– Lần 1

Lời giải tham khảo

$$P = \frac{a^2}{c} + \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{b} + \frac{c^2}{a}$$

$$a^2 + b^2 - ab = (a-b)^2 + ab \geq ab \Rightarrow a^3 + b^3 = (a+b).(a^2 + b^2 - ab) \geq (a+b).ab \quad (1)$$

$$b^2 + c^2 - bc = (b-c)^2 + bc \geq bc \Rightarrow b^3 + c^3 = (b+c).(b^2 + c^2 - bc) \geq (b+c).bc \quad (2)$$

$$c^2 + a^2 - ca = (c-a)^2 + ca \geq ca \Rightarrow c^3 + a^3 = (c+a).(c^2 + a^2 - ca) \geq (c+a).ca \quad (3)$$

$$(\forall a, b, c > 0), \quad (1) \Leftrightarrow \frac{a^3 + b^3}{ab} \geq a + b \Leftrightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{b^3 + c^3}{bc} \geq b + c \Leftrightarrow \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{b} \geq b + c$$

$$(3) \Leftrightarrow \frac{c^3 + a^3}{ca} \geq c + a \Leftrightarrow \frac{c^2}{a} + \frac{a^2}{c} \geq c + a$$

Suy ra $P \geq 2(a+b+c) \Leftrightarrow P \geq 2$

$$\text{Vậy } P_{\max} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$$

Câu 107: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (a + b + c) \left(\frac{3a - b}{a^2 + ab} + \frac{3b - c}{b^2 + bc} + \frac{3c - a}{c^2 + ca} \right)$.

Sở GD & ĐT Thanh Hoá – Lần 1

Lời giải tham khảo

Giả sử $a + b + c = k > 0$, đặt $a = kx, b = ky, c = kz \Rightarrow x, y, z > 0$ và $x + y + z = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } P &= k \left[\frac{k(3x - y)}{k^2(x^2 + xy)} + \frac{k(3y - z)}{k^2(y^2 + yz)} + \frac{k(3z - x)}{k^2(z^2 + zx)} \right] = \frac{3x - y}{x^2 + xy} + \frac{3y - z}{y^2 + yz} + \frac{3z - x}{z^2 + zx} \\ &= \frac{4x - (x + y)}{x(x + y)} + \frac{4y - (y + z)}{y(y + z)} + \frac{4z - (z + x)}{z(z + x)} = \frac{4}{x + y} - \frac{1}{x} + \frac{4}{y + z} - \frac{1}{y} + \frac{4}{z + x} - \frac{1}{z} \\ &= \frac{4}{1 - z} - \frac{1}{x} + \frac{4}{1 - x} - \frac{1}{y} + \frac{4}{1 - y} - \frac{1}{z} = \frac{5x - 1}{x - x^2} + \frac{5y - 1}{y - y^2} + \frac{5z - 1}{z - z^2}. \end{aligned}$$

Do a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên $b + c > a \Rightarrow y + z > x \Rightarrow 1 - x > x$

$$\Rightarrow x < \frac{1}{2}, \text{ tức là } x \in \left(0; \frac{1}{2}\right). \text{ Tương tự ta cũng có } y, z \in \left(0; \frac{1}{2}\right).$$

Ta sẽ chứng minh $\frac{5t - 1}{t - t^2} \leq 18t - 3$ (*) đúng với mọi $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

$$\text{Thật vậy: } (*) \Leftrightarrow \frac{5t - 1}{t - t^2} - 18t + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{18t^3 - 21t^2 + 8t - 1}{t - t^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(2t - 1)(3t - 1)^2}{t(1 - t)} \leq 0 (**)$$

$$(**) \text{ hiển nhiên đúng với mọi } t \in \left(0; \frac{1}{2}\right). \text{ Do đó } (*) \text{ đúng với mọi } t \in \left(0; \frac{1}{2}\right).$$

Áp dụng (*) ta được $P \leq 18x - 3 + 18y - 3 + 18z - 3 = 18(x + y + z) - 9 = 9$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = b = c$.

Vậy P đạt giá trị lớn nhất bằng 9 khi $a = b = c$.

Câu 108: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\sqrt{5x^2 + 2xy + 2y^2} + \sqrt{8x^2 + 4xz + 5z^2} = 4x + y + 2z, x \in [0; 5]$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \sqrt{2z - xy + 21} - \sqrt{x + z - xy + 10}$.

Sở GD & ĐT Quảng Ninh – Lần 1

Lời giải tham khảo

Từ điều kiện suy ra $x = y; z = 2x$. Khảo sát hàm $P \dots$

$$\text{ĐS : Max}P = 4; x = y = 5, z = 10 : \text{Min}P = \sqrt{2}; x = y = \frac{1}{3}, z = \frac{2}{3}$$

Câu 109: xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + 10yz$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 8xyz - \frac{3x^3}{y^2 + z^2}$

Sở GD & ĐT Hà Nội – Lần 1

Lời giải tham khảo

$$\text{Ta có } x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + 10yz \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2} - (y+z) \right)^2 = 12yz - \frac{3x^2}{4}$$

$$\text{Suy ra } 16yz \geq x^2 \Rightarrow 16xyz \geq x^3$$

$$\text{Mặt khác ta có } y^2 + z^2 \geq 2yz \geq \frac{x^2}{8} \Rightarrow -\frac{3x^3}{y^2 + z^2} \geq -24x$$

$$\text{Khi đó } P = 8xyz - \frac{3x^3}{y^2 + z^2} \geq \frac{x^3}{2} - 24x$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{x^3}{2} - 24x \text{ với } x \in (0; +\infty)$$

$$\text{Suy ra } \min_{x \in (0; +\infty)} f(x) = -64 \text{ khi } x = 4 \Rightarrow y = z = 1$$

$$\text{Vậy } \min P = -64 \text{ khi } x = 4, y = z = 1$$

Câu 110: Xét x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + xz + 1 = x$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (xy + xz + 2) \left(1 + \frac{1}{y} \right) \left(1 - \frac{4}{3z} \right)$.

Sở GD & ĐT Nam Định – Lần 1

Lời giải tham khảo

$$\text{Từ giả thiết đã cho ta có: } P = (1+x) \left(1 + \frac{1}{y} \right) \left(1 - \frac{4}{3z} \right)$$

$$\text{Mà } xy + xz + 1 = x \Leftrightarrow \frac{1}{x} + y + z = 1. \text{ Đặt } \frac{1}{x} = u, (u > 0)$$

$$\text{Ta có } u + y + z = 1 \text{ và } P = \left(1 + \frac{1}{u} \right) \left(1 + \frac{1}{y} \right) \left(1 - \frac{4}{3z} \right)$$

Do $u + y + z = 1$ suy ra $u, y, z \in (0; 1) \Rightarrow \left(1 - \frac{4}{3z}\right) < 0$

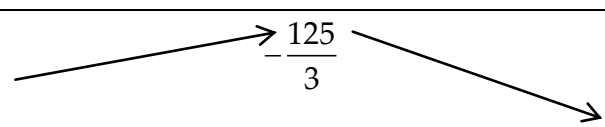
$$\text{Mà } \left(1 + \frac{1}{u}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{uy}}\right)^2 \geq \left(1 + \frac{2}{u+y}\right)^2 = \left(1 + \frac{2}{1-z}\right)^2$$

$$\text{Suy ra } P = \left(1 + \frac{1}{u}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 - \frac{4}{3z}\right) \leq \left(1 + \frac{2}{1-z}\right)^2 \left(1 - \frac{4}{3z}\right).$$

Xét hàm số $f(z) = \left(1 + \frac{2}{1-z}\right)^2 \left(1 - \frac{4}{3z}\right) = \frac{(z-3)^2}{(z-1)^2} \cdot \frac{3z-4}{3z}$, với $z \in (0; 1)$

$$\text{Ta có } f'(z) = \frac{4(z-3)(2z-3)(2z-1)}{3(z-1)^3 z^2} \Rightarrow f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}.$$

Lập bảng biến thiên

z	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(z)$	+	0	-
$f(z)$			

Ta có $P \leq f(z) \leq -\frac{125}{3} \Rightarrow P \leq -\frac{125}{3}$, đẳng thức xảy ra khi $x = 4; y = \frac{1}{4}; z = \frac{1}{2}$

$$\text{Vậy } \max P = -\frac{125}{3}$$

Câu 111: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(x+z)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}} \geq 2.$$

Trường THPT Sông Lô – Lần 2

Lời giải tham khảo

$$\text{Ta có } x^2(y+z) \geq x^2 \cdot 2\sqrt{yz} = \frac{2x^2}{\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x},$$

$$\text{tương tự } y^2(x+z) \geq 2y\sqrt{y}; z^2(y+x) \geq 2z\sqrt{z}$$

$$P \geq \frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

$$\text{Đặt } a = x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}; b = y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z}; c = z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow x\sqrt{x} = \frac{4c+a-2b}{9}; y\sqrt{y} = \frac{4a+b-2c}{9}; z\sqrt{z} = \frac{4b+c-2a}{9}$$

$$\text{Do đó } P \geq \frac{2}{9} \left(\frac{4c+a-2b}{b} + \frac{4a+b-2c}{c} + \frac{4b+c-2a}{a} \right)$$

$$= \frac{2}{9} \left[4 \left(\frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) - 6 \right] \geq \frac{2}{9} (4 \cdot 3 + 3 - 6) = 2$$

$$\text{Do } \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} \geq 3\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a}} = 3, \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Câu 112: Cho hai số thực $a, b \in (0;1)$ và thỏa mãn: $(a^3 + b^3)(a + b) = ab(1-a)(1-b)$. Tìm giá trị

lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + 3ab - a^2 - b^2$

Trường THPT Hồng Quang – Hải Dương – Lần 1

Lời giải tham khảo

$$\text{Max} P = \frac{6}{\sqrt{10}} + \frac{1}{9} \text{ khi } a = b = \frac{1}{3}$$

Câu 113: Cho hai số thực x, y, z và thỏa mãn: $x + y + z = 4; x^2 + y^2 + z^2 = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức: $P = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) (x^3 + y^3 + z^3)$

Trường THPT Hồng Quang – Hải Dương – Lần 2

Lời giải tham khảo

$\text{Min} P = 25$ khi $x = 2; y = z = 1$ hoặc các hoán vị.

Câu 114: Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn: $a + b + c = 2$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = \sqrt{\frac{ab}{ab+2c}} + \sqrt{\frac{bc}{bc+2a}} + \sqrt{\frac{ca}{ca+2b}}$$

Trường THPT Tam Đảo – Vĩnh Phúc – Lần 1

Lời giải tham khảo

$$\text{Max} S = \frac{3}{2} \text{ khi } a = b = c = \frac{2}{3}$$

Câu 115: Cho a, b là các số thực thỏa mãn $(2+a)(1+b) = \frac{9}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \sqrt{16+a^4} + 4\sqrt{1+b^4}$.

