

Trường THPT chuyên Lê Khiết

CHUYÊN ĐỀ

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP ĐẾM
TRONG CÁC BÀI TOÁN TỔ HỢP

Tháng 7/2024

MỤC LỤC

1	Lý do chọn đề tài	4
2	Mục đích nghiên cứu	5
3	Xây dựng mô hình trong các bài toán đếm của tổ hợp	6
3.1	Số Catalan	6
3.2	Đường đi của con Kiến	11
3.3	Bài toán chia kẹo Euler	13
4	Đếm bằng hai cách	18
4.1	Tổng quan về phương pháp	18
4.2	Một số ví dụ	18
4.3	Bài tập đề nghị	39
5	Đếm bằng cách thiết lập quan hệ truy hồi	42
5.1	Các bài toán kinh điển	42
5.2	Các bài toán trong các đề thi học sinh giỏi, Olympic	44
5.3	Bài tập đề nghị	62
6	Đếm bằng ánh xạ	77
6.1	Kiến thức cơ bản	77
6.2	Phương pháp ánh xạ	78
6.3	Bài tập đề nghị	95
7	Sử dụng số phức trong phép đếm	99
7.1	Sử dụng số phức trong tính toán các biểu thức tổ hợp	99
7.2	Sử dụng đa thức và số phức trong các bài toán đếm	101
8	Kết luận	107
9	Tài liệu tham khảo	108

1. Lý do chọn đề tài

Các bài toán tổ hợp là một phần quan trọng của chuyên ngành toán rời rạc và là một mảng khó trong chương trình toán THPT chuyên. Trong các kì thi học sinh giỏi quốc gia, Olympic Toán quốc tế và khu vực, những bài toán tổ hợp thường xuyên được đề cập và thường là những bài toán khó, mang tính chất phân loại. Đề thi VMO cũng như các đề thi Olympic 30/4, Olympic DHHB trong vài năm gần đây cũng đang có xu hướng giảm số lượng các bài toán hình học phẳng và thay vào đó là các bài toán tổ hợp. Tuy nhiên, so với các phân môn khác thì các bài toán tổ hợp đem lại không ít khó khăn rắc rối cho các em học sinh bậc Trung học phổ thông trong quá trình học cũng như trong các kỳ thi. Những học sinh mới bắt đầu làm quen một số dạng toán tổ hợp thường chưa hiểu tường tận tư tưởng cũng như phương pháp tiếp cận bài toán. Để hiểu và vận dụng tốt một số dạng toán cơ bản và vận dụng kiến thức tổ hợp vào giải toán đòi hỏi học sinh phải có kiến thức nền tảng tổ hợp tương đối đầy đủ và chắc chắn trên tất cả các lĩnh vực của ngành toán rời rạc. Đó là một khó khăn rất lớn đối với giáo viên và học sinh khi giảng dạy và học tập phần này. Chính vì khó nên dẫn đến nhiều học sinh nản trong quá trình học, có tâm lý sợ các bài toán tổ hợp và có xu hướng không đầu tư cho việc giải chúng trong các kỳ thi mà để dành thời gian cho các bài toán thuộc các phân môn khác. Từ đó có thể thấy khó khăn lớn nhất của giáo viên là làm sao để học sinh hứng thú học và có khả năng vận dụng các phương pháp vào giải các bài toán tổ hợp, do đó vấn đề đặt ra là cần trang bị cho các em những kiến thức gì? Cần bắt đầu từ những bài toán nào? Cần phân dạng các bài tập áp dụng từng phương pháp giải toán tổ hợp theo mức độ từ thấp đến cao và những dấu hiệu của các bài toán như thế nào thì dùng phương pháp tương ứng?

Một trong những vấn đề đầu tiên của tổ hợp là đếm xem có bao nhiêu phần tử của một tập hợp, bao nhiêu cách để giải quyết một công việc, bao nhiêu cấu hình được tạo ra với các quy tắc cho trước. Để đếm được chính xác, chúng ta phải phân biệt được các cấu hình dựa vào các quy luật xây dựng chúng. Vì thế, có thể xem bài toán đếm là những bài toán luyện tập đầu tiên để chúng ta làm quen với tư duy tổ hợp, điều này giải thích vì sao một số bài toán đếm đã được đưa vào phổ thông từ những năm mới đi học. Bài toán đếm rất phong phú kể cả dạng phát biểu đến cách giải. Độ khó của bài toán đếm được trải rất rộng: từ những bài toán dễ với các số liệu cụ thể, có thể kiểm chứng bằng trực giác đến những bài toán khó hơn, với những dữ liệu đầu vào bằng chữ mà kết quả của nó được biểu diễn bằng một công thức toán học. Có những công thức được tìm ra qua một vài suy luận đơn giản nhưng cũng có những công thức mà việc tìm thấy chúng phải kéo dài hàng thế kỷ. Có những bài toán đếm gặp rất nhiều khó khăn, bế tắc nếu như giải bằng phương pháp trực tiếp, trong khi giải bằng phương pháp gián tiếp lại trở nên rõ ràng, đơn giản.

Tuy nhiên, nói gì đi nữa thì tổ hợp vẫn là bài toán khó đối với học sinh và cả giáo viên. Toán tổ hợp cũng có nhiều dạng khiến người mới tiếp cận không khỏi lúng túng không biết bắt đầu từ đâu. Với tất cả những khó khăn và thuận lợi trên chúng tôi chọn đề tài “Một số phương pháp đếm trong các bài toán tổ hợp” để trao đổi với quý thầy cô và các em học sinh. Chuyên đề không có tham vọng đưa ra những vấn đề “thời sự”, những khám phá mới mẻ mà chúng tôi cố gắng trình bày lại các phương pháp đếm thường hay sử dụng như phương pháp đếm bằng xây dựng mô hình, đếm bằng hai cách, đếm bằng quan hệ truy hồi, đếm bằng ánh xạ, đếm bằng số phức thông qua hệ thống bài tập được chọn lọc từ cơ bản đến những bài toán trong các kỳ thi học sinh giỏi Quốc gia, Olympic toán Quốc tế và khu vực, Olympic toán của các nước ... với hy vọng giúp các em học sinh có được các cách tiếp cận một cách có hệ thống với những bài toán tổ hợp “khó mà cực kỳ hấp dẫn” này.

2. Mục đích nghiên cứu

Đề tài “Một số phương pháp đếm trong các bài toán tổ hợp” được chọn để giới thiệu với các thầy cô giáo và các em học sinh những kinh nghiệm và tìm tòi của chúng tôi trong quá trình nghiên cứu và giảng dạy một số phương pháp giải quyết bài toán đếm trong chương trình THPT chuyên, đồng thời thông qua đề tài này chúng tôi muốn nhấn mạnh tầm quan trọng của các phương pháp này, chúng được xem như những viên gạch đầu tiên để xây dựng tư duy trong các bài toán tổ hợp. Thông qua đề tài chúng tôi trình bày những phương pháp đếm từ kiến thức cơ bản đến nâng cao, từ dễ đến khó, hy vọng giúp các em học sinh có thể tiếp cận một cách hệ thống và dễ dàng, có khả năng vận dụng một số phương pháp cơ bản vào giải các bài toán đếm nói riêng và các bài toán tổ hợp nói chung.

3. Xây dựng mô hình trong các bài toán đếm của tổ hợp

Việc xây dựng mô hình phù hợp với bài toán đếm của tổ hợp là một vấn đề rất quan trọng, nó giải quyết được rất nhiều vấn đề:

- a) Giải được bài toán đó với một cách tiếp cận đơn giản hơn.
- b) Dựa vào mô hình được xây dựng ta có thể phát triển bài toán.
- c) Tạo ra một vấn đề mở để phát triển các mô hình khác.

Tác giả xin giới thiệu một vài mô hình để tiếp cận bài toán và các góc nhìn liên quan.

3.1. Số Catalan

Đầu tiên ta hãy đến với một vấn đề rất quan trọng trong tổ hợp đó là số **Catalan** và một số mô hình của bài toán đếm tương ứng.

Trong toán tổ hợp, số Catalan là dãy các số tự nhiên xuất hiện trong nhiều bài toán đếm, thường bao gồm những đối tượng đệ quy. Chúng được đặt tên theo nhà toán học Bỉ **Eugène Charles Catalan** (1814–1894).

Số Catalan là một dãy các số tự nhiên được cho như sau: $C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14, C_5 = 42, \dots$ số thứ n được định nghĩa theo công thức như sau:

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$$

và công thức truy hồi là

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + C_2 C_{n-3} + \dots + C_{n-1} C_0 = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}.$$

Việc chứng minh mối quan hệ giữa hai công thức này xuất hiện rất nhiều trong các tài liệu tham khảo, bạn đọc có thể tìm hiểu thêm.

Bây giờ, chúng ta tìm hiểu một số bài toán được xây dựng theo mô hình của dãy số **Catalan**.

Bài 1. Cho n dấu mở ngoặc "(" và n dấu đóng ngoặc ")". Có bao nhiêu cách đặt $2n$ dấu mở-đóng ngoặc theo một hàng ngang, sao cho các dấu mở-đóng ngoặc có nghĩa?

Ví dụ với $n = 1$ ta có 1 cách đặt $()$.

Với $n = 2$ ta có 2 cách đặt $(())$, $() ()$.

Với $n = 3$ ta có 5 cách đặt như sau: $() () ()$, $((()))$, $() (())$, $(()) ()$, $() () ()$.

 **Lời giải.**

Bây giờ ta sẽ chứng minh số cách đặt như trên là số **Calanta** C_n .

Gọi a_n là số cách đặt thỏa yêu cầu bài cho $2n$ dấu mở-đóng ngoặc.

Ta có $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5$ và ta đặt $a_0 = 1$.

Ta xét một cách đặt cho chuỗi có độ dài $2n + 2$ dấu ngoặc, trong đó có $n + 1$ dấu mở ngoặc và $n + 1$ dấu đóng ngoặc.

Ta thấy ngay, với mỗi chuỗi này có thể sắp vào dạng phân hoạch thành hai chuỗi một chuỗi có độ dài $2k$ với $k \geq 0$ và chuỗi còn lại có độ dài $2n + 2 - 2k$. Ứng với mỗi chuỗi ta có số cách sắp xếp là a_k và a_{n-k} . Do đó ta có công thức truy hồi

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}.$$

Như vậy, số cách sắp xếp $2n$ dấu mở-đóng ngoặc theo một hàng ngang, sao cho các dấu mở-đóng ngoặc có nghĩa là C_n . □

Ta có thể thay thế các dấu mở-đóng ngoặc thành các số 1, -1 thì có bài toán mới sau:

Bài 2. Cho n số 1 và n số -1. Có bao nhiêu cách sắp $2n$ số này thành một dãy số $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}\}$, sao cho $\sum_{k=0}^m a_k \geq 0$ với mọi $0 \leq m \leq 2n$?

Ví dụ với $n = 1$ ta có dãy $\{1, -1\}$.

Với $n = 2$ ta có 2 dãy sau $\{1, 1, -1, -1\}, \{1, -1, 1, -1\}$.

Với $n = 3$ ta có 5 dãy sau

$$\{1, 1, 1, -1, -1, -1\},$$

$$\{1, 1, -1, 1, -1, -1\},$$

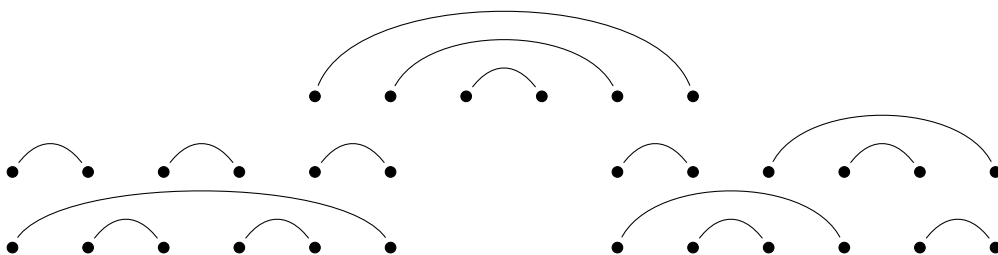
$$\{1, 1, -1, -1, 1, -1\},$$

$$\{1, -1, 1, 1, -1, -1\},$$

$$\{1, -1, 1, -1, 1, -1\}.$$

Tiếp theo, ta có thể thay một cặp mở-đóng ngoặc có nghĩa bởi một cung tròn mà điểm đầu là dấu mở ngoặc và điểm cuối là dấu đóng ngoặc, ta được một bài toán sau:

Bài 3. Cho $2n$ điểm phân biệt trên đường thẳng. Có bao nhiêu cách nối thành n cung không giao nhau (nối cùng một phía của đường thẳng)? Ví dụ với $n = 3$ ta có 5 cách nối như sau



Bài 4. Cho $n + 1$ số được sắp theo một thứ tự cho trước chúng được nhân lại với nhau bởi n phép nhân. Hỏi có bao nhiêu cách kết hợp cho n phép nhân đó?

Ví dụ với $n = 2$ ta có 1 cách kết hợp như sau $(a.b)$.

Với $n = 3$ ta có 2 cách kết hợp sau $((a.b).c)$, $(a.(b.c))$.

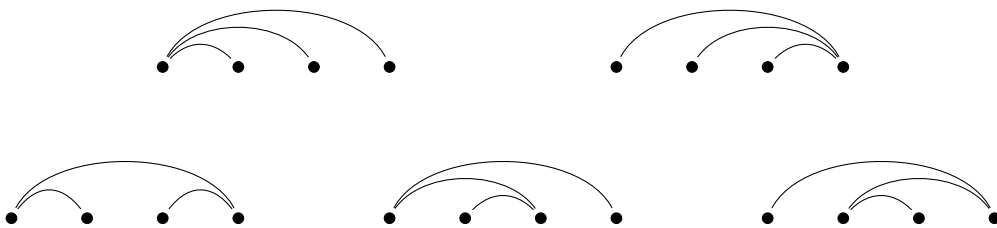
Với $n = 4$ ta có 5 cách kết hợp sau $((a.b).(c.d))$, $((a.(b.c)).d)$, $((((a.b).c).d)$, $(a.(b.(c.d)))$, $(a.((b.c).d))$.

Với bài toán này ta có thể thay các dấu mở ngoặc, đóng ngoặc bởi các điểm trên đường thẳng nếu có lớn hơn bằng hai dấu mở ngoặc (đóng ngoặc) xuất hiện tại cùng một vị trí ta thay bằng một điểm. Khi đó ta có bài toán sau:

Bài 5. Cho $n + 1$ điểm phân biệt nằm trên một đường thẳng. Hỏi có bao nhiêu cách nối các điểm này bởi n cung cùng một phía so với đường thẳng và thỏa hai điều kiện sau:

- i) Hai cung bất kỳ không giao nhau, trừ vị trí đầu mút;
- ii) Với mỗi điểm i , tất cả các điểm có cung nối với điểm i chỉ có thể nằm bên phải hoặc chỉ có thể nằm bên trái điểm i .