Trường THPT Thạch Thành 1 – Thanh Hoá– Lần 2

Lời giải tham khảo

Chúng minh được : $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} (*) \forall a, b, c, d$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} ad = bc \\ ac + bd \geq 0 \end{cases}$

Áp dụng (*) ta có

$$\frac{Q}{4} = \sqrt{1 + \left(\frac{a^2}{4}\right)^2} + \sqrt{1+b^4} \geq \sqrt{4 + \left(\frac{a^2}{4} + b^2\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{(a^2 + 4b^2)^2}{16}} \quad (1)$$

Mặt khác: $(2+a)(1+b) = \frac{9}{2} \Leftrightarrow a + 2b + ab = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2a + 4b + 2ab = 5$

Mà: $\begin{cases} a^2 + 1 \geq 2a \\ 4b^2 + 1 \geq 4b \\ \frac{a^2 + 4b^2}{2} \geq 2ab \end{cases} \Rightarrow \frac{3(a^2 + 4b^2)}{2} + 2 \geq 2a + 4b + 2ab = 5 \Rightarrow a^2 + 4b^2 \geq 2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $Q \geq 4 \cdot \sqrt{4 + \frac{4}{16}} = 2\sqrt{17}$. Dấu “=” xảy ra khi: $\begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy $\min Q = 2\sqrt{17}$ đạt được khi $\begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Câu 116: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{ab}-1\right)\left(\frac{1}{bc}-1\right)\left(\frac{1}{ca}-1\right)}$

Trường THPT Yên Lạc – Vĩnh Phúc – Lần 1

Lời giải tham khảo

Đặt $A^3 = P$

Ta có: $A = \left(\frac{1}{ab} - 1\right)\left(\frac{1}{bc} - 1\right)\left(\frac{1}{ca} - 1\right) = \frac{(1-ab)(1-bc)(1-ca)}{(abc)^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$1-ab \geq 1 - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{[(1+a)+(1+b)](1+c)}{4} \geq \frac{(1+c)\sqrt{(1+a)(1+b)}}{2}$$

Tương tự: $1-bc \geq \frac{(1+a)\sqrt{(1+b)(1+c)}}{2}$; $1-ca \geq \frac{(1+b)\sqrt{(1+c)(1+a)}}{2}$

Do đó: $A \geq \frac{1}{8} \left[\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) \right]^2$

Lại có: $\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^3 \geq 4^3$

Vậy $\min P = 8$ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Câu 117: Cho các số thực x, y thỏa mãn $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^3 + y^3 + 3(xy-1)(x+y-2)$.

Trường THPT Thạch Thành – Thanh Hoá – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 8(x+y) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x+y \leq 8$

$$A = (x+y)^3 - 3(x+y) - 6xy + 6 \geq (x+y)^3 - \frac{3}{2}(x+y)^2 - 3(x+y) + 6.$$

Xét hàm số: $f(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 3t + 6$ trên đoạn $[0; 8]$.

Ta có $f(0) = 6$, $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{17-5\sqrt{5}}{4}$, $f(8) = 398$. Suy ra $A \geq \frac{17-5\sqrt{5}}{4}$ Ta có

$$f'(t) = 3t^2 - 3t - 3, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ hoặc } t = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ (loại)}$$

Khi $x = y = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ thì dấu bằng xảy ra. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{17-5\sqrt{5}}{4}$

Câu 118: Cho a, b, c là những số thực dương và thỏa mãn $a + b + c \leq \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{2a^2 + \frac{1}{a^2b^2} + \frac{2}{b}} + \sqrt{2b^2 + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{2}{c}} + \sqrt{2c^2 + \frac{1}{c^2a^2} + \frac{2}{a}}$$

Trường THPT Thăng Long - Hà Nội – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \geq \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \quad (1)$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2\sqrt{x_1^2 x_2^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + y_1^2 y_2^2} \geq x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 + y_1^2 + y_2^2 + 2y_1 y_2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 x_2^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + y_1^2 y_2^2} \geq x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ &\Leftrightarrow (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Áp dụng (1) hai lần ta có: $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} + \sqrt{x_3^2 + y_3^2} \geq \sqrt{(x_1 + x_2 + x_3)^2 + (y_1 + y_2 + y_3)^2} \quad (2)$

Đặt $a + b + c = t \left(t \in \left(0; \frac{3}{2} \right] \right)$, suy ra $abc \leq \frac{t^3}{27}$. Áp dụng (2) ta có:

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{a^2 + \left(a + \frac{1}{ab}\right)^2} + \sqrt{b^2 + \left(b + \frac{1}{bc}\right)^2} + \sqrt{c^2 + \left(c + \frac{1}{ca}\right)^2} \geq \sqrt{(a+b+c)^2 + \left(a+b+c + \frac{a+b+c}{abc}\right)^2} \\ &\geq \sqrt{t^2 + \left(t + \frac{27}{t^2}\right)^2} \end{aligned}$$

Xét hàm $f(t) = t^2 + \left(t + \frac{27}{t^2}\right)^2 = 2t^2 + \frac{54}{t} + \frac{27^2}{t^4}$ trên $\left(0; \frac{3}{2}\right]$.

$$f'(t) = 4t - \frac{54}{t^2} - \frac{4 \cdot 27^2}{t^5} = \frac{4t^3 - 54}{t^2} - \frac{4 \cdot 27^2}{t^5} < 0, \forall t \in \left(0; \frac{3}{2}\right]$$

Hàm số $f(t)$ liên tục và nghịch biến trên $\left(0; \frac{3}{2}\right]$, do đó:

$$f(t) \geq f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{369}{2} \Rightarrow P \geq \frac{3\sqrt{82}}{2}$$

Khi $a = b = c = \frac{1}{2}$ thì dấu bằng xảy ra.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3\sqrt{82}}{2}$.

Câu 119: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $x + y + z^2 = xy + 5$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 18} + \frac{y}{x + y + 4z} - \frac{4(x + y)}{25z}$.

Lời giải tham khảo

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$x^2 + y^2 \geq 2xy = 2(x + y + z^2 - 5) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 10 \geq 2(x + y + z^2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 18 \geq 2(x + y) + 2(z^2 + 4) \geq 2(x + y) + 8z = 2(x + y + 4z)$$

Từ đó suy ra: $\frac{2x}{x^2 + y^2 + 18} \leq \frac{2x}{2(x + y + 4z)} = \frac{x}{x + y + 4z}$

Khi đó:

Với $t = \frac{x+y}{z} > 0$, xét hàm số: $f(t) = \frac{t}{t+4} - \frac{4t}{25}$

$$f'(t) = \frac{4}{(t+4)^2} - \frac{4}{25}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ (t+4)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

$$P \leq \frac{x}{x+y+4z} + \frac{y}{x+y+4z} - \frac{4(x+y)}{25z}$$

$$= \frac{x+y}{x+y+4z} - \frac{4(x+y)}{25z} = \frac{\frac{x+y}{z}}{\frac{x+y}{z} + 4} - \frac{4(x+y)}{25z} = f(t) = \frac{t}{t+4} - \frac{4t}{25}$$

Do đó, suy ra: $f(t) \leq f(1) = \frac{1}{25} \Rightarrow P_{\max} = \frac{1}{25}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x+y=z; x=y \\ x+y+z^2=xy+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=1 \\ z=2 \end{cases}$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{1}{25}$.

Câu 120: Cho ba số thực không âm x, y, z . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{4}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 4}} - \frac{4}{(x+y)\sqrt{(x+2z)(y+2z)}} - \frac{5}{(y+z)\sqrt{(y+2x)(z+2x)}}.$$

Trường THPT Chuyên Bình Long – Lần 2

Lời giải tham khảo

Với mọi số thực không âm x, y, z Ta có:

$$\sqrt{(x+2z)(y+2z)} \leq \frac{x+y+4z}{2} \Rightarrow (x+y)\sqrt{(x+2z)(y+2z)} \leq (x+y) \frac{x+y+4z}{2}$$

Mặt khác ta có: $(x+y)\frac{x+y+4z}{2} = \frac{x^2+y^2+2xy+4yz+4zx}{2} \leq 2(x^2+y^2+z^2)$ (1)

Vì $2xy \leq x^2+y^2$; $4yz \leq 2(y^2+z^2)$; $4zx \leq 2(z^2+x^2)$

Tương tự ta có $(y+z)\sqrt{(y+2x)(z+2x)} \leq (y+z)\frac{y+z+4x}{2} \leq 2(x^2+y^2+z^2)$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $P \leq \frac{4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+4}} - \frac{4}{2(x^2+y^2+z^2)} - \frac{5}{2(x^2+y^2+z^2)}$

Hay $P \leq \frac{4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+4}} - \frac{9}{2(x^2+y^2+z^2)}$. Đặt $t = \sqrt{x^2+y^2+z^2+4}$, $t > 2$

Khi đó $P \leq \frac{4}{t} - \frac{9}{2t^2-4}$. Xét hàm số $f(t) = \frac{4}{t} - \frac{9}{2t^2-4}$, $t > 2$

$$f'(t) = -\frac{4}{t^2} + \frac{9t}{(t^2-4)^2} = \frac{(4-t)(4t^3+7t^2-4t-16)}{t^2(t^2-4)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$$

(do $t > 2$ nên $4t^3+7t^2-4t-16 = 4(t^3-4) + t(7t-4) > 0$)

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t)$. Dựa vào bảng biến thiên ta có

$$\text{Max} P = \frac{5}{8} \text{ khi } x = y = z = 2$$

Câu 121: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{(a\sqrt{2}+1)(b\sqrt{2}+1)(c\sqrt{2}+1)}{abc}$

Trường THPT Chuyên Bình Long – Lần 3

Lời giải tham khảo

Sử dụng bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình nhân cho ba số dương ta được:

$$1 = a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow \sqrt[3]{abc} \leq \frac{1}{3}$$

Ta có $P = \frac{(a\sqrt{2}+1)(b\sqrt{2}+1)(c\sqrt{2}+1)}{abc}$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\sqrt{2} + \frac{1}{a}\right) \left(\sqrt{2} + \frac{1}{b}\right) \left(\sqrt{2} + \frac{1}{c}\right) \\
 &= 2\sqrt{2} + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \sqrt{2}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + \frac{1}{abc} \\
 &\geq 2\sqrt{2} + 2.3.\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} + \sqrt{2}.3.\left(\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\right)^3 \\
 &= 2\sqrt{2} + 3.\left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} + \sqrt{2}.3.\left(\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^3 = \left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^3 \\
 &\geq \left(\sqrt{2} + \frac{1}{\frac{1}{3}}\right)^3 = (\sqrt{2} + 3)^3. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } a = b = c = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng $(\sqrt{2} + 3)^3$.

Câu 122: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + 1 = c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^3}{a+bc} + \frac{b^3}{b+ca} + \frac{c^3}{c+ab} + \frac{14}{(c+1)\sqrt{(a+1)(b+1)}}$.

Trường THPT Chuyên Quang Trung – Bình Phước – Lần 6

Lời giải tham khảo

$$P = \frac{a^3}{(a+b)(b+1)} + \frac{b^3}{(a+b)(a+1)} + \frac{(a+b+1)^3}{(a+1)(b+1)} + \frac{14}{(a+b+2)\sqrt{(a+1)(b+1)}} \geq \frac{(a+b)^2}{2(a+b+2)} + \frac{4(a+b+1)^3}{(a+b+2)^2} + \frac{28}{(a+b+2)^2}$$

Đặt $t = a+b+2$ ($t > 2$). $P \geq f(t) = \frac{9t}{2} + \frac{14}{t} + \frac{24}{t^2} - 14$

Cách 1: Sử dụng xét hàm, tìm được Min $P = \frac{53}{8}$. Khi $a = b = \frac{1}{3}; c = \frac{5}{3}$

Cách 2: Sử dụng Cauchy: $P = \frac{14}{t} + \frac{63t}{32} + \frac{14}{t^2} + \frac{81t}{64} + \frac{81t}{64} - 14 \geq \frac{53}{8}$.

Câu 123: Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn: $z(z - x - y) = x + y + 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = \frac{x^4 y^4}{(x + yz).(y + zx).(z + xy)^3}$.

Trường THPT Hùng Vương – Bình Phước – Lần 2

Lời giải tham khảo:

Vì $z(z-x-y)=x+y+1 \Rightarrow (z+1)(x+y)=z^2-1$ và do $z > 0$ nên ta có: $x+y+1=z$.

$$\text{Khi đó: } T = \frac{x^4 y^4}{(x+y).(1+y).(x+y).(1+x).[(x+1)(y+1)]^3} = \frac{x^4 y^4}{(x+y)^2 . [(x+1)(y+1)]^4}$$

Áp dụng BĐT Côsi cho các số dương x, y ta có: $(x+1)^4 = \left(\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + 1 \right)^4 \geq \left(4 \sqrt[4]{\frac{x^3}{27}} \right)^4 = 4^4 \cdot \frac{x^3}{27},$

$$(y+1)^4 = \left(\frac{y}{3} + \frac{y}{3} + \frac{y}{3} + 1 \right)^4 \geq \left(4 \sqrt[4]{\frac{y^3}{27}} \right)^4 = 4^4 \cdot \frac{y^3}{27}, \quad (x+y)^2 \geq 4xy.$$

$$\text{Do đó } (x+y)^2 . [(x+1)(y+1)]^4 \geq 4xy . 4^8 \cdot \frac{x^3 . y^3}{3^6} = \frac{4^9}{3^6} . x^4 . y^4 \text{ suy ra } T \leq \frac{3^6}{4^9} (*)$$

$$\text{Dấu "}" ở } (*) \text{ xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{3} = 1 \\ z = x + y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3, y = 3, z = 7.$$

$$\text{Vậy GTLN của } T = \frac{3^6}{4^9} \text{ khi } x = 3, y = 3, z = 7$$

Câu 124: Cho a, b, c là ba số thực thỏa mãn điều kiện $abc + a + c = b$.

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: } P = \frac{2}{a^2 + 1} - \frac{2}{b^2 + 1} + \frac{3}{c^2 + 1}$$

Trường THPT Lê Hồng Phong – Lần 1

Lời giải tham khảo

$$\text{Từ giả thiết } abc + a + c = b \text{ ta có } a + c = b(1 - ac) > 0 \Rightarrow b = \frac{a+c}{1-ac}$$

$$\text{Khi đó } P = \frac{2}{a^2 + 1} + \frac{2(a+c)^2}{(a^2 + 1)(c^2 + 1)} - 2 + \frac{3}{c^2 + 1} \quad (0 < a < \frac{1}{c}).$$

$$\text{Khảo sát hàm biến } a \text{ là } f(a) \text{ với } 0 < a < \frac{1}{c} \text{ suy ra } f(a) \leq \frac{2c}{\sqrt{1+c^2}} + \frac{3}{c^2 + 1} = g(c)$$

$$\text{Khảo sát hàm } g(c) \text{ với } 0 < c < +\infty \text{ suy ra } g(c) \leq \frac{10}{3}.$$

Câu 125: Cho các số thực dương a, b, c luôn thỏa mãn $a + b + c = 1$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{a+b^2}{b+c} + \frac{b+c^2}{c+a} + \frac{c+a^2}{a+b} \geq 2.$$

Trường THPT Lộc Ninh – Bình Phước – Lần 3

Lời giải tham khảo:

$$\text{Ta có: VT} = \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) + \left(\frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} + \frac{a^2}{a+b}\right) = A + B$$

$$A + 3 = \frac{1}{2}[(a+b) + (b+c) + (c+a)] \left[\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right] \geq \frac{1}{2} 3\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)} 3\sqrt{\frac{1}{a+b} \frac{1}{b+c} \frac{1}{c+a}} = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow A \geq \frac{3}{2}$$

$$1^2 = (a+b+c)^2 \leq \left(\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a}\right)(a+b+b+c+c+a) \Leftrightarrow 1 \leq B.2 \Leftrightarrow B \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Từ đó ta có VT} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 = VP$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1/3$

Câu 126: Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{2x^2 + 2yz + 1} + \frac{y^2}{2y^2 + 2xz + 1} + \sqrt{x+y}$.

Trường THPT Lộc Ninh – Bình Phước – Lần 1

Lời giải tham khảo

$$\text{Ta có: } 2yz + 1 = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz = x^2 + (y+z)^2 \geq 2x(y+z)$$

$$\text{Suy ra } 2x^2 + 2yz + 1 \geq 2x^2 + 2x(y+z) = 2x(x+y+z) \Rightarrow \frac{x^2}{2x^2 + 2yz + 1} \leq \frac{1}{2} \frac{x}{x+y+z}$$

$$\text{Tương tự } \frac{y^2}{2y^2 + 2xz + 1} \leq \frac{1}{2} \frac{y}{x+y+z}. \text{ Suy ra } P \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x+y}{x+y+z} \right) + \sqrt{x+y} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{x+y+z} \right) + \sqrt{x+y}$$

$$\text{Ta có } x+y \leq \sqrt{2(x^2+y^2)} = \sqrt{2(1-z^2)} = \sqrt{2-2z^2}$$

$$\text{Suy ra } P \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{2-2z^2} + z} \right) + \sqrt[4]{2-2z^2}$$

$$\text{Xét hàm số } f(z) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{2-2z^2} + z} \right) + \sqrt[4]{2-2z^2} \text{ trên } [0;1]$$

$$f'(z) = -\frac{1}{\sqrt{2-2z^2}(\sqrt{2-2z^2} + z)^2} - \frac{z}{\sqrt[4]{(2-2z^2)^3}} < 0 \text{ với } \forall z \in (0;1).$$

Do hàm số liên tục trên $[0;1]$, nên $f(z)$ nghịch biến trên $[0;1]$

Suy ra $P \leq f(z) \leq f(0) = \frac{1}{2} + \sqrt[4]{2}$. Dấu = xảy ra khi $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}, z = 0$

Vậy GTLN của P là $\frac{1}{2} + \sqrt[4]{2}$ đạt được khi $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}, z = 0$

Câu 127: Cho $x > 0, y > 0$ thỏa mãn $x^2y + xy^2 = x + y + 3xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x^2 + y^2 + \frac{(1+2xy)^2 - 3}{2xy}.$$

Trường THPT Lộc Ninh – Bình Phước– Lần 2

Lời giải tham khảo:

+ Ta có $x^2y + xy^2 = x + y + 3xy$

$$\Leftrightarrow xy(x+y) = x + y + 3xy \quad (1) \text{ do } x > 0; y > 0 \text{ nên } x + y > 0$$

$$(1) \Rightarrow x + y = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 3 \geq \frac{4}{x+y} + 3 \Rightarrow (x+y)^2 - 3(x+y) - 4 \geq 0$$

$$\Rightarrow [(x+y)+1][(x+y)-4] \geq 0 \Rightarrow x+y \geq 4$$

$$(1) \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{x+y} = \frac{1}{xy}$$

$$\text{Nên } P = (x+y)^2 + 2 - \frac{1}{xy} = (x+y)^2 + 1 + \frac{3}{x+y}$$

$$+ \text{Đặt } x+y = t \ (t \geq 4) \Rightarrow P = t^2 + \frac{3}{t} + 1 = f(t)$$

$$+ \text{Ta có } f'(t) = 2t - \frac{3}{t^2} = \frac{2t^3 - 3}{t^2} > 0 \quad \forall t > 4 \quad \text{Nên } f(t) \text{ đồng biến trên nửa khoảng } [4; +\infty) \Rightarrow$$

$$P = f(t) \geq f(4) = \frac{71}{4}$$

Hay giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{71}{4}$ khi $x = y = 2$

Câu 128: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn: $a + b + c = 0; a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = a^2b^2c^2$.

Trường THPT Nguyễn Du– Lần 2

Lời giải tham khảo

Từ gt ta có:
$$\begin{cases} b+c=-a \\ bc=a^2-3 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm khi $a^2 \geq 4(a^2-3) \Leftrightarrow a^2 \leq 4 \Rightarrow a^2 \in [0;4]$

$$F = a^2b^2c^2 = a^2(a^2-3)^2 = t^3 - 6t^2 + 9t, \quad t = a^2 \in [0;4]$$

$$F'_t = 3t^2 - 12t + 9; \quad F'_t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \in [0;4] \\ t=3 \in [0;4] \end{cases}$$

$$F(0)=F(3)=0; \quad F(1)=F(4)=4$$

Suy ra $\max F = 4$ khi $(a;b;c) = (2;-1;-1)$ hoặc các hoán vị hoặc $(a;b;c) = (-2;1;1)$ hoặc các hoán vị.

Câu 129: Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x) = \sqrt{5x^2 - 8x + 32} - \sqrt{-3x^2 + 24x} + \sqrt{3x^2 - 12x + 16}.$$

Trường THPT Nguyễn Du – Lần 3

Lời giải tham khảo

Trước tiên ta chứng minh BĐT : $\frac{x^3+1}{x+2} \geq \frac{7}{18}x^2 + \frac{5}{18} (x > 0) (*)$

$(*) \Leftrightarrow 18(x^3+1) \geq (x+2)(7x^2+5)$ luôn đúng với mọi $x > 0$, dấu “=” xảy ra khi $x=1$
 $\Leftrightarrow (x-1)^2(11x+8) \geq 0$

Áp dụng (*) cho x lần lượt là $\frac{a}{b}; \frac{b}{c}; \frac{c}{a}$

$$\frac{a^3+b^3}{a+2b} \geq \frac{7a^2}{18} + \frac{5b^2}{18}; \quad \frac{b^3+c^3}{b+2c} \geq \frac{7b^2}{18} + \frac{5c^2}{18}; \quad \frac{c^3+a^3}{c+2a} \geq \frac{7c^2}{18} + \frac{5a^2}{18};$$

Từ các đẳng thức trên suy ra $S \geq \frac{12(a^2+b^2+c^2)}{18} = 2$

Vậy $\min S = 2$ khi $a=b=c=1$

Câu 130: Cho a, b, c, d là các số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^4+b^4+c^4+abcd} + \frac{1}{b^4+c^4+d^4+abcd} + \frac{1}{c^4+d^4+a^4+abcd} + \frac{1}{d^4+a^4+b^4+abcd} \leq \frac{1}{abcd}$$

Trường THPT Nguyễn Du – Lần 4

Lời giải tham khảo

$$a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2 \quad (1); \quad b^4 + c^4 \geq 2b^2c^2 \quad (2); \quad c^4 + a^4 \geq 2c^2a^2 \quad (3)$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c) \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 + abcd \geq abc(a+b+c+d)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^4 + b^4 + c^4 + abcd} \leq \frac{1}{abc(a+b+c+d)} \quad (4) \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Câu 131: Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = xyz$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x+yz} + \sqrt{y+xz} + \sqrt{z+xy} \geq \sqrt{xyz} + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

Trường THPT Nguyễn Du – Lần 5

Lời giải tham khảo

Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z} \Rightarrow a, b, c > 0$ và $a+b+c=1$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ac} + \sqrt{c+ab} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac} + 1$$

Thật vậy, $\sqrt{a+bc} = \sqrt{a(a+b+c)+bc} = \sqrt{a^2 + a(b+c)+bc} \geq \sqrt{a^2 + 2a\sqrt{bc} + bc}$

$$\Rightarrow \sqrt{a+bc} \geq \sqrt{(a+\sqrt{bc})^2} = a + \sqrt{bc}$$

Tương tự, $\sqrt{b+ac} \geq b + \sqrt{ac}, \quad \sqrt{c+ab} \geq c + \sqrt{ab}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ac} + \sqrt{c+ab} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac} + a + b + c$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ac} + \sqrt{c+ab} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac} + 1 \Rightarrow \text{đpcm}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = y = z = 3$

Câu 132: Cho x, y, z là ba số dương thỏa mãn: $\frac{2}{3x+2y+z+1} + \frac{2}{3x+2z+y+1} = (x+y)(x+z)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{2(x+3)^2 + y^2 + z^2 - 16}{2x^2 + y^2 + z^2}$.

Trường THPT Nguyễn Du – Lần 6

Lời giải tham khảo

Ta có: $(x+y)(x+z) \leq \frac{(x+y+x+z)^2}{4} = \frac{(2x+y+z)^2}{4}$

$$2\left(\frac{1}{3x+2y+z+1} + \frac{1}{3x+2z+y+1}\right) \geq \frac{8}{3(2x+y+z)+2}$$

Từ giả thiết suy ra: $\frac{8}{3(2x+y+z)+2} \leq \frac{(2x+y+z)^2}{4}$

Đặt $2x+y+z=t$ ($t>0$) $\Rightarrow \frac{8}{3t+2} \leq \frac{t^2}{4} \Leftrightarrow (t-2)(3t^2+8t+16) \geq 0$
 $\Leftrightarrow t \geq 2 \Rightarrow 2x+y+z \geq 2$

Mà: $4 \leq (2x+y+z)^2 \leq (2^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \geq \frac{2}{3}$.