Ví dụ khi $n = 3$ ta có các cách nối sau đây



Bài 6. Cho đa giác $A_1A_2A_3 \dots A_n$ với $n \geq 3$. Hỏi có bao nhiêu cách chia đa giác trên thành $n - 2$ tam giác không có phần chung trong (thực hiện bằng cách nối các đường chéo)?

Ví dụ với $n = 5$ ta có 5 cách chia đa giác $A_1A_2A_3A_4A_5$ thành các tam giác như sau

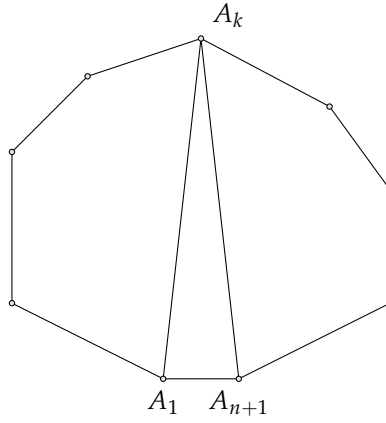
$$A_1A_2A_3, A_1A_3A_4, A_1A_4A_5;$$

$$A_1A_2A_3, A_1A_3A_5, A_3A_4A_5;$$

$$A_2A_3A_4, A_2A_4A_5, A_2A_1A_5;$$

$$A_3A_4A_5, A_1A_2A_5, A_2A_3A_5;$$

$$A_1A_4A_5, A_1A_2A_4, A_2A_3A_4.$$



Ta gọi a_n là số cách phân hoạch đa giác $A_1A_2A_3 \dots A_{n+2}$ thành n tam giác. Ta đặt $a_0 = 1$.

Kiểm tra ta có $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5$.

Ta xét đa giác $A_1A_2A_3 \dots A_{n+2}$, ta vẽ tam giác $A_1A_{n+2}A_k$ với $2 \leq k \leq n+1$ (như hình minh họa).

Ta thấy, bên trái tam giác là một đa giác k đỉnh, bên phải tam giác là một đa giác $n+3-k$ đỉnh.

Mỗi đa giác ấy có số phân hoạch tam giác tương ứng là a_{k-2} và a_{n+1-k} . Và khi cho A_k thay đổi thì ta được số cách phân hoạch là

$$a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + a_2a_{n-3} + \dots + a_{n-1}a_0.$$

Vậy số cách phân hoạch đa giác $A_1A_2A_3 \dots A_{n+2}$ là C_n cách.

□

Bài 7. Có bao nhiêu dãy các số nguyên dương $x_n = \{a_1; a_2; a_3; \dots; a_n\}$ thỏa các điều kiện sau:

i) $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n$.

ii) $a_i \leq i$ với mọi $1 \leq i \leq n$.

Ví dụ, với $n = 3$ ta có 5 dãy số sau $\{1; 1; 1\}, \{1; 1; 2\}, \{1; 1; 3\}, \{1; 2; 2\}, \{1; 2; 3\}$.

Lời giải.

Ta gọi, b_n là số các dãy số thỏa yêu cầu đề.

Ta có, $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5$. Ta đặt $b_0 = 1$.

Ta chứng minh, dãy b_n thỏa công thức truy hồi của số **Catalan**, tức là số các dãy số thỏa yêu cầu đề là C_n .

Xét các dãy có độ dài là $n+1$.

Ta xét tất cả dãy có $a_{n+1} = n+1$, khi đó ta có b_n dãy loại này. Bây giờ ta loại tất cả dãy vừa xét ra, chỉ còn $a_{n+1} < n+1$.

Tiếp theo, ta xét trong những dãy còn lại mà $a_n = n$. Khi đó, $a_{n+1} = n$ nên chỉ có b_{n-1} dãy. Ta tiếp tục loại những dãy này đi và tiếp tục xét cho dãy có đặc điểm $a_{n-1} = n-1$, khi đó $a_n = n-1$ nên

có b_2 dãy $\{a_n; a_{n+1}\}$ và có b_{n-2} dãy $\{a_1; a_2; a_3; \dots; a_{n-2}\}$.

Ta tiếp tục quá trình trên thu được kết quả

$$b_{n+1} = b_0 b_n + b_1 b_{n-1} + b_2 b_{n-2} + \dots + b_n b_0.$$

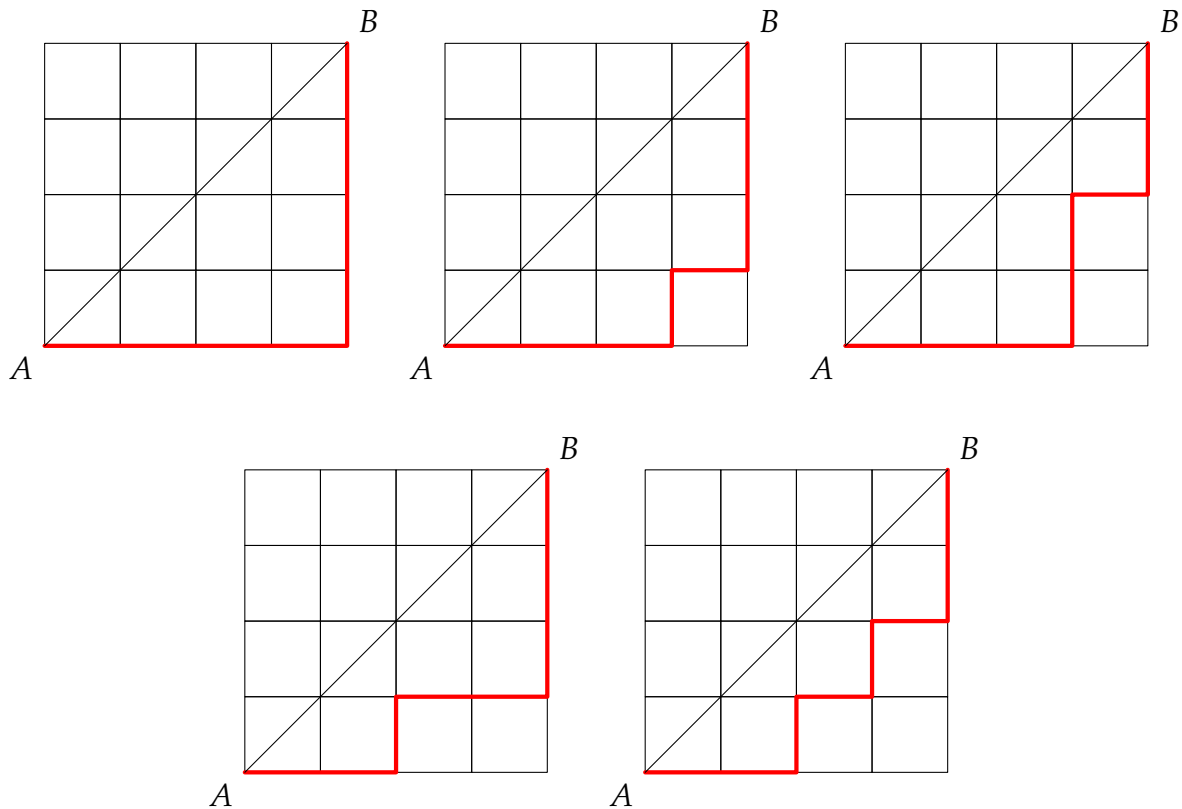
Vậy số các dãy số trên là C_n . □

Từ bài toán trên ta có thay mỗi dãy số đã cho là một cách đi trên lưới ô vuông $n \times n$ theo cách hiểu tương ứng, khi đó ta có bài toán mới sau

Bài 8. Cho một lưới ô vuông $n \times n$. Có bao nhiêu cách di chuyển từ A đến B theo các cạnh trên lưới với quy tắc

- i) Chỉ được di chuyển phải sang trái hoặc dưới lên trên;
- ii) Không đi lên trên đường chéo chính.

Ví dụ khi $n = 4$ ta có các cách di chuyển sau đây



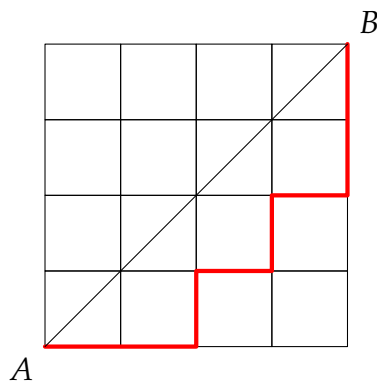
Lời giải.

Để minh họa cho cách "dịch" từ dãy số sang cách di chuyển trên lưới ô vuông, ta xét lưới ô vuông 4×4 .

Để di chuyển từ A đến B ta có đúng 4 bước đi ngang (xen giữa những lần đi ngang có thể là những lần đi lên), đi ngang ở hàng số 1 ta ký hiệu là số 1, đi ngang ở hàng số 2 ta ký hiệu số 2, đi

ngang ở hàng số 3 ta ký hiệu số 3.

Để không đi qua đường chéo chính, tại bước ngang thứ k thì $\leq k$. Như vậy với mỗi dãy số ở bài toán trên ta có một đường đi thỏa yêu cầu đề. Ví dụ xét hình vuông 4×4 đối với dãy $\{1; 1; 2; 3\}$ ta có một đường đi như sau: **ngang; ngang; lên; ngang; lên; ngang; lên; lên** như hình vẽ.



□

Tương tự như cách tiếp cận trên xin giới thiệu với bạn đọc một số bài toán tương tự.

Bài 9. Có bao nhiêu dãy số nguyên dương không giảm $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ thỏa hai điều kiện sau

- i) $a_i \leq n$ với mọi i ;
- ii) Tồn tại một và chỉ một chỉ số k sao cho $a_k = k$.

Ví dụ với $n = 3$ ta có 5 dãy sau $\{1, 1, 1\}$; $\{1, 1, 2\}$; $\{2, 2, 2\}$; $\{2, 3, 3\}$; $\{3, 3, 3\}$.

Bài 10. Có bao nhiêu dãy số nguyên dương $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ thỏa hai điều kiện sau

- i) $\sum_{k=0}^j a_k \geq j$;
- ii) $\sum_{k=0}^n a_k = n$.

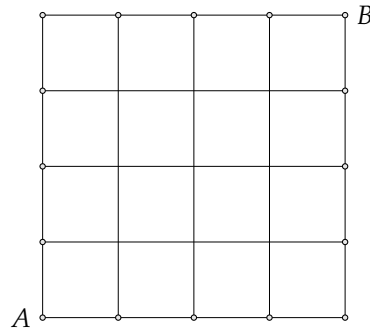
Bài 11. Có bao nhiêu dãy số nguyên $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ thỏa hai điều kiện sau

- i) $a_1 = 0$;
- ii) $0 \leq a_{i+1} \leq a_i + 1$.

3.2. Đường đi của con Kiến

Bài 12. Trên một lưới ô vuông $m \times n$, một con Kiến xuất phát từ vị trí A bò theo các đường trên lưới để đến vị trí B (như hình vẽ). Giả sử, con Kiến thông minh di chuyển từ A đến B với đường đi ngắn nhất. Hỏi có bao nhiêu đường đi có thể được chọn?

Lời giải.



Để có thể di chuyển từ A đến B với đường đi ngắn nhất, con Kiến phải di chuyển đúng n cạnh từ trái sang phải và đúng m cạnh từ trên xuống dưới.

Qua phân tích đó ta có thể xây dựng một mô hình đếm cho bài toán này như sau:

Có bao nhiêu cách sắp một chuỗi kí tự có độ dài $n + m$ trong đó có đúng n kí tự N (tượng trưng cho di chuyển trái sang phải) và m kí tự X (tượng trưng cho di chuyển xuống dưới).

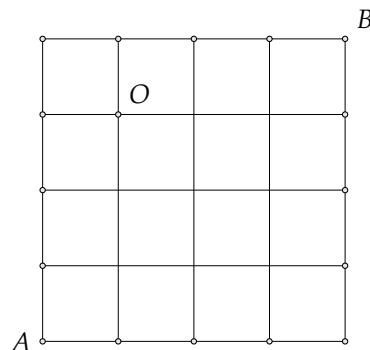
Ta thấy ngay, mỗi chuỗi kí tự như thế là một cách di chuyển của con Kiến từ A đến C .

Lúc này, việc đếm số chuỗi trên vô cùng đơn giản. Để sắp n kí tự N trong chuỗi có độ dài $n + m$ ta có C_{n+m}^n cách sắp và có 1 cách sắp cho m kí tự X vào các vị trí còn lại. Suy ra số chuỗi cần tìm là C_{n+m}^n . $\square$

Như thế, ta đã xây dựng được một mô hình đếm số cách di chuyển của con Kiến thành việc đếm số chuỗi kí tự tương ứng. Đến lúc này ta có thể xây dựng các bài toán khác tương tự như thế.

Bài 13. Trên một lưới ô vuông $m \times n$, một con Kiến xuất phát từ vị trí A bò theo các đường trên lưới để đến vị trí B (như hình vẽ). Giả sử, con Kiến thông minh di chuyển từ A đến B với đường đi ngắn nhất. Hỏi có bao nhiêu đường đi có thể được chọn để con Kiến phải đi qua điểm O trước khi đến B ?

Lời giải.



Khi này, ta thấy lộ trình của Kiến là từ A đến O rồi tiếp tục đến B . Như vậy, ta đếm như trên với việc ghép hai chuỗi con thành một chuỗi lớn. $\square$

Lúc này, ta có thể mở rộng cho việc thêm kí tự mới vào trong chuỗi trên.

Bài 14. Có bao nhiêu chuỗi kí tự có độ dài $m + n + k$ mà trong đó có đúng m kí tự N , n kí tự X và k kí tự T ?

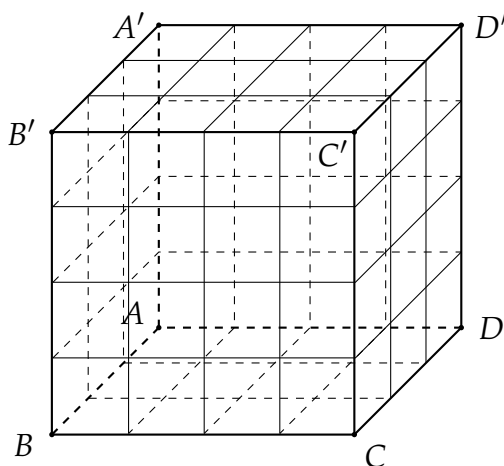
Lời giải.

Có C_{m+n+k}^m cách sắp m kí tự N vào chuỗi còn trống, tiếp theo có C_{n+k}^n cách sắp

□

Với mô hình này ta có bài toán tương ứng của nó

Bài 15. Trong không gian, cho một hình hộp chữ nhật $ABCD A' B' C' D'$ có kích thước $m \times n \times k$ tạo thành một lưới các khối lập phương đơn vị. Một con Kiến thông minh di chuyển trên lưới đi từ A đến C' với đường đi ngắn nhất. Hỏi có bao nhiêu cách di chuyển có thể?



Tương tự như thế, ta có thể thay đổi cách di chuyển của con Kiến thì có cách sắp chuỗi kí tự tương ứng.

Bài 16. Một lưới ô vuông có kích thước 4×6 . Một con Kiến di chuyển từ A đến C . Hỏi có bao nhiêu cách di chuyển mà con Kiến phải đi qua đúng 12 cạnh?

Với yêu cầu này thì cách di chuyển với đường đi không phải ngắn nhất, nên chuỗi tương ứng sẽ có yêu cầu phụ. lời giải bài toán này có rất nhiều cách tiếp cận, xin nhường cho bạn đọc.

3.3. Bài toán chia kẹo Euler

Tiếp theo, tác giả xin giới thiệu mô hình khác, đây là một dạng của bài toán chia kẹo Euler.

Bài 17. Cho phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n$ với k, n là các số nguyên dương $k \leq n$. Tìm số bộ nghiệm nguyên dương của phương trình.

Lời giải.

Ta sắp n số 1 theo một hàng ngang, giữa hai số liền kề tạo ra một khoảng trống. Như vậy có $n - 1$ khoảng trống được tạo ra. Để phân ra thành k nhóm, ta chèn $k - 1$ dấu $+$ vào các khoảng trống đó.

Khi đó, số các số 1 giữa hai dấu $+$ liền kề là một số trong bộ nghiệm cần tìm. Do đó, số cách chèn

$k - 1$ dấu $+$ vào $n - 1$ khoảng trống là số bộ nghiệm nguyên dương của phương trình trên.

Vậy có C_{n-1}^{k-1} bộ nghiệm nguyên dương của phương trình. $\square$

Từ bài toán này ta có thể suy ra số bộ nghiệm nguyên không âm của phương trình

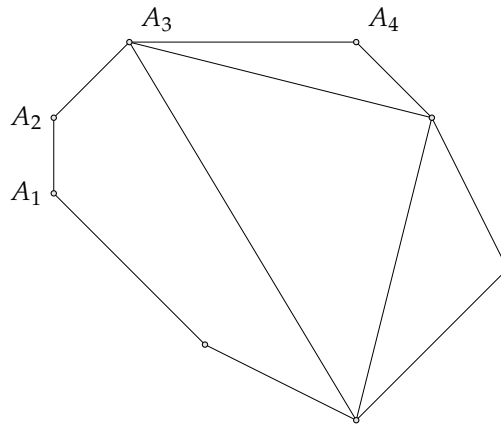
$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k = n$$

là C_{n+k-1}^{k-1} .

Bây giờ từ mô hình này ta có thể xây dựng các bài toán đếm tương ứng.

Bài 18. Cho đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_n$ có n đỉnh với $n > 5$. Từ các đỉnh của đa giác trên ta có thể tạo ra được bao nhiêu tam giác mà cạnh của tam giác không là cạnh của đa giác?

Lời giải.



Với yêu cầu bài toán này, ta thường gặp cách làm bằng phương pháp loại trừ, tức là ta đếm số tam giác bất kỳ được tạo ra từ các đỉnh của đa giác rồi trừ đi số tam giác bị vi phạm yêu cầu bài (một cạnh tam giác trùng với một cạnh đa giác và hai cạnh tam giác trùng hai cạnh đa giác). Như vậy ta có kết quả là $C_n^3 - n(n - 4) - n$.

Tuy nhiên nếu ta chỉ dừng với cách tiếp cận như thế này, thì khi yêu cầu đề thay đổi đếm số tam giác thành đếm số tứ giác, ngũ giác,... thì rất khó giải quyết.

Bây giờ, ta thử tiếp cận bài toán đó với một mô hình vừa giới thiệu ở trên.

Xét tam giác $A_1A_iA_j$ theo một chiều quay đồng hồ là một tam giác thỏa yêu cầu bài. Gọi x_1 là số đỉnh của đa giác nằm giữa hai đỉnh A_1 và A_i (không trùng với hai đỉnh đó), x_2 là số đỉnh của đa giác nằm giữa hai đỉnh A_i và A_j (không trùng với hai đỉnh đó), x_3 là số đỉnh của đa giác nằm giữa hai đỉnh A_j và A_1 (không trùng với hai đỉnh đó).

Khi đó ta có phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = n - 3$, với x_i là các số nguyên dương.

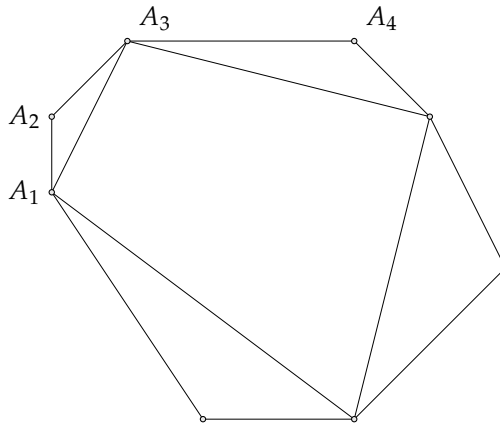
Ta thấy ngay, mỗi bộ nghiệm của phương trình tương ứng với một tam giác như thế thỏa yêu cầu đề. Nên số tam giác như thế là C_{n-4}^2 . Bây giờ ta thay đỉnh A_1 bởi lần lượt $n - 1$ đỉnh khác của đa giác, ta sẽ có đáp án tương tự. Tuy nhiên, với cách làm này ta thấy một tam giác bị đếm lặp 3 lần.

Vậy số tam giác thỏa yêu cầu bài là $\frac{nC_{n-4}^2}{3}$.

Với cách tiếp cận bài toán như thế, ta hoàn toàn có thể thay đổi cách hỏi để ta có được các bài toán khác. Sau đây là một số bài toán khác. $\square$

Bài 19. Cho đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_n$ có n đỉnh với $n > 10$. Từ các đỉnh của đa giác trên ta có thể tạo ra được bao nhiêu tứ giác mà cạnh của tứ giác không là cạnh của đa giác?

 **Lời giải.**



Xét tứ giác $A_1A_iA_jA_k$ theo chiều quay kim đồng hồ, ta gọi x_1 là số đỉnh nằm giữa hai đỉnh A_1 và A_i (không trùng với hai đỉnh đó); x_2 là số đỉnh nằm giữa hai đỉnh A_i và A_j (không trùng với hai đỉnh đó); x_3 là số đỉnh nằm giữa hai đỉnh A_j và A_k (không trùng với hai đỉnh đó); x_4 là số đỉnh nằm giữa hai đỉnh A_k và A_1 (không trùng với hai đỉnh đó).

Khi đó ta có phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n - 4$$

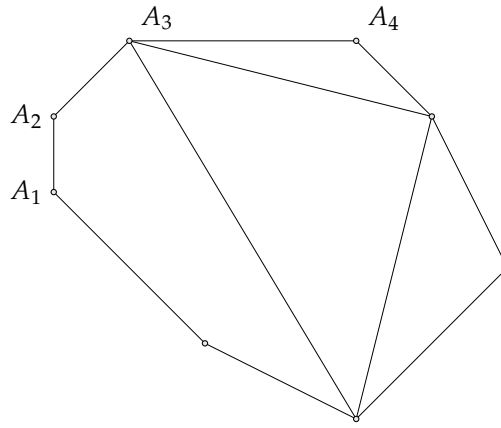
với x_i là các số nguyên dương.

Ta thấy ngay, mỗi bộ nghiệm của phương trình là một tứ giác thỏa yêu cầu đề.

Ta tiếp tục thay thứ tự điểm A_1 bởi các điểm tương ứng khác và mỗi tứ giác bị đếm lặp 4 lần, nên ta có số tứ giác cần tìm là $\frac{nC_{n-5}^3}{4}$. $\square$

Bài 20. Cho đa giác đều $A_1A_2 \dots A_{19}$ có 19 đỉnh. Từ các đỉnh của đa giác trên ta có thể tạo ra được bao nhiêu tam giác nhọn mà cạnh của tam giác không trùng với cạnh đa giác?

 **Lời giải.**



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác. Khi đó $\angle A_i O A_{i+1} = \frac{360^\circ}{19}$.

Xét tam giác $A_1 A_i A_j$ theo một chiều quay đồng hồ là một tam giác thỏa yêu cầu bài. Gọi x_1 là số đỉnh của đa giác nằm giữa hai đỉnh A_1 và A_i (không trùng với hai đỉnh đó), x_2 là số đỉnh của đa giác nằm giữa hai đỉnh A_i và A_j (không trùng với hai đỉnh đó), x_3 là số đỉnh của đa giác nằm giữa hai đỉnh A_j và A_1 (không trùng với hai đỉnh đó).

Để góc $\angle A_i A_1 A_j < 90^\circ$ thì $1 \leq x_2 \leq 9$, tương tự cho các số khác.

Khi đó ta có phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 = 16$$

với x_i là các số nguyên dương thỏa $1 \leq x_i \leq 9$.

Ta thấy ngay, mỗi bộ nghiệm của phương trình tương ứng với một tam giác như thế thỏa yêu cầu đề.

Bây giờ, ta đi tìm số bộ nghiệm của phương trình trên theo cách loại trừ.

Số bộ nghiệm nguyên dương của phương trình là C_{15}^2 . Ta đếm số bộ nghiệm mà tồn tại $x_i > 9$.

Ta có

$$x_1 + x_2 + x_3 = 16$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 9) + x_2 + x_3 = 16 - 9$$

$$\Leftrightarrow y_1 + x_2 + x_3 = 5$$

Số bộ nghiệm nguyên dương của phương trình này là C_4^2 . Vậy số bộ nghiệm mà tồn tại $x_i > 9$ là $3C_4^2$.

Vậy số bộ nghiệm thỏa điều kiện ban đầu là $C_{15}^2 - 3C_4^2$.

Hay số tam giác thỏa yêu cầu đề là $\frac{16}{3} (C_{15}^2 - 3C_4^2)$. □

Với cách tiếp cận bài toán như thế, ta có thể thay đổi các yêu cầu khác để sinh ra các phương trình nghiệm nguyên tương ứng. Việc giải các bài toán này xin phép nhường cho bạn đọc.

Bài 21. Cho $f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^{10}$, giả sử ta có

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

Tìm a_{30} .

Bài 22. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Sử dụng các số từ A để viết thành số tự nhiên. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên được viết, biết số đó có 10 chữ số mà tổng các chữ số của mỗi số bằng 30?

4. Đếm bằng hai cách

4.1. Tổng quan về phương pháp

Với một tập hợp, ta có thể đếm số phần tử của nó theo nhiều hướng khác nhau dựa trên các tính chất của các phần tử. Tất nhiên các kết quả thu được phải như nhau. Dựa trên nhận xét đơn giản này, phương pháp đếm bằng hai cách đã được hình thành. Đây là một trong các phương pháp quan trọng của Tổ hợp. Nó là một công cụ để chứng minh các đẳng thức Tổ hợp và xác định các giá trị trong một hệ ràng buộc của các đối tượng nào đó.

Tư tưởng chính của phương pháp đếm bằng hai cách thường được khai thác theo các hướng sau:

- Một đại lượng nào đó nếu đếm bằng cách thứ nhất thu được kết quả a mà nếu đếm bằng cách thứ hai thu được kết quả b thì $a = b$.
- Một đại lượng nào đó nếu đếm bằng cách thứ nhất thu được kết quả không quá a mà nếu đếm bằng cách thứ hai thu được kết quả không nhỏ hơn b thì $a \geq b$.
- Khai thác giả thiết bài toán bằng cách đếm theo hai hướng khác nhau để từ đó có nhiều thông tin cho bài toán hơn. Và những thông tin mới thu được chính là chìa khóa để giải quyết bài toán.

4.2. Một số ví dụ

Chúng ta sẽ bắt đầu với những ví dụ mà ở đó phương pháp đếm bằng hai cách được khai thác theo hướng: "Một đại lượng nào đó nếu đếm bằng cách thứ nhất thu được kết quả a mà nếu đếm bằng cách thứ hai thu được kết quả b thì $a = b$ ". Từ đó chứng minh đẳng thức yêu cầu của đề bài, chứng minh một tính chất số học hoặc tìm giá trị của một đại lượng nào đó.

Bài 1 (Spain MO 2021). Có $2n$ bóng đèn được mắc thành hai hàng và được đánh số từ 1 đến n ở mỗi hàng. Một số (hoặc không có) bóng đèn sáng và những bóng đèn khác tắt, ta gọi đó là một trạng thái. Hai trạng thái được gọi là phân biệt nếu có bóng đèn nào đó sáng ở trạng thái này nhưng tắt ở trạng thái kia. Ta nói rằng một trạng thái là tốt nếu có cùng số lượng bóng đèn được bật sáng ở hàng đầu tiên và ở hàng thứ hai. Chứng minh rằng số trạng thái tốt chia cho tổng số trạng thái bằng

$$\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot n!}.$$

Lời giải.

Vì mỗi bóng đèn có 2 trạng thái là sáng hoặc tắt nên có tất cả 2^{2n} trạng thái.

Số trạng thái tốt với k bóng đèn được bật sáng ở mỗi hàng ($0 \leq k \leq n$) bằng $\binom{C_n^k}{n}^2$, do đó tổng số

trạng thái tốt là $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$.

Ta tính tổng $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$ bằng hai cách.

Xét hai tập hợp rời nhau A, B , mỗi tập có n phần tử.

Cách đếm thứ nhất: Số tập con có n phần tử của tập $A \cup B$ là C_{2n}^n .

Cách đếm thứ hai: Mỗi tập con của tập $A \cup B$ có n phần tử thì sẽ có k phần tử của tập A và $n - k$ phần tử của tập B với $0 \leq k \leq n$. Do đó số tập con có n phần tử của tập $A \cup B$ là $\sum_{k=0}^n C_n^k C_n^{n-k}$.

Qua hai cách đếm trên, ta được $\sum_{k=0}^n C_n^k C_n^{n-k} = C_{2n}^n$. Từ đó $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$ vì $C_n^{n-k} = C_n^k$.

Suy ra số trạng thái tốt chia cho tổng số trạng thái bằng

$$\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot n!n!} = \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2n)}{2^{2n} \cdot n!n!} = \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1) 2^n \cdot n!}{2^{2n} \cdot n!n!} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot n!}.$$

□

Bài 2 (Hong Kong 1994). Trong một trường học có a giáo viên và b học sinh sao cho:

- i) Mỗi giáo viên dạy đúng k học sinh.
- ii) Mỗi hai học sinh bất kỳ đều có chung đúng h giáo viên giảng dạy.

Chứng minh rằng $\frac{a}{h} = \frac{b(b-1)}{k(k-1)}$.

 **Lời giải.**

Giả sử tập hợp các giáo viên là $T = \{T_1, T_2, \dots, T_a\}$ và tập hợp các học sinh là $S = \{S_1, S_2, \dots, S_b\}$.