Ta có: $P = \frac{2x^2+y^2+z^2+12x+2}{2x^2+y^2+z^2} = 1 + \frac{12x+2}{x^2+x^2+y^2+z^2}$
 $\leq 1 + \frac{12x+2}{x^2 + \frac{2}{3}} = 1 + \frac{36x+6}{3x^2+2}$

Xét hàm số: $f(x) = 1 + \frac{36x+6}{3x^2+2}$ với $x > 0$.

Ta có: $f'(x) = \frac{-36(3x^2+x-2)}{(3x^2+2)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (loại)} \\ x = \frac{2}{3} \Rightarrow f\left(\frac{2}{3}\right) = 10 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

Suy ra: $f(x) \leq 10 \Rightarrow P \leq 10$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 10. Dấu "=" xảy ra khi: $x = \frac{2}{3}, y = z = \frac{1}{3}$.

Câu 133: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1, 0 < z \leq 1$. Chứng minh rằng:
 $\left(1 + \frac{1}{xyz}\right)(x+y+z) \geq 3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Trường THPT Nguyễn Du – Lần 7

Lời giải tham khảo

- từ gt có $x-1 \quad y-1 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x+y-xy \Rightarrow \frac{1}{xy} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 1$

- Do đó $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \geq 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 3$

$$P = \left(1 + \frac{1}{xyz}\right) x + y + z = x + y + z + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P &\geq x + y + z + 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 3 \\ &\geq 2\sqrt{x + y + z \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 3 \\ &\geq 2.3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 3 = 3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$

Câu 134: Cho ba số thực dương a, b, c và thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = \frac{a^3 + b^3}{a + 2b} + \frac{b^3 + c^3}{b + 2c} + \frac{c^3 + a^3}{c + 2a}$.

Trường THPT Nguyễn Du – Lần 8

Lời giải tham khảo

Trước tiên ta chứng minh BĐT: $\frac{x^3 + 1}{x + 2} \geq \frac{7}{18}x^2 + \frac{5}{18} (x > 0) (*)$

$(*) \Leftrightarrow 18(x^3 + 1) \geq (x + 2)(7x^2 + 5)$ luôn đúng với mọi $x > 0$, dấu “=” xảy ra khi $x=1$
 $\Leftrightarrow (x-1)^2(11x+8) \geq 0$

Áp dụng (*) cho x lần lượt là $\frac{a}{b}; \frac{b}{c}; \frac{c}{a}$

$$\frac{a^3 + b^3}{a + 2b} \geq \frac{7a^2}{18} + \frac{5b^2}{18}; \frac{b^3 + c^3}{b + 2c} \geq \frac{7b^2}{18} + \frac{5c^2}{18}; \frac{c^3 + a^3}{c + 2a} \geq \frac{7c^2}{18} + \frac{5a^2}{18};$$

Từ các đẳng thức trên suy ra $S \geq \frac{12(a^2 + b^2 + c^2)}{18} = 2$

Vậy $\text{Min} S = 2$ khi $a=b=c=1$

Câu 135: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $y + z = x(y^2 + z^2)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{4}{(1+x)(1+y)(1+z)}$.

Trường THPT Nguyễn Văn Trỗi – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $(y+z)^2 \leq 2(y^2+z^2) \Rightarrow x(y+z)^2 \leq 2x(y^2+z^2) \Leftrightarrow x(y+z)^2 \leq 2(y+z) \Rightarrow y+z \leq \frac{2}{x}$

Theo BĐT Côsi $(1+y)(1+z) \leq \frac{1}{4}(2+y+z)^2 \Leftrightarrow (1+y)(1+z) \leq \frac{1}{4}\left(2+\frac{2}{x}\right)^2 \Leftrightarrow (1+y)(1+z) \leq \frac{(1+x)^2}{x^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(1+y)(1+z)} \geq \frac{x^2}{(1+x)^2} \quad (1) \Leftrightarrow \frac{4}{(1+x)(1+y)(1+z)} \geq \frac{4x^2}{(1+x)^2} \quad (2)$$

Lại có theo BĐT Côsi $\frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{(1+y)^2} \frac{1}{(1+z)^2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{2}{(1+y)(1+z)} \quad (3). \text{ Từ (1) và (2) } \Rightarrow \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{2x^2}{(1+x)^2} \quad (4)$$

Từ (2) và (4) $\Rightarrow P \geq \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2x^2}{(1+x)^2} + \frac{4x^2}{(1+x)^3} \Leftrightarrow P \geq \frac{2x^3+6x^2+x+1}{(1+x)^3}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{2x^3+6x^2+x+1}{(1+x)^3}$ trên $(0; +\infty)$. Ta có $f'(x) = \frac{10x-2}{(1+x)^4} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$

Lập BBT $P \geq f(x) \geq f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{91}{108}$. Vậy GTNN của $P = \frac{91}{108} \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}; y = z = 5$.

Câu 136: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn: $x+y \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{4x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{4y^2 + \frac{1}{y^2}} - \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} \right).$$

Sở GD & ĐT Bình Phước – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có:

$$M = \sqrt{4x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{4y^2 + \frac{1}{y^2}} \geq 2\sqrt{5}.$$

$$N = \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} \right) \leq \frac{4}{5}.$$

$$\Rightarrow P = M - N \geq 2\sqrt{5} - \frac{4}{5}$$

$$x = y = \frac{1}{2} \Rightarrow P = 2\sqrt{5} - \frac{4}{5}$$

$$\text{Khi} \Rightarrow \text{Min}P = 2\sqrt{5} - \frac{4}{5}$$

Câu 137: Cho a, b, c thuộc khoảng $(0;1)$ thỏa mãn $(\frac{1}{a}-1)(\frac{1}{b}-1)(\frac{1}{c}-1)=1$. Tìm GTNN của biểu thức: $P = a^2 + b^2 + c^2$.

Sở GD & ĐT Bình Phước – Lần 2

Lời giải tham khảo

Ta có: $(\frac{1}{a}-1)(\frac{1}{b}-1)(\frac{1}{c}-1)=1 \Leftrightarrow ab+bc+ca = a+b+c-1+2abc$

$$P = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - 2(a+b+c-1) - 4abc$$

Theo Cô si $abc \leq (\frac{a+b+c}{3})^3$

Đặt $t = a + b + c$, ta có:

$$P \geq t^2 - 2t + 2 - \frac{4}{27}t^3 \quad \text{với } 0 < t < 3$$

Khảo sát hàm số trên tìm ra $\min P = 3/4$ khi $t=3/2$ hay $a=b=c=1/2$

Câu 138: Cho số thực a, b, c không âm sao cho tổng hai số bất kì đều dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} + \frac{9\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c} \geq 6$$

Trường THPT Chuyên Biên Hoà – Lần 1

Lời giải tham khảo

Đặt $P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} + \frac{9\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c}$

Giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó $\sqrt{\frac{ab}{a+c}} + \sqrt{\frac{ac}{a+b}} \geq \sqrt{\frac{b.b}{b+c}} + \sqrt{\frac{c.c}{c+b}} = \sqrt{b+c}$

Đặt $t = b+c$ thì $P \geq \sqrt{\frac{a}{t}} + \sqrt{\frac{t}{a}} + \frac{9\sqrt{at}}{a+t}$

Ta có $\sqrt{\frac{a}{t}} + \sqrt{\frac{t}{a}} + \frac{9\sqrt{at}}{a+t} = \frac{a+t}{\sqrt{at}} + \frac{9\sqrt{at}}{a+t} \geq 6(AM-GM)$. Do đó $P \geq 6$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi $a+t=3\sqrt{at}$ và chẳng hạn một bộ (a,b,c) thỏa mãn là $(a,b,c)=\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2};1;0\right)$

Câu 139: Cho số thực m lớn nhất sao cho tồn tại các số thực không âm x,y,z thỏa mãn $x+y+z=4$ và $x^3+y^3+z^3+8(xy^2+yz^2+zx^2)=m$

Trường THPT Chuyên Vinh – Lần 2

Lời giải tham khảo

Giả sử tồn tại các số thực x,y,z thỏa mãn yêu cầu bài toán đặt ra.

Không mất tính tổng quát ta giả sử y nằm giữa x và z . Kết hợp với giả thiết ta có

$$0 \leq y \leq 2 \text{ và } x(y-x)(y-z) \leq 0$$

$$\text{Từ đây ta được } xy^2 + yz^2 + zx^2 \leq y(x+z)^2$$

$$\text{Mặt khác do } x, z \text{ không âm nên } x^3 + z^3 \leq (x+z)^3$$

$$\text{Do đó } m \leq (x+z)^3 + y^3 + 8y(x+z)^2 = (4-y)^3 + y^3 + 8y(4-y)^2 = 8y^3 - 52y^2 + 80y + 64 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(y) = 8y^3 - 52y^2 + 80y + 64, \quad 0 \leq y \leq 2$. Ta có

$$f'(y) = 24y^2 - 104y + 80 = 8(3y^2 - 13y + 10)$$

$$f'(y) = 0, 0 \leq y \leq 2 \Leftrightarrow y = 1$$

$$\text{Ta có } f(0) = 64, f(1) = 100, f(2) = 80. \text{ Suy ra } f(y) \leq f(1) = 100, \forall y \in [0;2] \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được $m \leq 100$

Khi $x=0, y=1, z=3$ ta có dấu đẳng thức

Vậy số m lớn nhất cần tìm là 100

Câu 140: Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \left(\frac{a+2\sqrt{ab}+c}{a+1} \right)^2 + \left(\frac{b+2\sqrt{bc}+a}{b+1} \right)^2 + \left(\frac{c+2\sqrt{ca}+b}{c+1} \right)^2$$

Trường THPT Chuyên Thoại Ngọc Hầu – Lần 1

Lời giải tham khảo

$$\vec{u}(a;\sqrt{2a};1); \vec{v}(1;\sqrt{2b};c) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{a+2\sqrt{ab}+c}{a+1} \right)^2 \leq 1+2b+c^2; \left(\frac{b+2\sqrt{bc}+a}{b+1} \right)^2 \leq 1+2c+a^2; \left(\frac{c+2\sqrt{ca}+b}{c+1} \right)^2 \leq 1+2a+b^2$$

$$\text{Suy ra : } P \leq 3+2(a+b+c)+c^2+a^2+b^2 = 6+2(a+b+c) \leq 12$$

Vậy : P lớn nhất bằng 12 đạt được khi $a=b=c=1$

Câu 141: Cho $x \geq 0$ và $y \geq 0$ thỏa mãn điều kiện $x + y = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy + \frac{1}{xy+1}$

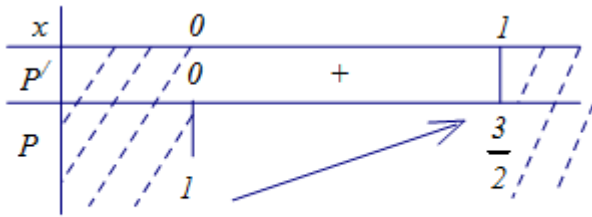
Trường THPT Chuyên Nguyễn Đình Chiểu – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $0 \leq xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 1$

Đặt $t = xy$, điều kiện $0 \leq t \leq 1$

$$P = t + \frac{1}{t+1} \Rightarrow P' = 1 - \frac{1}{(t+1)^2} = \frac{t(t+2)}{(t+1)^2}$$



Vậy GTLN $P = \frac{3}{2}$ Khi $x = 1; y = 1$

Câu 142: Cho ba số thực dương x, y, z thuộc đoạn $[1; 4]$ và thỏa mãn $x + y + z = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = \frac{z}{8(x^2 + y^2)} + \frac{x^2 + y^2 - 1}{xyz}$.