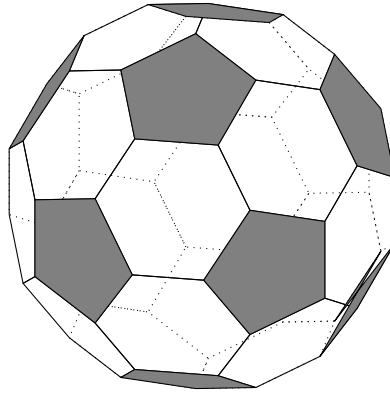
Ta sẽ đếm số bộ $(T_r, \{S_i, S_j\})$ trong đó $T_r \in T$ và $\{S_i, S_j\} \subset S$ sao cho T_r dạy hai học sinh S_i và S_j .

Cách đếm thứ nhất: Với mỗi giáo viên T_r có đúng k học sinh mà T_r dạy nên có C_k^2 cách chọn tập $\{S_i, S_j\}$. Do đó, số bộ $(T_r, \{S_i, S_j\})$ là aC_k^2 .

Cách đếm thứ hai: Với mỗi hai học sinh khác nhau trong số b học sinh (có C_b^2 tập hai học sinh như vậy), có chung đúng h giảng dạy. Do đó, số bộ $(T_r, \{S_i, S_j\})$ là hC_b^2 .

Qua hai cách đếm ta được $aC_k^2 = hC_b^2 \Leftrightarrow \frac{a}{h} = \frac{b(b-1)}{k(k-1)}$. □

Bài 3. Người ta dùng các miếng da để ghép lại thành quả bóng đá hình cầu. Các miếng da có hình ngũ giác đều hoặc lục giác đều như hình vẽ.



Chứng minh rằng số lượng miếng da cần dùng bằng 32.

📌 Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là số miếng da hình ngũ giác và lục giác. Ta sẽ đếm số cặp (A, B) với hình ngũ giác A kề với hình lục giác B bằng hai cách. Gọi S là số cặp đó.

Cách đếm thứ nhất: Đầu tiên chọn một hình ngũ giác, có x cách. Sau đó, chọn một lục giác kề với ngũ giác vừa chọn, có 5 cách. Do đó $S = 5x$.

Cách đếm thứ hai: Đầu tiên chọn một lục giác, có y cách. Sau đó, chọn một ngũ giác kề với lục giác vừa chọn, có 3 cách. Do đó $S = 3y$.

Qua hai cách đếm trên ta được $5x = 3y$.

Ngoài ra, ta có thể xem mỗi miếng da là một mặt của đa diện, thì theo định lý Euler về đa diện trong không gian, ta có số cạnh bằng số mặt cộng số đỉnh trừ 2, trong đó số đỉnh là $5x$, số mặt là $x + y$ và số cạnh là $\frac{5x + 6y}{2}$, tức là $5x + (x + y) - \frac{5x + 6y}{2} = 2$.

Kết hợp với $5x = 3y$, giải được $x = 12, y = 30$.

Vậy tổng số miếng da cần dùng là 32. □

Bài 4 (Hải Phòng 2020). Trong một phòng họp có n người. Hai người bất kỳ quen nhau hoặc không quen nhau. Biết rằng:

- i) Một người quen đúng 30 người khác.
- ii) Một cặp quen nhau thì có đúng 19 người khác quen với cả hai người đó.
- iii) Một cặp không quen nhau thì có đúng 20 người khác quen với cả hai người đó.

Tìm tất cả các giá trị có thể có của n .

📌 Lời giải.

Giả sử n người là $A_1, A_2, \dots, A_n$. Gọi S là tập hợp các bộ ba có thứ tự (A_i, A_j, A_k) sao cho A_i, A_j, A_k là ba người khác nhau mà A_k quen với cả A_i và A_j nhưng A_i, A_j thì không quen nhau. Ta đếm $|S|$.

Cách đếm thứ nhất: Chọn ngẫu nhiên A_i có n cách chọn. Chọn A_j có $(n - 31)$ cách chọn (vì A_i có đúng 30 người quen). Chọn A_k có 20 cách. Do đó $|S| = 20n(n - 31)$.

Cách đếm thứ hai: Chọn ngẫu nhiên A_k có n cách chọn. Có 30 cách chọn A_i . Số người quen A_k còn lại là 29 trong đó có 19 người quen chung với A_i . Suy ra có 10 người chỉ quen A_k mà không quen A_i , từ đó có 10 cách chọn A_j . Nên $|S| = 300n$.

Qua hai cách đếm, ta được $20n(n - 31) = 300n \Leftrightarrow n = 46$. □

Bài 5 (IMO Shortlist 1995). Một cuộc họp có $12k$ người và mỗi người bắt tay với đúng $3k + 6$ người còn lại, với k là số nguyên dương. Biết rằng với mọi cách chọn cặp hai người, số người bắt tay với cả hai là như nhau. Tính số người trong cuộc họp.

➡️ Lời giải.

Ta sẽ đếm số bộ (A, B, C) mà C bắt tay với cả A, B nhưng A, B không bắt tay với nhau theo hai cách. Đặt số bộ này là S .

Cách đếm thứ nhất: Đếm theo A, B . Đầu tiên, chọn một người A tùy ý, có $12k$ cách. Tiếp theo, chọn một người B không bắt tay với A , có $12k - (3k + 6) - 1 = 9k - 7$ cách. Cuối cùng, chọn một người C không bắt tay với cả A, B , theo đề số cách chọn này là như nhau với tất cả các cặp A, B , đặt là m . Do đó $S = 12k(9k - 7)m$.

Cách đếm thứ hai: Đếm theo C . Đầu tiên, chọn một người C tùy ý, có $12k$ cách. Tiếp theo, chọn một người A mà C bắt tay, có $3k + 6$ cách. Cuối cùng, chọn một người B bắt tay với C nhưng không bắt tay với A , có $3k + 5 - m$ cách vì có m người bắt tay với cả A, C . Do đó $S = 12k(3k + 6)(3k + 5 - m)$.

Qua hai cách đếm trên, ta được $12k(9k - 7)m = 12k(3k + 6)(3k + 5 - m)$.

$$\text{Suy ra } m = \frac{3(k + 2)(3k + 5)}{12k - 1}.$$

Giải phương trình nghiệm nguyên này ta được $k = 3, m = 6$.

Có thể xây dựng một mô hình thỏa mãn điều kiện đề bài như sau: Xem mỗi người tương ứng với một điểm có tọa độ (x, y) trên mặt phẳng Oxy với $1 \leq x, y \leq 6$. Người (x, y) bắt tay với người (u, v) nếu một trong các điều kiện $x = u, y = v, x + y \equiv u + v \pmod{6}$ được thỏa mãn.

Vậy số người trong cuộc họp là 36. □

Bài 6 (IMO Shortlist 2004). Trong một trường trung học, có 10001 học sinh tổ chức các câu lạc bộ (một học sinh có thể tham gia nhiều câu lạc bộ). Các câu lạc bộ phối hợp với nhau để tổ chức các hoạt động xã hội. Biết rằng có k hoạt động xã hội thỏa mãn

- i) mỗi cặp học sinh thuộc đúng một câu lạc bộ;
- ii) với mỗi học sinh và mỗi hoạt động xã hội, học sinh này thuộc đúng một câu lạc bộ trong hoạt động xã hội tương ứng;

iii) mỗi câu lạc bộ có một số lẻ thành viên và nếu số thành viên là $2m + 1$ thì số hoạt động xã hội là m .

Tính tất cả các giá trị có thể có của k .

Lời giải.

Trước hết, ta đếm số bộ S có dạng (A, B, C) với A tham gia câu lạc bộ B nằm trong hoạt động xã hội C .

Cách đếm thứ nhất: Đếm theo hoạt động xã hội và học sinh, ta có $S = 10001k$.

Cách đếm thứ hai: Đếm theo câu lạc bộ và hoạt động xã hội. Gọi t là số câu lạc bộ và $a_1, a_2, \dots, a_t$ là số thành viên của từng câu lạc bộ đó. Theo iii) câu lạc bộ có a_i thành viên thì thuộc về đúng $\frac{a_i - 1}{2}$ hoạt động xã hội. Đồng thời theo điều kiện ii) thì

$$S = \frac{a_1(a_1 - 1)}{2} + \frac{a_2(a_2 - 1)}{2} + \dots + \frac{a_t(a_t - 1)}{2}.$$

Qua hai cách đếm trên, ta được

$$10001k = \frac{a_1(a_1 - 1)}{2} + \frac{a_2(a_2 - 1)}{2} + \dots + \frac{a_t(a_t - 1)}{2}.$$

Tiếp theo ta đếm số bộ T có dạng (D, E, F) mà hai học sinh D, E cùng thuộc về câu lạc bộ F .

Cách đếm thứ 1: Đếm theo học sinh, từ i) ta có $T = C_{10001}^2$.

Cách đếm thứ 2: Đếm theo câu lạc bộ, ta có $T = \frac{a_1(a_1 - 1)}{2} + \frac{a_2(a_2 - 1)}{2} + \dots + \frac{a_t(a_t - 1)}{2}$

Qua hai cách đếm trên, ta được

$$C_{10001}^2 = \frac{a_1(a_1 - 1)}{2} + \frac{a_2(a_2 - 1)}{2} + \dots + \frac{a_t(a_t - 1)}{2}.$$

Vậy $10001k = C_{10001}^2 \Leftrightarrow k = 5000$. □

Tiếp theo chúng ta sẽ đi đến những ví dụ mà ở đó phương pháp đếm bằng hai cách được khai thác theo hướng: “Một đại lượng nào đó nếu đếm bằng cách thứ nhất thu được kết quả không quá a mà nếu đếm bằng cách thứ hai thu được kết quả không nhỏ hơn b thì $a \geq b$ ”. Qua đó, chúng ta chứng minh được các bất đẳng thức theo yêu cầu của đề bài.

Bài 7 (OLP HSSV 2024). Cho số nguyên dương n và một tập $\wp_n$ gồm n điểm trong mặt phẳng. Với mỗi điểm $X \in \wp_n$, ta gọi $d(X)$ là số các điểm thuộc $\wp_n$ có khoảng cách bằng 1 tới X . Xét T là tập hợp các bộ ba điểm sắp thứ tự (A, B, C) với A, B, C là các điểm phân biệt thuộc $\wp_n$ và $AC = BC = 1$. Chứng minh rằng:

a) $|T| \leq 2n(n - 1)$.

b) $|T| = \sum_{X \in \wp_n} d(X)(d(X) - 1)$.

Lời giải.

Ta sẽ đếm $|T|$ theo hai cách.

Cách đếm thứ nhất: Đầu tiên, chọn một điểm A tùy ý, có n cách chọn. Tiếp theo, chọn một điểm B tùy ý khác điểm A , có $n - 1$ cách chọn. Cuối cùng, chọn điểm C sao cho $AC = BC = 1$ thì C phải thuộc đồng thời các đường tròn tâm A bán kính 1 và đường tròn tâm B bán kính 1, có tối đa 2 cách chọn điểm C . Do đó $|T| \leq 2n(n - 1)$, ta có kết quả của câu a).

Cách đếm thứ hai: Với mỗi điểm $C \in \wp_n$, có $d(C)$ điểm trong $\wp_n$ có khoảng cách bằng 1 tới C . Do đó có $A_{d(C)}^2 = d(C)(d(C) - 1)$ cách chọn cặp điểm có thứ tự (A, B) sao cho $AC = BC = 1$. Vì vậy $|T| = \sum_{X \in \wp_n} d(X)(d(X) - 1)$, ta có kết quả của câu b). $\square$

Bài 8 (Phổ thông năng khiếu 2020). Một trường phổ thông có n học sinh. Các học sinh tham gia vào nhiều câu lạc bộ khác nhau và có tất cả m câu lạc bộ. Giả sử mỗi câu lạc bộ có đúng 4 học sinh và với hai học sinh bất kỳ thì tham gia chung với nhau tối đa một câu lạc bộ. Chứng minh rằng $m \leq \frac{n(n-1)}{12}$.

Lời giải.

Gọi S là tập hợp các bộ $(\{A, B\}, C)$ với $\{A, B\}$ là tập hai học sinh mà hai học sinh đó cùng tham gia câu lạc bộ C . Ta sẽ đếm $|S|$ theo hai cách.

Cách đếm thứ nhất: Ta có m cách chọn câu lạc bộ C . Với mỗi câu lạc bộ như vậy, có $C_4^2 = 6$ cách chọn hai học sinh A, B cùng tham gia câu lạc bộ đó. Do đó $|S| = 6m$.

Cách đếm thứ hai: Chọn hai học sinh A, B bất kỳ thì có C_n^2 cách chọn. Vì hai học sinh bất kỳ tham gia chung với nhau tối đa một câu lạc bộ nên $|S| \leq C_n^2$.

Qua hai cách đếm, ta được $6m \leq C_n^2 \Leftrightarrow m \leq \frac{n(n-1)}{12}$. $\square$

Bài 9 (Phổ thông năng khiếu 2014). Cho X là một tập hợp gồm 19 phần tử. Xét một họ Ω gồm k tập con có 7 phần tử của X ($k > 0$). Một tập $A \subset X$ được gọi là một cận trên của Ω nếu $|A| = 8$ và tồn tại một tập con F của họ Ω sao cho $F \subset A$. Gọi d là số tập con cận trên của họ Ω . Chứng minh rằng $d \geq \frac{3}{2}k$.

Lời giải.

Gọi S là các bộ (A, B) trong đó $A \in \Omega, B \subset X, |B| = 8$ và $A \subset B$. Ta sẽ đếm $|S|$ bằng hai cách.

Cách đếm thứ nhất: Đếm theo A . Ta chọn một tập hợp A trong Ω , có k cách. Số cách chọn tập B bằng với số cách chọn thêm một phần tử nào đó thuộc $X \setminus A$, có 12 cách. Do đó $|S| = 12k$.

Cách đếm thứ hai: Đếm theo B . Ta chọn một tập hợp B , có d cách. Để thu được một tập con có 7 phần tử từ B , ta chỉ cần loại đi một phần tử trong B , có 8 cách. Tuy nhiên tập hợp thu được có thể không thuộc Ω nên $|S| \leq 8d$.

Qua hai cách đếm, ta được $12k \leq 8d \Leftrightarrow d \geq \frac{3}{2}k$. $\square$

Bài 10 (Iran 2010). Cho n điểm trong mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng số tam giác có diện tích bằng 1 với ba đỉnh là 3 điểm trong số n điểm trên không vượt quá $\frac{2}{3}(n^2 - n)$.

Lời giải.

Gọi m là số tam giác có diện tích bằng 1 với ba đỉnh là 3 điểm trong số n điểm đã cho. Ta sẽ đếm số cặp (cạnh, tam giác) trong các tam giác nói trên bằng hai cách.

Cách đếm thứ nhất: Đếm theo cạnh. Chọn một đoạn thẳng AB làm cạnh, có C_n^2 cách. Khi đó nếu điểm C thỏa mãn thì khoảng cách từ C đến AB bằng $\frac{2}{AB}$, có tối đa 4 cách chọn điểm C vì không có 3 điểm nào thẳng hàng. Do đó số cặp (cạnh, tam giác) không quá $4C_n^2$.

Cách đếm thứ hai: Đếm theo tam giác. Có m tam giác, mỗi tam giác có 3 cách chọn cạnh nên số cặp (cạnh, tam giác) là $3m$.

Qua hai cách đếm ta được $3m \leq 4C_n^2 \Leftrightarrow m \leq \frac{2}{3}(n^2 - n)$. $\square$

Bài 11 (Chuyên ĐH Vinh 2020). Có 16 học sinh tham gia làm bài thi trắc nghiệm. Đề thi chung cho tất cả các học sinh có n câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời. Sau khi thi xong, thầy giáo nhận thấy với mỗi câu hỏi, mỗi học sinh chọn đúng một phương án trả lời và hai học sinh bất kỳ có nhiều nhất một câu hỏi có phương án chọn giống nhau. Chứng minh rằng $n \leq 5$.

Lời giải.

Gọi S là tập hợp các bộ $(\{A, B\}, T)$ với $\{A, B\}$ là tập hai học sinh mà hai học sinh đó cùng chọn phương án T . Ta sẽ đếm $|S|$ theo hai cách.

Cách đếm thứ nhất: Đếm theo học sinh. Chọn hai học sinh A, B bất kỳ thì có C_{16}^2 cách chọn. Vì hai học sinh bất kỳ có nhiều nhất một câu hỏi có phương án chọn giống nhau nên $|S| \leq C_{16}^2$.

Cách đếm thứ hai: Đếm theo lựa chọn. Gọi a_i, b_i, c_i, d_i lần lượt là số học sinh chọn phương án A, B, C, D ở câu hỏi i . Khi đó

$$|S| = \sum_{i=1}^n (C_{a_i}^2 + C_{b_i}^2 + C_{c_i}^2 + C_{d_i}^2) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + d_i^2 - 16}{2}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + d_i^2 \geq \frac{(a_i + b_i + c_i + d_i)^2}{4} = 64$, do đó $|S| \geq 24n$.

Qua hai cách đếm, ta được $24n \leq C_{16}^2 \Leftrightarrow n \leq 5$. $\square$

Bài 12 (OLP 30/4 năm 2024). Ban chấp hành Đoàn trường THPT X gồm có n thành viên. Trong năm học, Đoàn trường tổ chức m chương trình, mỗi chương trình có đúng k thành viên trong ban chấp hành tham gia. Mỗi thành viên trong ban chấp hành tham gia ít nhất một chương trình. Cho $n = 25; k = 10$. Biết rằng với hai chương trình bất kỳ luôn có không quá 3 thành viên trong ban chấp hành cùng tham gia. Chứng minh $m \leq 6$.

Lời giải.

Gọi S là tập hợp các bộ $(\{x, y\}, A)$ với $\{x, y\}$ là tập hai chương trình mà A là thành viên trong ban chấp hành tham gia cả hai chương trình đó. Ta sẽ đếm $|S|$ theo hai cách.

Cách đếm thứ nhất: Trước hết chọn cặp chương trình $\{x, y\}$, có C_m^2 cách chọn. Tiếp theo chọn A là thành viên trong ban chấp hành tham gia cả hai chương trình đó, có tối đa 3 cách chọn. Do đó $|S| \leq 3C_m^2$.

Cách đếm thứ hai: Với mỗi thành viên $A_i, i = \overline{1, n}$ trong ban chấp hành, kí hiệu a_i là số chương trình mà A_i tham gia. Khi đó $\sum_{i=1}^n a_i = mk$. Với mỗi thành viên A_i , số cách chọn cặp chương trình

$\{x, y\}$ mà A_i tham gia cả hai là $C_{a_i}^2$. Do đó $|S| = \sum_{i=1}^n C_{a_i}^2$.

Qua hai cách đếm trên, ta được $\sum_{i=1}^n C_{a_i}^2 \leq 3C_m^2$.

Mà theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\sum_{i=1}^n C_{a_i}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2 - \sum_{i=1}^n a_i}{2} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2}{2 \cdot n} - \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{2} = \frac{m^2 k^2}{2n} - \frac{mk}{2}.$$

Suy ra $2m^2 - 5m \leq \frac{3(m^2 - m)}{2}$. Từ đó $m \leq 7$.

Tuy nhiên, $m = 7$ thì tất cả các đánh giá trên đều phải xảy ra đẳng thức, tức là

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{25} = \frac{70}{25},$$

điều này vô lý. Vậy nên $m \leq 6$. □

Bài 13 (USA MO 2011). Cho tập hợp A có 225 phần tử. Các tập $A_1, A_2, \dots, A_{11}$ là các tập con của A sao cho: $|A_i| = 45$ với $1 \leq i \leq 11$ và $|A_i \cap A_j| = 9$ với $1 \leq i < j \leq 11$.

Chứng minh rằng $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{11}| \geq 165$. Chỉ ra một ví dụ trong trường hợp đẳng thức xảy ra.

Lời giải.

Ta sẽ đếm số bộ (A_i, A_j, x) với $1 \leq i < j \leq 11$ và phần tử x thuộc cả hai tập A_i, A_j bằng hai cách. Gọi S là số bộ này.

Cách đếm thứ nhất: Chọn hai tập A_i, A_j tùy ý, có C_{11}^2 cách. Vì $|A_i \cap A_j| = 9$ nên có 9 cách chọn phần tử x . Do đó $S = 9 \cdot C_{11}^2 = 495$.

Cách đếm thứ hai: Giả sử $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{11}| = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Với mỗi phần tử x_i , gọi m_{x_i} là số tập con chứa x_i . Khi đó số cách chọn hai tập con cùng chứa x_i là $C_{m_{x_i}}^2$. Do đó $S = \sum_{i=1}^n C_{m_{x_i}}^2$.

Qua hai cách đếm, ta được $\sum_{i=1}^n C_{m_{x_i}}^2 = 495$.

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\sum_{i=1}^n C_{m_{x_i}}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (m_{x_i}^2 - m_{x_i}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_{x_i}^2 - \sum_{i=1}^n m_{x_i} \right) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n m_{x_i} \right)^2 - \sum_{i=1}^n m_{x_i} \right).$$

Mà $|A_i| = 45$ với $1 \leq i \leq 11$ nên $\sum_{i=1}^n m_{x_i} = 45 \times 11 = 495$.

Suy ra $495 \geq \frac{1}{2} \left(\frac{495^2}{n} - 495 \right)$. Từ đó $n \geq 165$.

Ta có thể chỉ một ví dụ trường hợp đẳng thức xảy ra như sau:

Không mất tổng quát, giả sử $A = \{1, 2, 3, \dots\}$. Ta xây dựng 11 tập con của A mà mỗi số i xuất hiện đúng 3 lần trong các tập con. Khi đó $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{11}| = C_{11}^3 = 165$, $|A_i| = C_{10}^2 = 45$ với $1 \leq i \leq 11$ và $|A_i \cap A_j| = C_9^1 = 9$ với $1 \leq i < j \leq 11$. $\square$

Bài 14 (Iran 2014). Trường phù thủy và pháp sư Hogwarts có n học sinh. Các học sinh của trường rất hiếu động và tham gia vào nhiều câu lạc bộ khác nhau. Cả trường có tất cả m câu lạc bộ. Theo quy định của trường mà thầy hiệu trưởng Albus Dumbledore công bố thì mỗi câu lạc bộ phải có ít nhất hai thành viên. Nghiên cứu danh sách các câu lạc bộ của trường, Harry Potter nhận thấy một điều thú vị sau đây: nếu câu lạc bộ nào đó có ít nhất hai thành viên chung thì hai câu lạc bộ sẽ có số thành viên khác nhau. Chứng minh rằng $m \leq (n-1)^2$.

 **Lời giải.**

Với mỗi $i \in \{2, 3, \dots, n\}$, gọi a_i là số câu lạc bộ có số thành viên là i , khi đó

$$m = a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

Gọi S là các bộ (A, B, C) mà trong đó cặp học sinh (A, B) (không kể thứ tự) tham gia vào câu lạc bộ C có số thành viên là i . Ta sẽ đếm $|S|$ bằng hai cách.

Cách đếm thứ nhất: Đếm theo câu lạc bộ. Với mỗi $i \in \{2, 3, \dots, n\}$, ta chọn ra câu lạc bộ có i thành viên, có a_i cách. Chọn hai học sinh tham gia vào câu lạc bộ đó, có C_i^2 cách. Do đó $|S| = \sum a_i \cdot C_i^2$.

Cách đếm thứ hai: Đếm theo học sinh. Chọn hai học sinh bất kỳ, có C_n^2 cách. Chọn câu lạc bộ mà hai học sinh này cùng tham gia thì chỉ có không quá một câu lạc bộ. Do đó $|S| \leq C_n^2$.

Qua hai cách đếm, ta được $a_i \cdot C_i^2 \leq C_n^2$. Suy ra $a_i \leq \frac{n(n-1)}{i(i-1)}$. Từ đó,

$$\begin{aligned} m &= a_2 + a_3 + \dots + a_n \\ &\leq n(n-1) \left[\frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} \right] \\ &= n(n-1) \left(1 - \frac{1}{n} \right) \\ &= (n-1)^2 \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài 15 (IMO 1998). Trong một cuộc thi có a thí sinh tham dự và b vị giám khảo (với $b \geq 3$ và b là số nguyên lẻ). Mỗi vị giám khảo sẽ chấm cho thí sinh là đậu hoặc trượt. Giả sử k là số mà mỗi hai vị giám khảo sẽ có cùng một kết quả đánh giá cho tối đa k thí sinh. Chứng minh rằng $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.

Lời giải.

Xét bảng ô vuông kích thước $b \times a$. Mỗi ô (i, j) (ô thuộc hàng i và cột j) được điền bởi số $x_{i,j}$ theo quy tắc sau: $x_{i,j} = 1$ nếu giám khảo i chấm đậu cho thí sinh j và $x_{i,j} = 0$ nếu giám khảo i chấm trượt cho thí sinh j .

Gọi T là tập các cặp (không thứ tự) gồm hai số 0 và các cặp (không thứ tự) gồm hai số 1 thuộc cùng một cột. Ta sẽ đếm $|T|$ theo hai cách:

Cách đếm thứ nhất: Đếm theo hàng. Vì hai vị giám khảo bất kỳ có cùng một kết quả chấm cho tối đa k thí sinh nên $|T| \leq kC_b^2$.

Cách đếm thứ hai: Đếm theo cột. Giả sử trên một cột tùy ý có p số 0 và q số 1. Khi đó số cặp hai số 0 và hai số 1 trên cột này là $C_p^2 + C_q^2$.

Ta có

$$\begin{aligned} C_p^2 + C_q^2 &\geq C_{\frac{b-1}{2}}^2 + C_{\frac{b+1}{2}}^2 = \frac{(b-1)^2}{2} \\ \Leftrightarrow 2p^2 + 2q^2 &\geq (p+q)^2 + 1 \\ \Leftrightarrow (p-q)^2 &\geq 1 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $p+q=b$ là số lẻ.

$$\text{Từ đó } |T| \geq \frac{a(b-1)^2}{2}.$$

Qua hai cách đếm trên ta được

$$\frac{a(b-1)^2}{2} \leq kC_b^2 \Leftrightarrow \frac{b-1}{2b} \leq \frac{k}{a}.$$

□

Bài 16 (India TST 2010). Cho bảng vuông kích thước 10×10 , mỗi ô thuộc hàng i cột j được điền bởi một số thực dương a_{ij} sao cho tổng các số thuộc mỗi hàng, mỗi cột của bảng luôn bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại $j, k, l, m \in \{1, 2, \dots, 10\}$ với $j < k$ và $l < m$ sao cho

$$a_{jl}a_{km} + a_{jm}a_{kl} \geq \frac{1}{50}$$

Lời giải.

Ta để ý rằng bốn số $a_{jl}, a_{km}, a_{jm}, a_{kl}$ là bốn số thuộc bốn ô góc của một hình chữ nhật có các cạnh song song hoặc trùng với các cạnh của bảng 10×10 . Ngược lại, mỗi hình chữ nhật thuộc bảng cho ta một tổng dạng như trên.

Giả sử, với mọi $j, k, l, m \in \{1, 2, \dots, 10\}$ mà $j < k$ và $l < m$ thì $a_{jl}a_{km} + a_{jm}a_{kl} < \frac{1}{50}$.

Gọi S là tổng của các tổng trên. Ta đếm S theo hai cách:

Cách đếm thứ nhất: Ta có $C_{10}^2 \times C_{10}^2 = 45^2$ hình chữ nhật thuộc bảng. Theo giả thiết phản chứng, ta được $S < 45^2 \times \frac{1}{50} = \frac{81}{2}$.

Cách đếm thứ hai: Đếm theo ô chứa số a_{ij} . Ta có

$$S = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq 10} a_{ij} S_{ij},$$

trong đó S_{ij} là tổng các số thuộc các ô của bảng trừ các ô thuộc hàng i và trừ các ô thuộc cột j . Vì tổng các ô thuộc mỗi hàng, mỗi cột là 1 nên

$$S_{ij} = 10 - 1 - 1 + a_{ij} = 8 + a_{ij}.$$

Do đó

$$S = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq 10} a_{ij} (a_{ij} + 8) = 4 \sum_{1 \leq i, j \leq 10} a_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq 10} a_{ij}^2.$$

Vì $\sum_{1 \leq i, j \leq 10} a_{ij} = 10$ nên ta có $\sum_{1 \leq i, j \leq 10} a_{ij}^2 \geq \frac{\left(\sum_{1 \leq i, j \leq 10} a_{ij}\right)^2}{100} = 1$. Do đó $S \geq 4 \times 10 + \frac{1}{2} = \frac{81}{2}$.

Qua hai cách đếm, ta có điều mâu thuẫn. Bài toán được chứng minh. $\square$

Bài 17 (China TST 2011). Cho S là một tập n điểm trong mặt phẳng sao cho không có bốn điểm nào là thẳng hàng. Đặt $\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ là tập các khoảng cách từ cặp hai điểm thuộc S . Đặt m_i là số tập con $\{P, Q\} \subset S$ sao cho $PQ = d_i$. Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^k m_i^2 \leq n^3 - n^2$.

Lời giải.

Giả sử tập $S = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$. Gọi T là tập các bộ (P, A_i, d_j) trong đó:

- $A_i \in S, d_j \in \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$.
- P là tập gồm hai điểm $\{A_k, A_l\}$ sao cho tam giác $A_i A_k A_l$ cân tại A_i và có độ dài cạnh bên bằng d_j .

Ta sẽ đếm $|T|$ bằng hai cách.