Trường THPT Hàn Thuyên – Bắc Ninh– Lần 2

Lời giải tham khảo

$$\frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2, (x-1)(y-1) = xy - x - y + 1 \geq 0 \Rightarrow xy \geq 5 - z \Rightarrow -\frac{1}{xyz} \geq \frac{-1}{(5-z)z}$$

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy \leq z^2 - 10z + 26$$

$$\text{ĐS: } T = \frac{1}{2}, x = y = 1; z = 4$$

Câu 143: Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x) = \sqrt{5x^2 - 8x + 32} - \sqrt{-3x^2 + 24x} + \sqrt{3x^2 - 12x + 16}$$

Trường THPT Lê Lợi – Thanh Hoá – Lần 2

Lời giải tham khảo

$$f(x) = \sqrt{5x^2 - 8x + 32} - \sqrt{-3x^2 + 24x} + \sqrt{3x^2 - 12x + 16} \leq \sqrt{5x^2 - 8x + 32} + \sqrt{3x^2 - 12x + 16}$$

$$\leq 12\sqrt{2} + 4\sqrt{7} \text{ (Khảo sát hàm 1 biến)}$$

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{\sqrt{5x^2 - 8x + 32} + \sqrt{-3x^2 + 24x}} + \sqrt{3x^2 - 12x + 16} \geq 2$$

Vậy : P nhỏ nhất bằng 2 đạt được khi $x=2$; P lớn nhất bằng $12\sqrt{2} + 4\sqrt{7}$ đạt được khi $x=8$

Câu 144: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn : $(bc+1)^2 + a^2 = 2(1+a) + bc$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a+1+a^2c}{a^2bc} + \frac{4}{(c+1)^2} - \frac{12\sqrt{a}}{a^2+1}$

Trường THPT Liên Sơn – Lần 1

Lời giải tham khảo

$$P = \frac{a+1}{a^2bc} + \frac{1}{b} + \frac{4}{(1+c)^2} - \frac{12\sqrt{a}}{a^2+1}$$

$$(bc+1)^2 + a^2 = 2(1+a) + bc \Leftrightarrow b^2c^2 + bc = 1 + 2a - a^2 = 2 - (a-1)^2 \leq 2$$

$$\Rightarrow bc \leq 1 \Rightarrow \frac{a+1}{a^2bc} \geq \frac{a+1}{a^2}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{b} \geq c \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{4}{(1+c)^2} \geq c + \frac{4}{(1+c)^2}$$

$$\text{Theo Cô-Si } \frac{c+1}{2} + \frac{c+1}{2} + \frac{4}{(1+c)^2} \geq 3 \Rightarrow c + \frac{4}{(1+c)^2} \geq 2$$

$$\text{Do đó } P \geq \frac{a+1}{a^2} + 2 - \frac{12\sqrt{a}}{a^2+1} \geq \frac{a+1}{a^2} + 2 - \frac{12\sqrt{a}}{2a} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} - \frac{6}{\sqrt{a}} + 2$$

$$\text{Đặt } t = \frac{1}{\sqrt{a}} > 0 \Rightarrow P \geq t^4 + t^2 - 6t + 2$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t^4 + t^2 - 6t + 2, \quad t > 0$$

$$\text{Có } f'(t) = 4t^3 + 2t - 6, \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Bảng biến thiên

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	2	-2	$+\infty$

Ta được $P \geq f(t) \geq -2$

$$\text{Dấu } = \text{ xảy ra khi } \begin{cases} t = \frac{1}{\sqrt{a}} = 1 \\ bc = 1 \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$$

Vậy min $P = -2$ đạt được khi $a = b = c = 1$

Câu 145: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$\text{biểu thức: } P = \frac{a^2}{a^2 + bc + a + a} + \frac{b+c}{a+b+c+1} - \frac{1+bc}{9}$$

Trường THPT Nghèn – Hà Tĩnh - Lần 1

Lời giải tham khảo

Đánh giá $a(b+c) \leq 1+bc; 1+bc \geq \frac{(a+b+c)^2}{4}$ xét hàm số $f(t) = \frac{t}{t+1} - \frac{t^2}{36}, t \in [0; \sqrt{6}]$

ĐS : $\text{Max} P = \frac{5}{9}$ khi $a = b = 1; c = 0$ hoặc $a = c = 1; b = 0$

Câu 146: Cho a, b, c là ba số thực dương và thỏa mãn: $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{25a^2}{\sqrt{2a^2 + 7b^2 + 16ab}} + \frac{25b^2}{\sqrt{2b^2 + 7c^2 + 16ab}} + \frac{c^2(a+2)}{a}$$

Trường THPT Trần Hưng Đạo – Đắk Nông - Lần 1

Lời giải tham khảo

$$\sqrt{2a^2 + 7b^2 + 16ab} = \sqrt{(a+4b)(3a+2b)} \leq 2a+3b; \frac{3c^2}{a} + 2c = c^2 \left(\frac{3}{a} + \frac{2}{c} \right) \geq \frac{25c^2}{3a+2c} \text{ Suy ra}$$

$$P \geq 25 \left(\frac{a^2}{2a+3b} + \frac{b^2}{2b+3c} + \frac{c^2}{2c+3a} \right) + c^2 - 2c \geq c^2 - 2c + 15$$

Vậy : P nhỏ nhất bằng 14 đạt được khi $a = b = c = 1$

Câu 147: Cho a, b, c là ba số thực dương và thỏa mãn: $a + b + c = \frac{1}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

thức:
$$P = \sqrt{\frac{(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)+a+c}} + \sqrt{\frac{(b+c)(c+a)}{(b+c)(c+a)+a+b}} + \sqrt{\frac{(a+c)(a+b)}{(a+c)(a+b)+b+c}}$$

Trường THPT - Nguyễn Sỹ Sách- Lần 1

Lời giải tham khảo

Đặt : $x = a + b, y = b + c, z = c + a \Rightarrow x + y + z = 1$

$$\sqrt{\frac{xy}{xy+z}} = \sqrt{\frac{xy}{(x+z)(y+z)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+z} + \frac{y}{y+z} \right) \text{ tương tự các biểu thức còn lại suy ra } S \leq \frac{3}{2}$$

Vậy : P lớn nhất bằng $\frac{3}{2}$ đạt được khi $a = b = c = \frac{1}{6}$

Câu 148: Cho x, y, z là ba số thực không âm và thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

thức:
$$P = \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{y+1}} + \frac{1}{\sqrt{z+1}}$$

Trường THPT Trưng Giã - Lần 2

Lời giải tham khảo

$$\left(\frac{1}{\sqrt{y+1}} + \frac{1}{\sqrt{z+1}} \right)^2 = \frac{y+z+2}{yz+y+z+1} + \frac{2}{\sqrt{yz+y+z+1}} \leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{y+z+1}} \right)^2$$

Suy ra : $\frac{1}{\sqrt{y+1}} + \frac{1}{\sqrt{z+1}} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{y+z+1}} ; (x+y+z)^2 \geq x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow y+z \geq 1-x$

$$\Rightarrow P \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{2-x}} \leq 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Vậy : P lớn nhất bằng $2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ đạt được khi $y = z = 0 ; x = 1$

Câu 149: Cho a, b, c là các số thực dương . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+4a} + \frac{c+a}{c+a+16b}.$$

Trường THPT Ischool Nha Trang – Khánh Hoà - Lần 1

Lời giải tham khảo

Đặt $x = a + b + c$; $y = b + c + 4a$; $z = c + a + 16b$, ta có $x, y, z > 0$ và

$$a = \frac{y-x}{3}, b = \frac{z-x}{15}, c = \frac{21x-5y-z}{15}. \text{ Khi đó}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{\frac{y-x}{3} + \frac{z-x}{15}}{x} + \frac{\frac{z-x}{15} + \frac{21-5y-z}{15}}{y} + \frac{\frac{21-5y-z}{15} + \frac{y-x}{3}}{z} = \frac{-6x+5y+z}{15x} + \frac{20x-5y}{15y} + \frac{16x-z}{15z} \\ &= -\frac{4}{5} + \frac{1}{3} \frac{y}{x} + \frac{1}{15} \frac{z}{x} + \frac{4}{3} \frac{x}{y} + \frac{16}{15} \frac{z}{x} = \frac{1}{3} \left(\frac{y}{x} + 4 \frac{x}{y} \right) + \frac{1}{15} \left(\frac{z}{x} + 16 \frac{z}{x} \right) - \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$P \geq \frac{3}{4} + \frac{8}{15} - \frac{4}{5} = \frac{16}{15}$$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{16}{15}$ khi $a = \frac{5}{7}c, b = \frac{3}{7}c$.

Câu 150: Cho x, y là hai số thực dương, $x + y = 1$. Tìm GTNN của $P = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$.

Trường THPT Ischool – Nha Trang – Khánh Hoà - Lần 2

Lời giải tham khảo

$$P^2 = 1 - 2xy - 2x^2y^2 + 2xy + 2xy\sqrt{x^2y^2 + 2xy}$$

$$\text{Đặt } t = xy, \quad 0 < t \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{Xét hs } f(t) = 1 - 2t - 2t^2 + 2t\sqrt{t^2 + 2t} \text{ trên } (0; \frac{1}{4}]$$

$$f'(t) = -2 - 4t + 2\sqrt{t^2 + 2t} + \frac{2t(t+1)}{\sqrt{t^2 + 2t}} < -2 - 4t + 2\sqrt{t^2 + 2t} < 0 \quad \forall t \in (0; \frac{1}{4}]$$

$$(\text{Vì pt } g(t) = -2 - 4t + 2\sqrt{t^2 + 2t} = 0 \Leftrightarrow 3t^2 + 2t + 1 = 0 \text{ vô nghiệm và } g\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{2} < 0)$$

$$\text{Suy ra hs } f(t) \text{ nghịch biến trên } (0; \frac{1}{4}] \Rightarrow f(t) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} \Rightarrow P \geq \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{khi và chỉ khi } x = y = \frac{1}{2}.$$

Câu 151: Cho các số thực a, b, c thuộc $[4; 6]$ và thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 15$. Tìm giá trị lớn

nhất của biểu thức
$$P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 30abc + 180}{ab + bc + ca} - \frac{1}{20}abc$$

Trường THPT Thuận Châu – Sơn La - Lần 2

Lời giải tham khảo

+) Biến đổi các đại lượng khác của bài toán theo đại lượng

$$t = ab + bc + ca$$

Thứ nhất:

$$(a - 4)(b - 4)(c - 4) \geq 0 \Leftrightarrow (ab - 4a - 4b + 16)(c - 4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow abc - 4ac - 4bc + 16c - 4ab + 16a + 16b - 64 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow abc - 4t + 16(a + b + c) - 64 \geq 0 \Leftrightarrow abc - 4t + 176 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow abc \geq 4t - 176 \Leftrightarrow -abc \leq -4t + 176$$

Suy ra:

$$P = \frac{(ab + bc + ca)^2 + 180}{ab + bc + ca} - \frac{1}{20}abc \leq \frac{t^2 + 180}{t} - \frac{1}{5}t + \frac{44}{5}$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{4}{5}t + \frac{180}{t} + \frac{44}{5}$$

Thứ 2:

$$(a - 6)(b - 6)(c - 6) \leq 0 \Leftrightarrow (ab - 6a - 6b + 36)(c - 6) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow abc - 6ac - 6bc + 36c - 6ab + 36a + 36b - 216 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow abc - 6t + 36(a + b + c) - 216 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow abc - 6t + 324 \leq 0 \Leftrightarrow abc \leq 6t - 324$$

Kết hợp: $\begin{cases} abc \geq 4t - 176 \\ abc \leq 6t - 324 \end{cases} \Rightarrow 4t - 176 \leq 6t - 324$

$$\Rightarrow 2t \geq 148 \Rightarrow t \geq 74$$

Thứ 3:

$$15^2 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - 2ab + b^2 + c^2 - 2bc + c^2 + a^2 - 2ca) + 3(ab + bc + ca)$$

$$= \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] + 3t \geq 3t$$

Suy ra $t \leq 75$

Xét hàm số

$$f(t) = \frac{4}{5}t + \frac{180}{t} + \frac{44}{5}, t \in [74; 75]$$

$$f'(t) = \frac{4}{5} - \frac{180}{t^2} = \frac{4t^2 - 900}{5t^2}$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow t = \pm 15$$

Suy ra $f'(t) \leq 0, t \in [15; 16]$

Do đó hàm $f(t)$ nghịch biến trên $[15; 16]$

suy ra $f(t) \leq f(15), t \in [15; 16]$

Giá trị lớn nhất của biểu thức P là:

$$f(15) = \frac{4}{5 \cdot 15} + \frac{180}{15} + \frac{44}{5} = 35$$

$P = 35$ khi $a = 4, b = 5, c = 6$ hoặc các hoán vị của $(4, 5, 6)$

Câu 152: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{9}{a+b+c} \geq 4 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)$$

Trường THPT Thuận Thành – Bắc Ninh - Lần 2

Lời giải tham khảo

Không giảm tính tổng quát, giả sử $a + b + c = 1$.

Vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên $a, b, c \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\left(\frac{4}{1-a} - \frac{1}{a} \right) + \left(\frac{4}{1-b} - \frac{1}{b} \right) + \left(\frac{4}{1-c} - \frac{1}{c} \right) \leq 9 \Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) \leq 9$$

$$\text{Với } f(x) = \frac{4}{1-x} - \frac{1}{x} = \frac{5x-1}{x-x^2}, x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Ta đánh giá } f(x) = \frac{5x-1}{x-x^2} \leq 18x-3, \forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow (3x-1)^2 (2x-1) \leq 0, \forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$$

Bất đẳng thức này đúng với $\forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

Do đó $f(a) + f(b) + f(c) \leq 18(a+b+c) - 9 = 9$ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$, do đó dấu bằng xảy ra của bất đẳng thức

ban đầu là $a = b = c$

Câu 153: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{14}{(z+1)\sqrt{(x+1)(y+1)}} + \frac{z^3}{z+xy} + \frac{x^3}{x+yz} + \frac{y^3}{y+zx}$$

Trường THPT Tô Văn Ôn - Lần 1

Lời giải tham khảo

$$\begin{aligned}
 &+ (z+1)\sqrt{(x+1)(y+1)} \leq \frac{(z+1)^2}{2} \\
 &\Rightarrow \frac{14}{(z+1)\sqrt{(x+1)(y+1)}} \geq \frac{28}{(z+1)^2} \\
 &+ z+xy = (x+1)(y+1) \leq \frac{(z+1)^2}{4} \\
 &\Rightarrow \frac{1}{z+xy} \geq \frac{4}{(z+1)^2} \Leftrightarrow \frac{z^3}{z+xy} \geq \frac{4z^3}{(z+1)^2} \\
 &+ \frac{x^3}{x+yz} + \frac{y^3}{y+zx} \geq \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2+2xyz} \geq \frac{x^2+y^2}{z+1} \geq \frac{(z-1)^2}{2(z+1)} \\
 &P \geq f(z) = \frac{28}{(z+1)^2} + \frac{(z-1)^2}{2(z+1)} + \frac{4z^3}{(z+1)^2} \\
 &+ f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{5}{3}
 \end{aligned}$$

+ lập bảng biến thiên, ta được $P \geq f(z) \geq \frac{53}{8} \Rightarrow \min P = \frac{53}{8}$, khi $x = y = \frac{1}{3}, z = \frac{5}{3}$.

Câu 154: Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $xyz + x + z = y$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2}{x^2+1} - \frac{2}{y^2+1} - \frac{4z}{\sqrt{z^2+1}} + \frac{3z}{(z^2+1)\sqrt{z^2+1}}$

Trường THPT Tô Văn Ôn - Lần 2

Lời giải tham khảo

$$\begin{aligned}
 &+ \text{ Vì } y = \frac{x+z}{1-xz}, \text{ nên } \frac{2}{x^2+1} - \frac{2}{y^2+1} = 2 \left[\frac{1}{x^2+1} - \frac{(1-xz)^2}{(x^2+1)(z^2+1)} \right] \\
 &= \frac{2z[z(1-x^2)+2x]}{(x^2+1)(z^2+1)} \leq \frac{2z[\sqrt{(1-x^2)^2+4x^2}]}{(x^2+1)\sqrt{(z^2+1)}} = \frac{2z}{\sqrt{z^2+1}}, \text{ Đặt } t = \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}
 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } P \leq -2t + \frac{3t}{\frac{t^2}{1-t^2} + 1} = -3t^3 + t = f(t) \text{ với } t \in (0;1)$$

+ Khảo sát ta có kết quả $\max_{(0;1)} f = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$ đạt được khi $z = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}y$

Câu 155: Cho x, y là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x \cdot y} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M = \frac{3y}{x(y+1)} + \frac{3x}{y(x+1)} + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$$

Trường THPT Tôn Đức Thắng - Lần 1

Lời giải tham khảo

Đặt $a = \frac{1}{x} > 0$, $b = \frac{1}{y} > 0$. Theo đề bài ta có:

$$3 - (a + b) = ab \leq \frac{(a + b)^2}{4}$$

Kết hợp điều kiện $a + b > 0$ suy ra $a + b \geq 2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M &= \frac{3a}{b+1} + \frac{3b}{a+1} + \frac{ab}{a+b} - a^2 - b^2 \\ &= 3 \cdot \frac{(a+b)^2 - 2ab + a + b}{ab + a + b + 1} + \frac{ab}{a+b} - (a^2 + b^2) + 2ab \\ &= 3 \cdot \frac{(a+b)^2 - 2(3 - (a+b)) + a + b}{3 - (a+b) + a + b} + \frac{3 - (a+b)}{a+b} - (a+b)^2 + 2 \cdot (3 - (a+b)) \\ &= \frac{1}{4} \left[-(a+b)^2 + a + b + 2 + \frac{12}{a+b} \right] \end{aligned}$$

Đặt $t = a + b \geq 2$

Xét hàm số: $f(t) = -t^2 + t + 2 + \frac{12}{t}$

$$f'(t) = -2t + 1 - \frac{12}{t^2} < 0, \forall t \geq 2$$

Suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $(2; +\infty)$

$$\max_{[2; +\infty)} f(t) = f(2) = 6 \text{ Suy ra giá trị lớn nhất của } M \text{ bằng } \frac{3}{2} \text{ khi } a=b=1 \Leftrightarrow x=y=1$$

Câu 156: Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $2x + 3y \leq 7$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2xy + y + \sqrt{5(x^2 + y^2)} - 24\sqrt{8(x+y) - (x^2 + y^2 + 3)}$.

Trường THPT Tôn Đức Thắng - Lần 2

Lời giải tham khảo

Ta có $6(x+1)(y+1) = (2x+2)(3y+3) \leq \left(\frac{2x+2+3y+3}{2} \right)^2 \leq 36 \Rightarrow x+y+xy \leq 5$.

Ta có $5(x^2+y^2) \geq (2x+y)^2 \Rightarrow \sqrt{5(x^2+y^2)} \geq 2x+y$ và

$$(x+y-3)^2 = x^2 + y^2 + 9 + 2xy - 6x - 6y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x+y+xy+3) \geq 8(x+y) - (x^2+y^2+3)$$

Suy ra $P \geq 2(xy+x+y) - 24\sqrt[3]{2(x+y+xy+3)}$ \

Đặt $t = x+y+xy$, $t \in (0;5]$, $P \geq f(t) = 2t - 24\sqrt[3]{2t+6}$

Ta có $f'(t) = 2 - \frac{24 \cdot 2}{3\sqrt[3]{(2t+6)^2}} = 2 - \frac{16}{\sqrt[3]{(2t+6)^2}} < 0, \forall t \in (0;5]$

Vậy hàm số $f(t)$ nghịch biến trên nửa khoảng $(0;5]$.

Suy ra $\min f(t) = f(5) = 10 - 48\sqrt[3]{2}$.

Vậy $\min P = 10 - 48\sqrt[3]{2}$, khi $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Câu 157: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa $x^3 + y^2 + z = 2\sqrt{3} + 1$. Tìm GTNN của

$$P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^3}.$$

Trường THPT Trần Bình Trọng – Khánh Hoà - Lần 1

Lời giải tham khảo

$A = \frac{1}{x^2+y^2} + 2\left(\frac{1}{xy} + 2xy + 2008\right)$ với: $x > 0, y > 0, x+y \leq 1$.

Ta có: $x > 0, y > 0$

$x+y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=y$

Ta có: $\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2}{xy} + 4xy = \left(\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{2xy}\right) + \left(4xy + \frac{1}{4xy}\right) + \frac{5}{4xy}$

$$\frac{4}{x^2+2xy+y^2} + 2\sqrt{4xy \cdot \frac{1}{4xy}} + \frac{5}{(x+y)^2} = \frac{4}{(x+y)^2} + 2 + \frac{5}{(x+y)^2} = \frac{11}{(x+y)^2} \geq 11$$

Suy ra $A \geq 2027$, $\min A = 2027 \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$

Câu 158: Cho 3 số thực x, y, z dương thỏa điều kiện $x + y + z = 1$. Tìm GTNN của

$$P = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$$

Trường THPT Trần Cao Vân – Khánh Hoà - Lần 1

Lời giải tham khảo

Đặt $y+z=a; z+x=b; x+y=c$ suy ra $a+b+c=2$

$$\frac{x^2}{y+z} = \frac{(1-a)^2}{a} = \frac{1}{a} + a - 2 \text{ và } P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + (a+b+c) - 6 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 4$$

Chứng minh. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} = \frac{9}{2} \Rightarrow P \geq \frac{1}{2}$

$$\text{Min}(P) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$$

Câu 159: Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn: $x + y + z \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^2}{yz + \sqrt{8+x^3}} + \frac{y^2}{zx + \sqrt{8+y^3}} + \frac{z^2}{xy + \sqrt{8+z^3}}$$

Trường THPT Trần Quang Khải - Lần 3

Lời giải tham khảo

Theo BĐT Bunhiacopxki:

$$P \left[\left(yz + \sqrt{8+x^3} \right) + \left(zx + \sqrt{8+y^3} \right) + \left(xy + \sqrt{8+z^3} \right) \right] \geq (x+y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow P \geq \frac{(x+y+z)^2}{xy + yz + zx + \sqrt{8+x^3} + \sqrt{8+y^3} + \sqrt{8+z^3}}$$

Ta có: $\sqrt{8+x^3} = \sqrt{(2+x)(4-2x+x^2)} \leq \frac{2+x+4-2x+x^2}{2} = \frac{6-x+x^2}{2}$

Tương tự: $\sqrt{8+y^3} \leq \frac{6-y+y^2}{2}; \sqrt{8+z^3} \leq \frac{6-z+z^2}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } P &\geq \frac{2(x+y+z)^2}{2xy + 2yz + 2zx + 18 - (x+y+z) + x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \frac{2(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2 - (x+y+z) + 18} \end{aligned}$$

Đặt $t = x + y + z$ ($t \geq 3$). Khi đó: $P \geq \frac{2t^2}{t^2 - t + 18}$

Xét hàm số: $f(t) = \frac{2t^2}{t^2 - t + 18}$ với $t \geq 3$. $f'(t) = \frac{2(-t^2 + 36t)}{(t^2 - t + 18)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 36$

BBT

Từ BBT ta có: GTNN của P là: $\frac{3}{4}$ khi $t = 3$. khi $\boxed{x = y = z = 1.}$

Câu 159: Cho các số thực không âm x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 + (3x - 2)(y - 1) = 0$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + x + y + 8\sqrt{4 - x - y}$

Trường THPT Trần Đại Nghĩa – Lần 1

Lời giải tham khảo

+ Ta có $x^2 + y^2 + (3x - 2)(y - 1) = 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 - 3(x + y) + 2 = -xy - y$

Vì x, y không âm nên $(x + y)^2 - 3(x + y) + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x + y \leq 2$

Đặt $t = x + y$ khi đó $t \in [1; 2]$

Ta có $P = x^2 + y^2 + x + y + 8\sqrt{4 - x - y} \leq (x + y)^2 + (x + y) + 8\sqrt{4 - (x + y)}$

$$P \leq t^2 + t + 8\sqrt{4 - t}$$

+ Xét hàm $f(t) = t^2 + t + 8\sqrt{4 - t}$ với $t \in [1; 2]$

ta có $f'(t) = 2t + 1 - \frac{4}{\sqrt{4 - t}}$ với $t \in [1; 2] \Rightarrow f'(t) > 3 - \frac{4}{\sqrt{2}} > 0$ với $t \in [1; 2]$

và $f(t)$ liên tục trên đoạn $[1; 2]$ nên $f(t)$ đồng biến trên đoạn $[1; 2]$

$$\rightarrow \max_{[1; 2]} f(t) = f(2) = 6 + 8\sqrt{2} \Rightarrow f(t) \leq 6 + 8\sqrt{2}$$

$$\rightarrow P \leq 6 + 8\sqrt{2}, P = 6 + 8\sqrt{2} \text{ khi } \begin{cases} x, y = 0 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

KL: Giá trị lớn nhất của P là $6 + 8\sqrt{2}$ đạt được khi $x = 2$ và $y = 0$

Câu 160: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $\sqrt{a^2 + b^2 + 8} + \sqrt{b^2 + c^2 + 8} + \sqrt{c^2 + a^2 + 8} = 12$
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^3 + b^3 + c^3$.