Cách đếm thứ nhất: Số cách chọn tập $P = \{A_k, A_l\}$ là C_n^2 . Điểm A_i được chọn khi đó phải thuộc đường trung trực của $A_k A_l$. Theo giả thiết, không có bốn điểm nào thẳng hàng nên có tối đa 3 cách chọn A_i . Với mỗi cách chọn A_i ta có duy nhất một cách chọn d_j . Do đó $|T| \leq 3C_n^2$.

Cách đếm thứ hai: Xét điểm A_i , ta gọi $H_{i,j}$ là tập các điểm A_t sao cho $A_i A_t = d_j$. Ta có

$$\sum_{i=1}^n |H_{i,j}| = 2m_j.$$

Với mỗi d_j , ta xét A_i thì có $C_{|H_{i,j}|}^2$ cách chọn ra cặp $P = \{A_k, A_l\}$ sao cho tam giác $A_i A_k A_l$ cân tại A_i và có độ dài cạnh bên bằng d_j . Do đó $|T| = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n C_{|H_{i,j}|}^2$.

Qua hai cách đếm trên ta được

$$3C_n^2 \geq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n C_{|H_{i,j}|}^2 \Leftrightarrow 3C_n^2 \geq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{|H_{i,j}|^2 - |H_{i,j}|}{2}.$$

Mà theo bất đẳng thức Cauchy, ta có $\sum_{i=1}^n \frac{|H_{i,j}|^2 - |H_{i,j}|}{2} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^n |H_{i,j}|\right)^2}{2n} - m_j = \frac{2m_j^2}{n} - m_j$.

$$\text{Nên } 3C_n^2 \geq \sum_{j=1}^m \left(\frac{2m_j^2}{n} - m_j \right) \Leftrightarrow 3C_n^2 \geq \sum_{j=1}^m \frac{2m_j^2}{n} - C_n^2 \Leftrightarrow n^3 - n^2 \geq \sum_{i=1}^k m_i^2. \quad \square$$

Cũng với cùng ý tưởng như các ví dụ trên, chúng ta có thể giải quyết các bài toán về cực trị trong tổ hợp. Các ví dụ sau đây sẽ minh họa cho điều đó.

Bài 18 (Chuyên KHTN Hà Nội 2015). Xét một nhóm n người với n nguyên dương và $n \leq 475$. Hai người bất kỳ trong nhóm quen nhau hoặc không quen nhau. Biết rằng tồn tại số nguyên dương $m \geq 10$ sao cho có thể chia nhóm này thành m nhóm nhỏ phân biệt, đánh số từ 1 đến m sao cho mỗi người ở nhóm i quen với đúng j người ở nhóm j với mọi i, j phân biệt thuộc $\{1, 2, \dots, m\}$. Tìm giá trị lớn nhất có thể có của n .

Lời giải.

Gọi $a_1, a_2, \dots, a_m$ là số người của nhóm $1, 2, \dots, m$. Khi đó $a_1 + a_2 + \dots + a_m = n$.

Với hai nhóm thứ i và j với i, j phân biệt thuộc $\{1, 2, \dots, m\}$, ta đếm số bộ hai người (A, B) với A thuộc nhóm i , B thuộc nhóm j mà A quen B bằng hai cách.

Cách đếm thứ nhất: Đếm theo nhóm i . Ta được ja_i bộ.

Cách đếm thứ hai: Đếm theo nhóm j . Ta được ia_j bộ.

Qua hai cách đếm, ta được $ia_j = ja_i$, với mọi i, j phân biệt thuộc $\{1, 2, \dots, m\}$.

$$\text{Từ đó, } \frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{2} = \dots = \frac{a_m}{m} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{1 + 2 + \dots + m} = \frac{2n}{m(m+1)}.$$

Suy ra n chia hết cho số $\frac{m(m+1)}{2}$. Vì $m \geq 10$ nên $\frac{m(m+1)}{2} \geq 55$ và $n \leq 475$ nên tính toán trực tiếp ta được giá trị lớn nhất của n bằng 468, tương ứng với $m = 12$. $\square$

Bài 19. Cho số nguyên dương $n, n > 1$. Với số nguyên dương m , đặt $X_m = \{1, 2, \dots, mn\}$. Xét họ T gồm $2n$ tập hợp thỏa các điều kiện sau:

- i) Mỗi phần tử của T là một tập con có m phần tử của X_m .
- ii) Mỗi cặp thuộc T có nhiều nhất một phần tử chung.

iii) Mỗi phần tử thuộc X_m thuộc đúng hai tập của T .

Tìm giá trị lớn nhất của m theo n .

Lời giải.

Kí hiệu $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ là $2n$ tập hợp của họ T . Xét bảng vuông sao cho gồm $2n$ dòng và mn cột sao cho $a_{ij} = 1$ nếu số j thuộc tập A_i và bằng 0 trong trường hợp ngược lại. Gọi S là số cặp $(1; 1)$ cùng thuộc một cột. Ta sẽ đếm S bằng hai cách.

Cách đếm thứ nhất: Đếm theo dòng. Do ii) nên $S \leq C_{2n}^2$.

Cách đếm thứ hai: Đếm theo cột. Do iii) nên $S = mn$.

Qua hai cách đếm ta có $mn \leq C_{2n}^2 \Leftrightarrow m \leq 2n - 1$.

Để chỉ ra $m = 2n - 1$, ta xây dựng họ T gồm $2n$ tập hợp theo quy luật như sau: $A_1 = \{1, 2, \dots, 2n - 1\}$; nếu đã có $A_1, \dots, A_k$ thì A_{k+1} được xây dựng bởi việc giữ nguyên phần tử tại vị trí k trong A_k và chọn các số nhỏ nhất từ X_m cho các vị trí còn lại mà chưa được sử dụng ở A_k . Cụ thể

$$A_1 = \{1, 2, \dots, 2n - 1\}$$

$$A_2 = \{1, 2n, \dots, 4n - 3\}$$

$$A_3 = \{2, 2n, 4n - 2, \dots, 6n - 6\}$$

$$A_4 = \{3, 2n + 1, 4n - 2, 6n - 5, \dots, 8n - 10\}$$

...

$$A_{2n} = \{2n - 1, 4n - 3, 6n - 6, 8n - 10, \dots, (2n - 1)n\}$$

Dễ dàng kiểm tra được cách xây dựng trên thỏa mãn đồng thời các điều kiện i), ii), iii).

Vậy giá trị lớn nhất của m là $2n - 1$. □

Bài 20 (APMO 2006). Trong một rạp xiếc, có n chú hề được trang điểm bằng một số trong tổng cộng 12 màu sơn. Mỗi chú hề phải sử dụng ít nhất năm màu và không có hai chú hề nào được trang điểm bằng cùng một tập hợp các màu giống nhau. Ngoài ra mỗi màu được sử dụng bởi không quá 20 chú hề. Tìm giá trị lớn nhất của n .

Lời giải.

Ta đếm số bộ (A, B) với A là chú hề được trang điểm bởi màu sơn B bằng hai cách. Gọi số bộ này là S .

Cách đếm thứ nhất: Đếm theo chú hề. Đầu tiên chọn một chú hề A tùy ý, có n cách. Tiếp theo, chọn màu sơn B để trang trí cho chú hề A đã chọn, có ít nhất 5 cách. Do đó $S \geq 5n$

Cách đếm thứ hai: Đếm theo màu sơn. Đầu tiên, chọn một màu sơn B tùy ý, có 12 cách chọn. Vì mỗi màu được sử dụng bởi không quá 20 chú hề, nên với màu sơn B đã chọn, có không quá 20 cách chọn chú hề A . Do đó, $S \leq 12 \times 20 = 240$.

Qua hai cách đếm trên, ta được $5n \leq 240 \Leftrightarrow n \leq 48$.

Để chỉ ra giá trị lớn nhất của n là 48, ta cần xây dựng một cấu hình thỏa mãn các điều kiện của đề bài. Kí hiệu 12 màu sơn là $1, 2, \dots, 12$. Xét các tập hợp

$$\begin{aligned} &\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \{7, 8, 9, 10, 11, 12\} \\ &\{9, 10, 11, 12, 1, 2\}, \{11, 12, 1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 5, 6, 9, 10\}, \{3, 4, 7, 8, 11, 12\} \end{aligned}$$

Mỗi một tập hợp trong 8 tập hợp trên có 6 tập con đôi một khác nhau chứa đúng 5 màu. Dễ thấy 48 tập con được xây dựng như trên là đôi một khác nhau. $\square$

Bài 21 (Khánh Hòa 2020). Một nhóm phượt có n thành viên. Năm 2018, họ thực hiện 6 chuyến du lịch mà mỗi chuyến có đúng 5 thành viên tham dự. Biết rằng hai chuyến du lịch bất kỳ có tối đa hai thành viên chung. Tìm giá trị nhỏ nhất của n .

Lời giải.

Gọi n thành viên là $X_1, X_2, \dots, X_n$ và $Y_1, Y_2, \dots, Y_6$ là 6 chuyến du lịch. Xét đồ thị hai phe với tập đỉnh là $X \cup Y$, trong đó $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ và $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_6\}$. Hai đỉnh X_i, Y_j được nối cạnh với nhau nếu người X_i tham gia chuyến du lịch Y_j . Theo giả thiết đồ thị có 30 cạnh. Gọi S là tập các cặp hai cạnh có cùng một đỉnh thuộc X . Ta sẽ đếm $|S|$ bằng hai cách.

Cách đếm thứ nhất: Đếm theo đỉnh của tập Y . Theo giả thiết, hai hai đỉnh thuộc Y thì nối cạnh chung tối đa 2 đỉnh thuộc X . Do đó $|S| \leq 2C_6^2$.

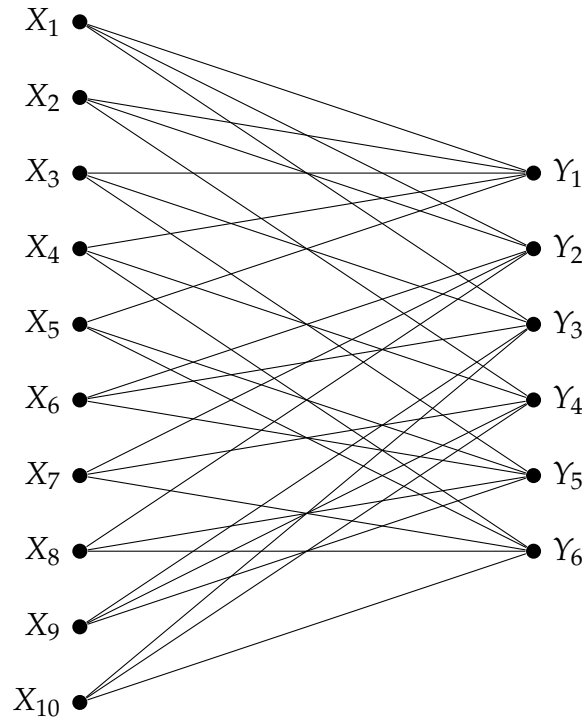
Cách đếm thứ hai: Đếm theo đỉnh thuộc tập X . Gọi $d_i = \deg(X_i)$ thì $\sum d_i = 30$. Khi đó với mỗi đỉnh X_i ta có $C_{d_i}^2$ cách chọn ra 2 đỉnh thuộc Y cùng liên thuộc một cạnh nào đó với X_i . Suy ra

$$|S| = \sum C_{d_i}^2 = \sum \frac{d_i^2 - d_i}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sum \frac{d_i^2 - d_i}{2} \geq \frac{(\sum d_i)^2}{2n} - \frac{\sum d_i}{2} = \frac{450}{n} - 15.$$

Qua hai cách đếm trên ta được $n \geq 10$. Để khẳng định $n = 10$ là giá trị nhỏ nhất, ta xây dựng một đồ thị hai phe có 30 cạnh, mỗi đỉnh của X có bậc 3, mỗi đỉnh của Y có bậc 5 như sau:



□

Bài 22 (Brazil MO 2022). Một số ô của một bảng vuông 10×10 được tô màu xanh. Một tập hợp gồm sáu ô được gọi là gremista khi các ô là giao điểm của ba hàng và hai cột hoặc hai hàng và ba cột, và được tô màu xanh. Xác định giá trị lớn nhất của n để có thể tô màu xanh cho n ô vuông mà không tồn tại một tập gremista nào.

Lời giải.

Kí hiệu $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ lần lượt là số ô được tô màu trên các hàng. Khi đó $\sum_{i=1}^{10} a_i = n$.

Gọi S là số cặp ô vuông được tô màu xanh và cùng hàng. Ta sẽ đếm S bằng 2 cách.

Cách đếm thứ nhất: Đếm theo hàng. Dễ thấy $S = \sum_{i=1}^{10} C_{a_i}^2$.

Cách đếm thứ hai: Đếm theo cột. Chọn hai cột bất kỳ, có C_{10}^2 cách. Vì không tồn tại một tập gremista nào nên trên hai cột vừa chọn, có tối đa 2 cặp ô được tô màu xanh và cùng hàng. Do đó $S \leq 2 \cdot C_{10}^2$.

Qua hai cách đếm trên, ta được $\sum_{i=1}^{10} C_{a_i}^2 \leq 2 \cdot C_{10}^2$.

Mà theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{10} C_{a_i}^2 &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{10}^2}{2} - \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{10}}{2} \\ &\geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_{10})^2}{2 \cdot 10} - \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{10}}{2} = \frac{n^2}{20} - \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Do đó $\frac{n^2}{20} - \frac{n}{2} \leq 90$, suy ra $n \leq 47$.

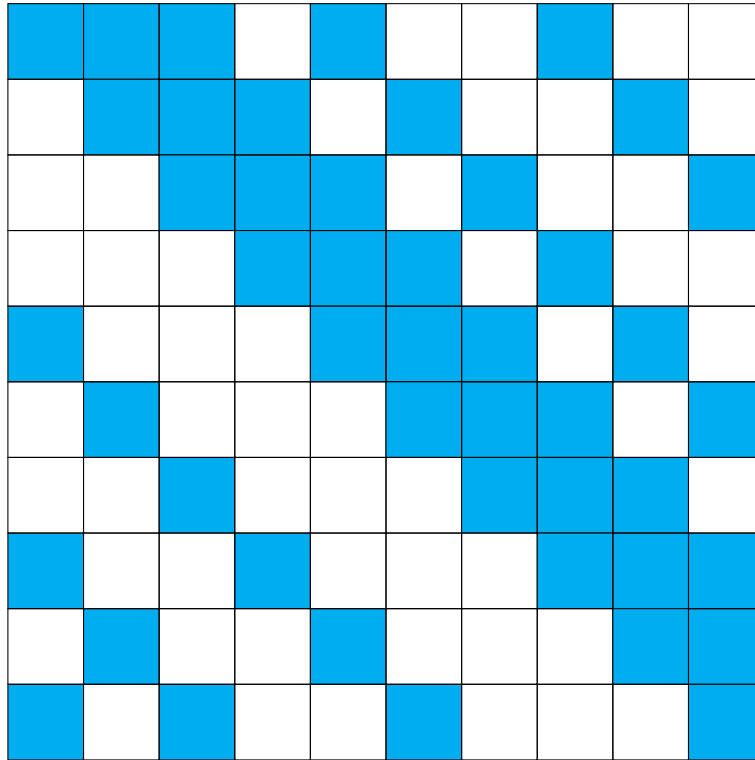
Nếu $n = 47$ mà $\sum_{i=1}^{10} C_{a_i}^2 \leq 90$ thì phải có 7 hàng, mỗi hàng tô màu xanh 5 ô và 3 hàng còn lại, mỗi hàng tô 4 ô. Gọi b_j là số ô được tô màu xanh trong cột j và trong các hàng mà mỗi hàng có 5 ô được tô màu xanh. Khi đó $\sum_{j=1}^{10} b_j = 5 \cdot 7 = 35$. Cũng lập luận thông qua đếm bằng hai cách như trên, ta có $\sum_{j=1}^{10} C_{b_j}^2 \leq 2C_7^2 = 42$. Mặt khác, theo bất đẳng thức Jensen, ta có

$$\sum_{j=1}^{10} C_{b_j}^2 \geq 10 \cdot \frac{\frac{1}{10} \left(\sum_{j=1}^{10} b_j \right)^2 - \frac{\sum_{j=1}^{10} b_j}{10}}{2} = 43,75,$$

mâu thuẫn. Vậy n không thể bằng 47.

Ta chỉ ra một cách tô màu với $n = 46$ thỏa mãn điều kiện bài toán như sau:

Vậy giá trị lớn nhất của n là 46.



□

Bài 23 (China 1990). Trong mặt phẳng, cho bảy điểm phân biệt. Người ta muốn vẽ các đường tròn qua đúng bốn điểm trong bảy điểm này. Hỏi có thể vẽ được nhiều nhất bao nhiêu đường tròn?

Lời giải.

Đánh dấu các điểm là $A_1, A_2, \dots, A_7$ và gọi n là số đường tròn nhiều nhất có thể vẽ. Gọi S là tập các bộ (c, d, A) mà trong đó đường tròn c, d cùng đi qua điểm A (trong bảy điểm đã cho). Ta sẽ

đếm $|S|$ bằng hai cách.

Cách đếm thứ nhất: Đếm theo đường tròn. Chọn hai đường tròn tùy ý, có C_n^2 cách. Chọn ra điểm chung của hai đường tròn, có không quá 2 cách. Do đó $|S| \leq 2C_n^2 = n(n-1)$.

Cách đếm thứ hai: Đếm theo điểm. Ta gọi $x_1, x_2, \dots, x_7$ là số đường tròn lần lượt đi qua các điểm $A_1, A_2, \dots, A_7$. Khi đó $x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 4n$, và

$$S = C_{x_1}^2 + C_{x_2}^2 + \dots + C_{x_7}^2 = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_7^2 - 4n).$$

Theo bất đẳng thức Cauchy thì

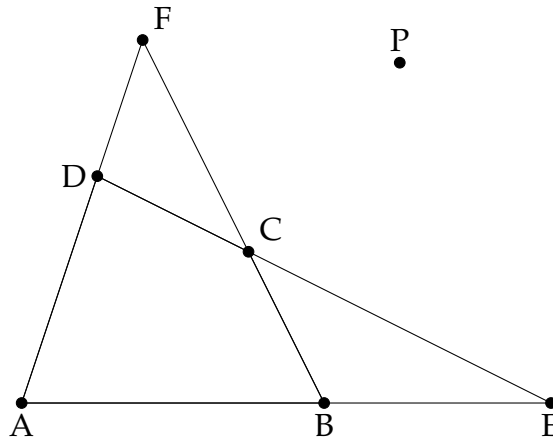
$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_7^2 \geq \frac{1}{7} (x_1 + x_2 + \dots + x_7)^2 = \frac{16n^2}{7}.$$

Do đó $S \geq \frac{1}{2} \left(\frac{16n^2}{7} - 4n \right)$.

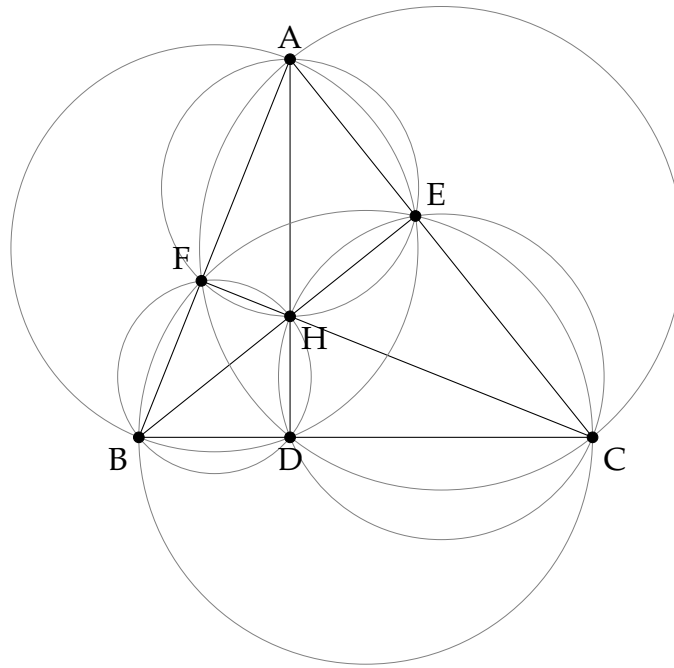
Qua hai cách đếm, ta được $n(n-1) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{16n^2}{7} - 4n \right)$. Suy ra $n \leq 7$.

Tuy nhiên, trường hợp $n = 7$ không thỏa mãn. Thật vậy, với $n = 7$, tất cả các đánh giá trên đều xảy ra đẳng thức, tức là mỗi đường tròn đi qua bốn điểm, mỗi điểm thuộc bốn đường tròn, và hai đường tròn bất kỳ cắt nhau tại hai điểm chung.

Ta xét một điểm P nào đó trong các điểm đã cho, và tương ứng xét bốn đường tròn $(C_1), (C_2), (C_3), (C_4)$ đi qua P . Xét một phép nghịch đảo cực P , phương tích $k \neq 0$ tùy ý thì ảnh của bốn đường tròn $(C_1), (C_2), (C_3), (C_4)$ lần lượt là bốn đường thẳng l_1, l_2, l_3, l_4 không đi qua P . Các đường thẳng này đôi một cắt nhau tại sáu điểm tạo thành một tứ giác toàn phần.



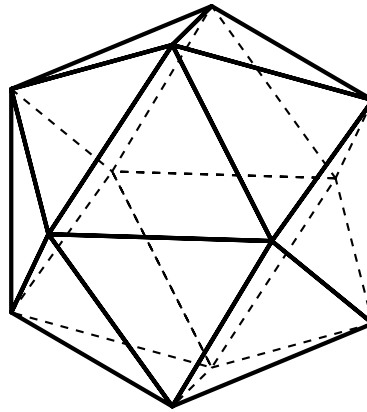
Trong mô hình ban đầu, ta cần vẽ thêm ba đường tròn nữa không đi qua P . Qua phép nghịch đảo trên thì chúng sẽ biến thành ba đường tròn qua các điểm A, B, C, D, E, F trong hình vẽ trên (mỗi đường tròn đi qua bốn điểm). Tuy nhiên, trong hình trên, chỉ có tối đa hai đường tròn (qua A, B, C, D hoặc qua A, C, E, F) nên không thể có mô hình thỏa mãn đề bài. Như vậy, $n = 7$ không thỏa mãn. Để kết luận $n = 6$ thỏa mãn, ta có mô hình sau với H là trực tâm của tam giác ABC .



□

Các ví dụ tiếp theo sẽ cho thấy việc khai thác giả thiết bài toán bằng cách đếm theo hai hướng khác nhau giúp chúng ta chỉ ra được sự tồn tại của một trạng thái nào đó trong bài toán Tổ hợp.

Bài 24 (Putnam 2013). Cho khối đa diện 20 mặt đều. Mỗi mặt của khối được điền bởi một số nguyên không âm sao cho tổng các số trên 20 mặt là 39. Chứng minh rằng có hai mặt nào đó có chung đỉnh mà số ghi trong hai mặt đó là giống nhau.



📖 Lời giải.

Khối đa diện 20 mặt đều có 12 đỉnh, tại mỗi đỉnh có 5 mặt cùng đi qua đỉnh đó. Kí hiệu các đỉnh là $V_1, V_2, \dots, V_{12}$ và $S_1, S_2, \dots, S_{12}$ tương ứng là tổng của các số được ghi trên các mặt cùng đi qua đỉnh $V_1, V_2, \dots, V_{12}$. Ta sẽ đếm $\sum_{i=1}^{12} S_i$ theo hai cách.

Cách đếm thứ nhất: Vì tổng các số trên 20 mặt là 39 và mỗi số được tính lặp lại 3 lần trong $\sum_{i=1}^{12} S_i$

$$\text{nên } \sum_{i=1}^{12} S_i = 3 \times 39 = 117.$$

Cách đếm thứ hai: Giả sử không có hai mặt nào đó có chung đỉnh mà số ghi trong hai mặt đó là giống nhau. Khi đó $S_i \geq 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10, \forall i = \overline{1, 12}$. Do đó $\sum_{i=1}^{12} S_i \geq 12 \times 10 = 120$.

Qua hai cách đếm trên, ta thấy dẫn đến điều mâu thuẫn. Vậy giả sử ở cách đếm thứ 2 là sai. Điều đó chứng tỏ phải có hai mặt nào đó có chung đỉnh mà số ghi trong hai mặt đó là giống nhau. $\square$

Bài 25 (VMO 2015). Trong một kì thi có 100 thí sinh và 24 vị giám khảo. Mỗi thí sinh được hỏi bởi đúng 10 giám khảo. Chứng minh rằng có bảy giám khảo mà mỗi thí sinh đều được hỏi bởi ít nhất một trong số họ.

➤ Lời giải.

Giả sử phản chứng rằng với bảy giám khảo tùy ý thì luôn có ít nhất một thí sinh không được hỏi bởi bất kỳ ai trong số họ. Gọi S là các bộ $(A_1, A_2, \dots, A_7, B)$ mà B là thí sinh không được hỏi bởi các giám khảo $A_1, A_2, \dots, A_7$. Ta sẽ đếm $|S|$ theo hai cách.

Cách đếm thứ nhất: Đếm theo giám khảo. Chọn 7 giám khảo tùy ý trong 24 giám khảo, có C_{24}^7 cách chọn. Vì có ít nhất một thí sinh không được hỏi bởi bất kỳ ai trong số họ nên có ít nhất một cách chọn B . Do đó $|S| \geq C_{24}^7$.

Cách đếm thứ hai: Đếm theo thí sinh. Chọn một thí sinh B tùy ý, có 100 cách chọn. Vì B được hỏi bởi đúng 10 giám khảo nên B không được hỏi bởi 14 giám khảo còn lại. Do đó, $|S| = 100 \cdot C_{14}^7$.

Qua hai cách đếm, ta được $100 \cdot C_{14}^7 \geq C_{24}^7$. Tuy nhiên điều này sai nên điều giả sử phản chứng là sai. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài 26 (Bulgarian 2006). Một quốc gia có 16 thành phố và có 36 tuyến bay nối giữa chúng. Chứng minh rằng ta có thể tổ chức một chuyến bay vòng quanh giữa 4 thành phố.

➤ Lời giải.

Ta chuyển bài toán thành ngôn ngữ đồ thị như sau: Một đồ thị G đơn có 16 đỉnh và 36 cạnh thì có một chu trình độ dài 4. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử trong đồ thị không có chu trình độ dài 4.

Với mỗi đỉnh x thuộc G , gọi $d(x)$ là bậc của đỉnh x . Khi đó $\sum_{x \in G} d(x) = 72$. Gọi S là số cặp đỉnh (y, z) (không kể thứ tự) với $y, z \in G$ mà cả hai cùng kề với một đỉnh x nào đó. Ta đếm $|S|$ bằng hai cách.

Cách đếm thứ nhất: Với mỗi đỉnh x thuộc G , số cách chọn cặp đỉnh (y, z) cùng kề với x bằng $C_{d(x)}^2$. Vì không có một chu trình 4 nên mỗi một cặp được tính ở một đỉnh x . Do đó $|S| = \sum_{x \in G} C_{d(x)}^2$.

Cách đếm thứ hai: Chọn hai đỉnh $y, z \in G$ tùy ý trong số 16 đỉnh của đồ thị nên $|S| \leq C_{16}^2$

Qua hai cách đếm, ta được $\sum_{x \in G} C_{d(x)}^2 \leq C_{16}^2 \Leftrightarrow \sum_{x \in G} d^2(x) \leq 312$.

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy, ta có $\sum_{x \in G} d^2(x) \geq \frac{1}{16} \left(\sum_{x \in G} d(x) \right)^2 = 324$, mâu thuẫn. Từ đó ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài 27 (APMO 2008). Các học sinh trong một lớp học được chia thành các nhóm, mỗi nhóm có đúng 3 học sinh. Hai nhóm tùy ý có chung với nhau tối đa một học sinh. Chứng minh rằng khi lớp học có 46 học sinh, tồn tại một tập S gồm ít nhất 10 học sinh sao cho không có bất kỳ nhóm nào có 3 thành viên đều thuộc S .

Lời giải.

Gọi S là tập hợp chứa nhiều học sinh nhất sao cho không có bất kỳ nhóm nào có 3 thành viên đều thuộc S . Giả sử $|S| = t$. Nếu $t \geq 10$ thì yêu cầu bài toán được thỏa mãn. Bây giờ ta giả sử $t \leq 9$. Do tính lớn nhất của t nên với mỗi học sinh u không thuộc S , tồn tại hai học sinh v, w thuộc S sao cho u, v, w cùng thuộc một nhóm. Ta sẽ đếm số bộ (u, v, w) như thế bằng hai cách.

Cách đếm thứ nhất: Đầu tiên chọn một học sinh u không thuộc S tùy ý, có $46 - t$ cách. Với học sinh u đã chọn, có đúng một cặp hai học sinh v, w thuộc S sao cho u, v, w cùng thuộc một nhóm vì hai nhóm tùy ý có chung tối đa một học sinh. Do đó có $46 - t$ bộ.

Cách đếm thứ hai: Chọn hai học sinh v, w tùy ý thuộc S , có C_t^2 cách. Khi đó có tối đa 1 cách chọn học sinh u để u, v, w cùng thuộc một nhóm. Suy ra có tối đa C_t^2 bộ.

Qua hai cách đếm trên, ta được $46 - t \leq C_t^2$. Suy ra $t \geq 10$, mâu thuẫn.

Ta có điều phải chứng minh. □

Bài 28 (Iran TST 2008). Trong một giải đấu có 799 người chơi, mỗi người chơi thi đấu với nhau đúng một lần (chỉ có thắng hoặc thua không có hòa). Chứng minh rằng tồn tại 14 người chơi trong số đó sao cho có thể chia 14 người này thành hai nhóm để mỗi người trong nhóm thứ nhất đều thắng mọi người trong nhóm thứ hai.