Trường THPT – Trần Phú – Vĩnh Phúc - Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $(a^2 + b^2 + 8) + 16 \geq 8\sqrt{a^2 + b^2 + 8}$ (1)

Tương tự $(b^2 + c^2 + 8) + 16 \geq 8\sqrt{b^2 + c^2 + 8}$ (2)

$$(c^2 + a^2 + 8) + 16 \geq 8\sqrt{c^2 + a^2 + 8} \quad (3)$$

Cộng (1), (2), (3) vế với vế, thu được

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + 3.8 + 3.16 \geq 8(\sqrt{a^2 + b^2 + 8} + \sqrt{b^2 + c^2 + 8} + \sqrt{c^2 + a^2 + 8})$$

Mà $\sqrt{a^2 + b^2 + 8} + \sqrt{b^2 + c^2 + 8} + \sqrt{c^2 + a^2 + 8} = 12$ suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \geq 12$

Ta có $a^3 + a^3 + 8 \geq 6a^2; b^3 + b^3 + 8 \geq 6b^2; c^3 + c^3 + 8 \geq 6c^2$

Suy ra $2(a^3 + b^3 + c^3) + 3.8 \geq 6(a^2 + b^2 + c^2) \geq 6.12$

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 24$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$. Vậy P đạt giá nhỏ nhất bằng 24

Câu 161: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn: $5(x^2 + y^2 + z^2) = 9(xy + 2yz + zx)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x}{y^2 + z^2} - \frac{1}{(x + y + z)^3}$.

Trường THPT Trần Thị Tâm - Lần 1

Lời giải tham khảo

Theo giả thiết ta có

$$5(x^2 + y^2 + z^2) = 9(xy + 2yz + zx) \Leftrightarrow 5(x + y + z)^2 = 9(xy + 2yz + zx) + 10(xy + yz + zx)$$

$$\Leftrightarrow 5(x + y + z)^2 = 19x(y + z) + 28yz \leq 19x(y + z) + 7(y + z)^2$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\frac{x}{y + z} + 1\right) \leq \frac{19x}{y + z} + 7 \Leftrightarrow \frac{x}{y + z} \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 2(y + z)$$

Mặt khác ta có $(y + z)^2 \leq 2(y^2 + z^2) \Leftrightarrow y^2 + z^2 \geq \frac{1}{2}(y + z)^2$

Vì vậy $P \leq \frac{2(y + z)}{\frac{1}{2}(y + z)^2} - \frac{1}{(2(y + z) + y + z)^3} = \frac{4}{y + z} - \frac{1}{27(y + z)^3}$

Đặt $t = y + z > 0 \Rightarrow P \leq \frac{4}{t} - \frac{1}{27t^3} = -\frac{(6t - 1)^2(2t + 1)}{27t^3} + 16 \leq 16$

$$\text{Vậy min } P = 16; \text{ dấu bằng đạt tại } \begin{cases} x = 2(y+z) \\ y = z \\ y+z = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = z = \frac{1}{12} \end{cases}$$

Câu 162: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2b^2 + c^2b^2 + 1 \leq 3b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức
$$P = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{4b^2}{(1+2b)^2} + \frac{8}{(c+3)^2}$$

Trường THPT Triệu Sơn – Thanh Hoá - Lần 1

Lời giải tham khảo

- Ta có:
$$P = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{4b^2}{(1+2b)^2} + \frac{8}{(c+3)^2} = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2b} + 1\right)^2} + \frac{8}{(c+3)^2}$$

- Đặt $d = \frac{1}{b}$, khi đó ta có: $a^2b^2 + c^2b^2 + 1 \leq 3b$ trở thành $a^2 + c^2 + d^2 \leq 3d$

Mặt khác:
$$P = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{\left(\frac{d}{2} + 1\right)^2} + \frac{8}{(c+3)^2} \geq \frac{8}{\left(a + \frac{d}{2} + 2\right)^2} + \frac{8}{(c+3)^2}$$

$$\geq \frac{64}{\left(a + \frac{d}{2} + c + 5\right)^2} = \frac{256}{(2a + d + 2c + 10)^2}$$

- Mà: $2a + 4d + 2c \leq a^2 + 1 + d^2 + 4 + c^2 + 1 = a^2 + d^2 + c^2 + 6 \leq 3d + 6$

Suy ra: $2a + d + 2c \leq 6$

- Do đó: $P \geq 1$ nên GTNN của P bằng 1 khi $a = 1, c = 1, b = \frac{1}{2}$

Câu 163: Cho a, b, c thuộc khoảng $(0;1)$ thỏa mãn $\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)=1$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = a^2 + b^2 + c^2$$

Trường THPT DL Lê Thánh Tôn - Lần 1

Lời giải tham khảo

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)=1 \Leftrightarrow ab+bc+ca=a+b+c-1+2abc$$

$$P=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-2(a+b+c-1)-4abc$$

Theo Cô si $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$

$$P \geq t^2 - 2t + 2 - \frac{4}{27}t^3 \quad \text{với } t = a+b+c \quad (0 < t < 3)$$

Khảo sát hàm số trên tìm ra $\min P = 3/4$ khi $t = 3/2$ hay $a=b=c=1/2$

Câu 164: Cho các số a, b, c không âm sao cho tổng 2 số bất kì đều dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} + \frac{9\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c} \geq 6.$$

Trường THPT Chuyên Biên Hoà - Lần 1

Lời giải tham khảo

$$\text{Đặt } P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} + \frac{9\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c}$$

$$\text{Giả sử } a \geq b \geq c, \text{ khi đó } \sqrt{\frac{ab}{a+c}} + \sqrt{\frac{ac}{a+b}} \geq \sqrt{\frac{b^2}{b+c}} + \sqrt{\frac{c^2}{c+b}} = \sqrt{b+c}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{b}{b+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \sqrt{\frac{b+c}{a}}$$

$$\text{Đặt } t = b+c \text{ thì } P \geq \sqrt{\frac{a}{t}} + \sqrt{\frac{t}{a}} + \frac{9\sqrt{at}}{a+t}$$

$$\text{Ta có: } \sqrt{\frac{a}{t}} + \sqrt{\frac{t}{a}} + \frac{9\sqrt{at}}{a+t} = \frac{a+t}{\sqrt{at}} + \frac{9\sqrt{at}}{a+t} \geq 6 \quad (\text{AM-GM}). \text{ Do đó } P \geq 6 \quad (\text{đpcm}).$$

Đẳng thức xảy ra khi $a+t = 3\sqrt{at}$ và chẳng hạn một bộ (a, b, c) thỏa mãn:

$$(a, b, c) = \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}; 1; 0 \right).$$

Câu 165: Cho a, b, c là ba số thực không âm và thỏa mãn: $ab+bc+ca=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức: } P = \sqrt{\frac{a}{16(b+c)(a^2+bc)}} + \sqrt{\frac{b}{16(c+a)(b^2+ac)}} + \frac{a^2+1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{c}{ab} \right)$$

Trường THPT Đắk-Mil Đắk Nông - Lần 1

Lời giải tham khảo

$$\frac{a^2 + bc}{ab + ac} + 1 \geq 2\sqrt{\frac{a^2 + bc}{ab + ac}} \Rightarrow \sqrt{\frac{ab + ac}{a^2 + bc}} \geq \frac{2a(b + c)}{a^2 + bc} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{(b + c)(a^2 + bc)}} \geq \frac{2a}{(a + b)(a + c)} \dots$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{1}{4} \left[\frac{2a}{(a + b)(a + c)} + \frac{2b}{(a + b)(b + c)} \right] + \frac{a^2 + 1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{c}{ab} \right) \Rightarrow P \geq \frac{1}{4} \left[\frac{4ab + 2ac + 2bc}{(a + b)(a + c)(b + c)} \right] + \frac{(a^2 + 1)(b + c)}{4ab}$$

$$\text{Lại có : } ab + bc + ca = 1 \Rightarrow \frac{(a^2 + 1)(b + c)}{4ab} = \frac{(a + b)(b + c)(c + a)}{4ab} \geq \frac{(a + b)(b + c)(c + a)}{4ab + 2c(a + b)}$$

Suy ra : $P \geq 1$ khi $a = b = 1; c = 0$

Câu 166: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn: $(a + c)(b + c) = 4c^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức sau: } P = \frac{4a}{b + c} + \frac{4b}{a + c} - \frac{2ab}{c^2} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c}$$

Trường THPT Chuyên Biên Hoà – Phú Thọ - Lần 2

Lời giải tham khảo

$$\text{Từ giả thiết ta có: } \left(\frac{a}{c} + 1 \right) \left(\frac{b}{c} + 1 \right) = 4.$$

$$P = \frac{4a}{b + c} + \frac{4b}{a + c} - \frac{2ab}{c^2} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c} = \frac{4 \frac{a}{c}}{\frac{b}{c} + 1} + \frac{4 \frac{b}{c}}{\frac{a}{c} + 1} - 2 \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} + \sqrt{\left(\frac{a}{c} \right)^2 + \left(\frac{b}{c} \right)^2}.$$

$$\text{Đặt } \frac{a}{c} = x; \frac{b}{c} = y \Rightarrow \begin{cases} x, y > 0 \\ (x + 1)(y + 1) = 4 \end{cases} \Rightarrow x + y + xy = 3 \Rightarrow \begin{cases} 0 < xy \leq 1 \\ x + y \leq 2 \end{cases}.$$

$$P = \frac{4x}{y + 1} + \frac{4y}{x + 1} - 2xy + \sqrt{x^2 + y^2} = 7 - 5xy + \sqrt{(xy)^2 - 8xy + 9}$$

$$= 7 - 5t - \sqrt{t^2 - 8t + 9} = f(t) \text{ với } t = xy \text{ (} 0 < t \leq 1 \text{)}.$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = -5 + \frac{t - 4}{\sqrt{t^2 - 8t + 9}} < 0 \text{ với } 0 < t \leq 1.$$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $(0; 1]$.

$$P_{\min} = f(t)_{\min} = f(1) = 2 - \sqrt{2}.$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$.

Câu 167: Cho a, b, c là ba số thực dương và thỏa mãn: $a + b + c = \frac{1}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{\frac{(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)+a+c}} + \sqrt{\frac{(b+c)(c+a)}{(b+c)(c+a)+a+b}} + \sqrt{\frac{(a+c)(a+b)}{(a+c)(a+b)+b+c}}$$

Trường THPT Nguyễn Sỹ Sách - Lần 2

Lời giải tham khảo

Đặt : $x = a + b, y = b + c, z = c + a \Rightarrow x + y + z = 1$

$$\sqrt{\frac{xy}{xy+z}} = \sqrt{\frac{xy}{(x+z)(y+z)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+z} + \frac{y}{y+z} \right) \text{ tương tự các biểu thức còn lại suy ra } S \leq \frac{3}{2}$$

Vậy : P lớn nhất bằng $\frac{3}{2}$ đạt được khi $a = b = c = \frac{1}{6}$

Câu 168: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 5^{2x} + 5^y$, biết rằng $0 \leq x, y$ và $x + y = 1$

Trường THPT Quỳnh Lưu 2 – Nghệ An - Lần 1

Lời giải tham khảo

Từ giả thiết và điều kiện của x, y ta có : $y = 1 - x$ và $0 \leq x \leq 1$

Ta có $P = 5^{2x} + 5^y = 5^{2x} + 5^{1-x}$

Đặt $t = 5^x$ $1 \leq t \leq 5$. Ta có $P = t^2 + \frac{5}{t}$; $P' = 2t - \frac{5}{t^2}$ $P' = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$

$$P(1)=6, P(5)=26, P\left(\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\right) = \left(\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\right)^2 + 5\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$$

$$\text{Ta có } P_{\max} = 26 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad P_{\min} = \left(\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\right)^2 + 5\sqrt[3]{\frac{2}{5}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_5 \sqrt[3]{\frac{5}{2}} \\ y = 1 - \log_5 \sqrt[3]{\frac{5}{2}} \end{cases}$$

Câu 169: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2b^2 + c^2b^2 + 1 \leq 3b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức
$$P = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{4b^2}{(1+2b)^2} + \frac{8}{(c+3)^2}$$

Trường THPT – Triệu Sơn 1– Thanh Hoá - Lần 2

Lời giải tham khảo

- Ta có:
$$P = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{4b^2}{(1+2b)^2} + \frac{8}{(c+3)^2} = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2b}+1\right)^2} + \frac{8}{(c+3)^2}$$

- Đặt $d = \frac{1}{b}$, khi đó ta có: $a^2b^2 + c^2b^2 + 1 \leq 3b$ trở thành $a^2 + c^2 + d^2 \leq 3d$

Mặt khác:
$$P = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{\left(\frac{d}{2}+1\right)^2} + \frac{8}{(c+3)^2} \geq \frac{8}{\left(a+\frac{d}{2}+2\right)^2} + \frac{8}{(c+3)^2}$$

$$\geq \frac{64}{\left(a+\frac{d}{2}+c+5\right)^2} = \frac{256}{(2a+d+2c+10)^2}$$

- Mà: $2a+4d+2c \leq a^2+1+d^2+4+c^2+1 = a^2+d^2+c^2+6 \leq 3d+6$

Suy ra: $2a+d+2c \leq 6$

- Do đó: $P \geq 1$ nên GTNN của P bằng 1 khi $a=1, c=1, b=\frac{1}{2}$

Câu 170: Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $2x+3y \leq 7$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2xy + y + \sqrt{5(x^2 + y^2)} - 24\sqrt{8(x+y) - (x^2 + y^2 + 3)}$

Trường THPT- Tương Dương – Nghệ An – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $6(x+1)(y+1) = (2x+2)(3y+3) \leq \left(\frac{2x+2+3y+3}{2}\right)^2 \leq 36 \Rightarrow x+y+xy \leq 5$.

Ta có $5(x^2 + y^2) \geq (2x+y)^2 \Rightarrow \sqrt{5(x^2 + y^2)} \geq 2x+y$ và

$$(x+y-3)^2 = x^2 + y^2 + 9 + 2xy - 6x - 6y \geq 0 \Leftrightarrow 2(x+y+xy+3) \geq 8(x+y) - (x^2 + y^2 + 3)$$

Suy ra $P \geq 2(xy+x+y) - 24\sqrt{2(x+y+xy+3)}$

Đặt $t = x+y+xy, t \in (0; 5], P \geq f(t) = 2t - 24\sqrt{2t+6}$

Ta có $f'(t) = 2 - \frac{24 \cdot 2}{3\sqrt{(2t+6)^2}} = 2 - \frac{16}{\sqrt{2t+6}} < 0, \forall t \in (0; 5]$

$\Rightarrow$ hàm số $f(t)$ nghịch biến trên nửa khoảng $(0; 5]$.

Suy ra $\min f(t) = f(5) = 10 - 48\sqrt{2}$

Vậy $\min P = 10 - 48\sqrt[3]{2}$, khi $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Câu 171: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca = abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{\sqrt{b^2 + 3a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 3b^2}}{bc} + \frac{\sqrt{a^2 + 3c^2}}{ca}$$

Trường THPT Văn Giang – Lần 1

Lời giải tham khảo

Viết lại

$$P = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{3}{b^2}} + \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{3}{c^2}} + \sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{3}{a^2}}$$

$$P = \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{b}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{c}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{a}\right)^2}$$

Đặt $\vec{m} = \left(\frac{1}{a}; \frac{\sqrt{3}}{b}\right); \vec{n} = \left(\frac{1}{b}; \frac{\sqrt{3}}{c}\right); \vec{p} = \left(\frac{1}{c}; \frac{\sqrt{3}}{a}\right)$

Suy ra: $P = |\vec{m}| + |\vec{n}| + |\vec{p}|$

Ta có: $\vec{m} + \vec{n} + \vec{p} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}; \sqrt{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\right)$

Từ giả thiết ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ nên $\vec{m} + \vec{n} + \vec{p} = (1; \sqrt{3}) \Rightarrow |\vec{m} + \vec{n} + \vec{p}| = 2$

Ta có đánh giá: $|\vec{m}| + |\vec{n}| + |\vec{p}| \geq |\vec{m} + \vec{n} + \vec{p}| = 2$

Dấu đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $a = b = c = 3$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Vậy $\min P = 2$

Câu 172: Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện: $a^2 + b^2 + c^2 + 4abc = \frac{1}{4}$. Tìm giá trị

lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1 + 4(ab + bc + ca)}{a + b + c + 4abc}$

Trường Trung tâm GDTX Vạn Ninh – Khánh Hòa – Lần 1

Lời giải tham khảo

Với a, b, c là 3 số dương, ta luôn có:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \text{ và } a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

Nên : $P \leq \frac{1+4(a^2+b^2+c^2)}{3\sqrt[3]{abc}+4abc} = \frac{2-16abc}{3\sqrt[3]{abc}+4abc} \quad (1)$

Mặt khác : $a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ nên : $\frac{1}{4}-4abc = a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

Đặt $t = \sqrt[3]{abc} (t > 0)$. Ta có : $\frac{1}{4}-4t^3 \geq 3t^2 \Leftrightarrow 16t^3+12t^2-1 \leq 0 \Leftrightarrow (t-\frac{1}{4})(t+\frac{1}{2})^2 \leq 0 \Leftrightarrow t \leq \frac{1}{4}$. Vậy

$t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$

Do đó từ (1) ta có : $P \leq f(t) = \frac{2-16t^3}{3t+4t^3}; \quad t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$

$f'(t) = \frac{-6(16t^3+4t^2+1)}{(3t+4t^3)^2} < 0, \forall t \in \left(0; \frac{1}{4}\right] \Rightarrow$ hàm $f(t)$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{1}{4}\right]$

Do đó $P \leq \min_{t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{28}{13}$

Vậy GTLN của P là $\frac{28}{13}$ đạt được khi $a=b=c=\frac{1}{4}$

Câu 173: Cho các số thực dương x, y, z thỏa $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{xy+yz+zx}{x^2y+y^2z+z^2x}$.

Trường Trung tâm GDTX Vạn Ninh – Khánh Hoà – Lần 2

Lời giải tham khảo

Áp dụng BĐT TBC-TBN cho hai số dương, ta có

$x^3 + xy^2 \geq 2x^2y, y^3 + yz^2 \geq 2y^2z, z^3 + zx^2 \geq 2z^2x.$

$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 \geq 2(x^2y + y^2z + z^2x) - (xy^2 + yz^2 + zx^2) \quad (1)$

Mặt khác, do $x+y+z=3$ nên

$3(x^2 + y^2 + z^2) = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2)$
 $= x^3 + y^3 + z^3 + (x^2y + y^2z + z^2x) + (xy^2 + yz^2 + zx^2) \quad (2)$

Từ (1) và (2), ta có $x^2 + y^2 + z^2 \geq x^2y + y^2z + z^2x$.

$$\text{Do đó } P \geq x^2 + y^2 + z^2 + \frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\text{Ta có } (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx).$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow xy + yz + zx = \frac{9-t}{2}.$$

$$\text{Do } x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x + y + z)^2}{3} \Rightarrow t \geq 3$$

$$\text{Khi đó } P \geq t + \frac{9-t}{2t}, t \geq 3 \Leftrightarrow P \geq \frac{2t^2 - t + 9}{2t}, t \geq 3$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{2t^2 - t + 9}{2t}, \text{ trên } [3; +\infty).$$

Lập bảng biến thiên, ta có hàm f đồng biến trên $[3; +\infty)$.

$$\Rightarrow P \geq \min_{t \geq 3} f(t) = f(3) = 4.$$

Kết luận được : $\min P = 4 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Câu 174: Cho $x, y, z \in [0; 2]$ thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{x^2 + y^2 + 2} + \frac{1}{y^2 + z^2 + 2} + \frac{1}{z^2 + x^2 + 2} + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$$

Trường THPT Xuân Trường - Nam Định – Lần 1

Lời giải tham khảo

$$\text{Ta có } x^2 + y^2 + 2 = (x^2 + 1) + (y^2 + 1) \geq 2(x + y), \dots; \sqrt{xy} \leq \frac{xy + 1}{2}, \dots$$

$$\text{Nên } P \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x + y} + \frac{1}{y + z} + \frac{1}{z + x} + xy + yz + zx + 3 \right].$$

$$\text{Ta có } (x + y + z)(xy + yz + zx) \geq 9xyz$$

$$\Rightarrow (x + y)(y + z)(z + x) = (x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz \geq \frac{8}{9}(x + y + z)(xy + yz + zx)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} &= \frac{(x+y)(y+z) + (y+z)(z+x) + (x+y)(z+x)}{(x+y)(y+z)(z+x)} \\ &= \frac{(x+y+z)^2 + xy + yz + zx}{(x+y)(y+z)(z+x)} \\ &\leq \frac{(x+y+z)^2 + xy + yz + zx}{\frac{8}{9}(x+y+z)(xy + yz + zx)} = \frac{27}{8(xy + yz + zx)} + \frac{3}{8}\end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } P \leq \frac{1}{2} \left[\frac{27}{8(xy + yz + zx)} + xy + yz + zx + \frac{27}{8} \right]$$

Đặt $t = xy + yz + zx$.

$$\text{Do } x, y, z \in [0; 2] \Rightarrow (2-x)(2-y)(2-z) \geq 0 \Leftrightarrow xy + yz + zx \geq \frac{4+xyz}{2} \geq 2 \Rightarrow t \geq 2$$

$$\text{Mặt khác: } xy + yz + zx \leq \frac{1}{3}(x+y+z)^2 = 3 \Rightarrow t \leq 3. \text{ Vậy } t \in [2; 3]$$

$$\text{Ta có } P \leq \frac{1}{2} \left[\frac{27}{8t} + t + \frac{27}{8} \right] = f(t)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) \text{ với } t \in [0; 2] \text{ ta có } f'(t) = \frac{1}{2} \left[t - \frac{27}{8t^2} \right] = \frac{8t^3 - 27}{16t^2} > 0 \quad \forall t \in [2; 3] \text{ nên hàm số } f(t)$$

$$\text{đồng biến trên } [2; 3]. \Rightarrow f(t) \leq f(3) = \frac{15}{4}.$$

$$\text{Do } P \leq f(t) \Rightarrow P \leq \frac{15}{4}. \text{ Có } P = \frac{15}{4} \text{ khi } x = y = z = 1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{15}{4}$ đạt được khi $x = y = z = 1$.

Tài liệu không thể tránh được những lỗi các bạn vui lòng kiểm tra và sửa nhé!

Chia sẻ vì cộng đồng, hãy góp cho nhau 1 chút để đạt giá trị lớn lao hơn ... thanks