Lời giải.

Kí hiệu $X_1, X_2, \dots, X_{799}$ là các người chơi. Ta sẽ đếm số bộ $\{(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_7}), X_j\}$ trong đó X_j là người chơi thua tất cả $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_7}$ bằng hai cách. Gọi S là số bộ đó.

Cách đếm thứ nhất: Trước hết, chọn bộ $(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_7})$ có C_{799}^7 cách chọn. Nếu với một cách chọn $(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_7})$ nào đó mà ta chọn được 7 người chơi X_j thì bài toán được giải quyết. Bây giờ, ta giả sử rằng với mọi cách chọn $(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_7})$ đều có tối đa 6 cách chọn người chơi X_j thì $S \leq 6 \cdot C_{799}^7$.

Cách đếm thứ hai: Gọi $C_1, C_2, \dots, C_{799}$ lần lượt là số người chơi thắng $X_1, X_2, \dots, X_{799}$ thì $\sum_{i=1}^{799} C_i = C_{799}^2$. Khi đó $S = \sum_{i=1}^{799} C_{C_i}^7$. Theo bất đẳng thức Jensen, ta có

$$S = \sum_{i=1}^{799} C_{C_i}^7 \geq 799 \cdot C_{\frac{\sum C_i}{799}}^7 = 799 \cdot C_{399}^7.$$

Qua hai cách đếm, ta được $799 \cdot C_{399}^7 \leq 6 \cdot C_{799}^7$. Tuy nhiên bất đẳng thức này sai. Từ đó ta có điều

phải chứng minh. □

Bài 29 (IMO 2005). Một cuộc thi Toán có 6 bài toán. Mỗi cặp bài toán đều được giải bởi nhiều hơn $\frac{2}{5}$ số thí sinh. Hơn nữa, không có thí sinh nào giải được tất cả 6 bài toán. Chứng minh rằng có hai học sinh nào đó mà mỗi người giải được đúng 5 bài.

 Lời giải.

Gọi n là số thí sinh, $a_0, a_1, \dots, a_5$ lần lượt là số thí sinh giải được 0, 1, ..., 5 bài toán. Khi đó $a_0 + a_1 + \dots + a_5 = n$. Ta sẽ đếm số bộ (C, P) trong đó thí sinh C giải được cặp bài toán P bằng hai cách. Gọi số bộ đó là S .

Cách đếm thứ nhất: Đầu tiên, chọn một cặp bài toán, có $C_6^2 = 15$ cách. Vì mỗi cặp bài toán đều được giải bởi nhiều hơn $\frac{2}{5}$ số thí sinh nên có ít nhất $\frac{2n+1}{5}$ cách chọn thí sinh C . Do đó $S \geq 15 \cdot \frac{2n+1}{5} = 6n + 3$.

Cách đếm thứ hai: Có a_i thí sinh giải được C_i^2 cặp bài toán với $i = 2, 3, 4, 5$. Do đó $S \leq a_2 + 3a_3 + 6a_4 + 10a_5 = 6n + 4a_5 - (3a_3 + 5a_2 + 6a_1 + 6a_0)$.

Qua hai cách đếm trên, ta được $6n + 3 \leq 6n + 4a_5 - (3a_3 + 5a_2 + 6a_1 + 6a_0)$. Do đó $a_5 \geq 1$

Bây giờ, giả sử $a_5 = 1$. Khi đó $S = 6n + 4$, và điều này chỉ xảy ra khi có 14 cặp bài toán được giải bởi đúng $\frac{2n+1}{5}$ thí sinh và cặp bài toán còn lại được giải bởi $\frac{2n+1}{5} + 1$ thí sinh và tất cả thí sinh (trừ thí sinh giải được 5 bài—gọi là người chiến thắng) đều giải được 4 bài toán.

Ta gọi bài toán t mà người chiến thắng không giải được là bài toán khó khăn và cặp bài toán được giải bởi $\frac{2n+1}{5} + 1$ thí sinh là cặp bài toán đặc biệt.

Tiếp theo ta sẽ đếm số bộ (C, P) mà P chứa bài toán p cũng bằng hai cách. Gọi số bộ đó là M_p .

Cách đếm thứ nhất: Kí hiệu b_p là số thí sinh giải được bài toán p . Khi đó $M_t = 3b_t$ (mỗi một thí sinh trong b_t giải được 3 cặp bài toán chứa t) và $M_p = 3b_p + 1$, $p \neq t$ (người chiến thắng giải được 4 cặp bài toán).

Cách đếm thứ hai: Mặt khác, mỗi một trong 5 cặp bài toán chứa p được giải bởi $\frac{2n+1}{5}$ hoặc $\frac{2n+1}{5} + 1$ thí sinh nên $M_p = 2n + 2$ nếu cặp đặc biệt chứa p và $M_p = 2n + 1$ trong trường hợp ngược lại.

Do đó $M_t = 3b_t = 2n + 1$ hoặc $2n + 2$, suy ra $2n + 1 \equiv 0$ hoặc $2 \pmod{3}$. Còn nếu $p \neq t$ thì $M_p = 3b_p + 1 = 2n + 1$ nên $2n + 1 \equiv 1 \pmod{3}$, mâu thuẫn. Vậy $a_5 \geq 2$. Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

Bài 30 (IMO Shortlist 2016). Cho đa giác đều (H) có 2017 đỉnh mà mỗi đỉnh được tô bởi một trong ba màu: xanh, đỏ, vàng với số lượng lần lượt là a, b, c sao cho các số a, b, c đều lẻ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có ba đỉnh lấy từ (H) được tô bởi ba màu khác nhau.

 Lời giải.

Gọi x, y, z lần lượt là số tam giác cân có ba đỉnh thuộc (H) mà các đỉnh của mỗi tam giác được tô bởi: một màu, hai màu, ba màu. Ta sẽ chỉ ra rằng $z > 0$. Trước hết, ta nhận xét rằng với hai đỉnh tùy ý trong 2017 đỉnh của (H) thì có đúng 3 cách chọn đỉnh thứ ba để có tam giác cân.

Thật vậy, giả sử có hai đỉnh A, B . Trước hết, vì 2017 lẻ nên trên cung lớn hoặc trên cung nhỏ AB sẽ có đúng một điểm C cách đều AB . Ngoài ra đường tròn (A, AB) và (B, BA) cắt (H) tại các điểm D, E cũng thỏa mãn yêu cầu. Chú ý rằng vì $\gcd(2017, 3) = 1$ nên không có tam giác đều nào trong các đỉnh của (H) , suy ra các điểm C, D, E ở trên là duy nhất.

Từ đó, ta đếm số bộ (M, N, P) với đỉnh M, N không tính thứ tự, tô cùng màu và cùng nằm trong tam giác cân P bằng hai cách.

Cách đếm thứ nhất: Chọn hai đỉnh M, N cùng màu, có $C_a^2 + C_b^2 + C_c^2$ cách. Chọn tam giác P cân và chứa hai đỉnh đó, có 3 cách nên số bộ trên là $3(C_a^2 + C_b^2 + C_c^2)$.

Cách đếm thứ hai: Tam giác loại x, y, z cho ta tương ứng 3, 1, 0 cặp đỉnh cùng màu nên có $3x + y$ bộ.

Qua hai cách đếm, ta có đẳng thức $3x + y = 3(C_a^2 + C_b^2 + C_c^2)$.

Giả sử $z = 0$ thì $x + y = C_{2017}^2$ là số cách chọn ra ba đỉnh trong (H) để có tam giác cân. Khi đó

$$\begin{aligned} 3x + y &= 3(C_a^2 + C_b^2 + C_c^2) \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2 - a - b - c) &= 3(x + y) - 2y \\ \Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2 - 2017) &= 3(2017^2 - 2017) - 4y \\ \Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) &= 3 \cdot 2017^2 - 4y \end{aligned}$$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 1 \pmod{4}$, điều này vô lý vì a, b, c lẻ. Vậy $z > 0$, ta có điều phải chứng minh.

□

4.3. Bài tập đề nghị

Bài 31 (China 1996). Có tám ca sĩ tham gia một chương trình văn nghệ với tổng cộng m buổi hòa nhạc. Trong mỗi buổi hòa nhạc, có bốn ca sĩ tham gia và số lần tham gia của mỗi cặp ca sĩ là như nhau và bằng n ($n > 0$). Tìm giá trị nhỏ nhất của m .

Bài 32 (VMO 2005). Cho bát giác lồi $A_1A_2 \dots A_8$ mà không có ba đường chéo nào đồng quy. Giao của hai đường chéo tùy ý được gọi là một “nút”. Xét tất cả các tứ giác lồi được tạo thành bởi bốn đỉnh của bát giác đã cho và các tứ giác đó được gọi là “tứ giác con”. Hãy xác định số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho có thể tô màu n nút để với mọi i, k phân biệt thuộc $\{1, 2, \dots, 8\}$ thì các số $s(i, k)$ bằng nhau, trong đó $s(i, k)$ kí hiệu số tứ giác con nhận A_i, A_k làm đỉnh và giao của hai đường chéo là một nút được tô màu.

Bài 33 (Iran 2013). Trong mặt phẳng, cho n ($n \geq 3$) đường thẳng đôi một cắt nhau tạo thành các giao điểm (không có ba đường nào đồng quy). Gọi m là số giao điểm mà về hai phía của đường thẳng chứa nó, đều có ít nhất một giao điểm khác. Tìm giá trị nhỏ nhất của m .

Bài 34 (Tạp chí Pi – P333 năm 2019). An và Bình cùng tham gia một giải đấu cờ. Hai kỳ thủ bất kỳ đấu với nhau đúng một trận. Trong mỗi trận đấu, kỳ thủ thắng được 1 điểm, kỳ thủ thua được 0 điểm, nếu kết quả hòa thì mỗi kỳ thủ được 0,5 điểm. Kết thúc giải đấu, tổng số điểm của An và Bình là 6,5 còn tất cả các kỳ thủ còn lại đều có số điểm bằng nhau. Hãy tính số người tham gia giải đấu.

Bài 35 (Hưng Yên 2020). Cho một tập X khác rỗng được chia thành các tập con đôi một không giao nhau $A_1, A_2, \dots, A_n$ và đồng thời cũng được chia thành các tập con đôi một không giao nhau $B_1, B_2, \dots, B_n$. Biết rằng hợp của hai tập hợp không giao nhau A_i, B_j ($1 \leq i, j \leq n$) có không ít hơn n phần tử. Chứng minh rằng số phần tử của X không ít hơn $\frac{n^2}{2}$. Khi số phần tử của X là $\frac{n^2}{2}$, hãy chỉ ra một cách chia tập hợp thỏa mãn bài toán.

Bài 36 (Tạp chí Pi – P316 năm 2019). Trong một giải đấu võ thuật, mỗi võ sĩ thi đấu với mỗi võ sĩ khác đúng một trận. Mỗi trận đấu được điều khiển bởi một trọng tài. Sau khi giải đấu kết thúc, người ta nhận thấy rằng, mỗi trận tài đều điều khiển ít nhất một trận và không có hai trận tài nào điều khiển số trận bằng nhau. Võ sĩ Bắc nói rằng, các trận đấu của anh ta đều được điều khiển bởi các trọng tài khác nhau. Các võ sĩ Trung và Nam cũng khẳng định y hệt vậy. Hỏi có thể xảy ra khả năng cả ba võ sĩ cùng nói đúng hay không?

Bài 37 (IMO Shortlist 2003). Cho các số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ và $y_1, y_2, \dots, y_n$. Xét bảng ô vuông kích thước $n \times n$. Mỗi ô (i, j) (ô thuộc hàng i cột j) được điền bởi số a_{ij} được xác định như sau:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i + y_j \geq 0 \\ 0, & x_i + y_j < 0 \end{cases}.$$

Đặt B là bảng ô vuông kích thước $n \times n$ với các ô được điền bởi 0 hoặc 1 sao cho tổng các số thuộc hàng, cột của bảng B tương ứng bằng tổng các số thuộc hàng, cột của bảng A (theo đúng thứ tự). Chứng minh rằng bảng A và B trùng nhau.

Bài 38 (IMO Shortlist 2010). Trong một giải đấu quần vợt có n người tham dự. Mỗi hai người chơi bất kỳ sẽ thi đấu với nhau đúng một trận (giả sử chỉ có thắng và thua không có kết quả hòa). Ta gọi một bộ (không thứ tự) gồm bốn người chơi là một bộ xấu nếu có một người chơi nào đó thua cả ba người còn lại. Đồng thời, mỗi người chơi trong ba người chơi này sẽ thắng một người và thua một người khác trong hai người còn lại. Giả sử giải đấu kết thúc mà không tồn

tại bộ xâu nào. Đặt w_i, l_i lần lượt là số người mà người thứ i thắng và thua. Chứng minh rằng
$$\sum_{i=1}^n (w_i - l_i)^3 \geq 0.$$

Bài 39 (IMO 1989). Cho n, k là các số nguyên dương. Xét S là tập hợp n điểm trên mặt phẳng sao cho 3 điểm bất kỳ không thẳng hàng và mỗi điểm P tùy ý thuộc S thì có ít nhất k điểm phân biệt thuộc S cách P một khoảng bằng nhau. Chứng minh rằng $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

Bài 40 (Turkey MO 2022). Ở một trường học có 2022 học sinh, một chuyến đi tham quan bảo tàng hoặc một chuyến đi dã ngoại thiên nhiên được tổ chức hàng ngày trong suốt kỳ nghỉ hè. Không có học sinh nào tham gia cùng một loại chuyến đi hai lần và số lượng học sinh tham gia mỗi chuyến đi là khác nhau. Nếu không có hai học sinh nào tham gia hai chuyến đi giống nhau, hãy tìm số chuyến đi tối đa được tổ chức.

5. Đếm bằng cách thiết lập quan hệ truy hồi

Phương pháp thiết lập hệ truy hồi cũng là một phương pháp hiệu quả khi giải các bài toán đếm trong tổ hợp. Phương pháp truy hồi giúp ta chia bài toán thành các bài toán con và giải quyết riêng từng cái một. Một cách chia phải đảm bảo là phân hoạch thì mới không xảy ra việc đếm thừa hoặc thiếu. Cụ thể hơn, A, B là phân hoạch của S nếu như $A \cup B = S$ và $A \cap B = \emptyset$. Tiếp theo ta cần thiết lập mối quan hệ truy hồi giữa số lượng đối tượng cần đếm trong nhóm n đối tượng với số lượng đối tượng cần đếm trong các nhóm ít hơn n đối tượng thì ta có thể đưa về đếm số đối tượng trong nhóm mới với số đối tượng ít hơn. Nói cách khác, thay vì đếm trực tiếp $S(n)$, ta thiết lập hệ thức liên hệ giữa $S(n)$ với $S(n-1), S(n-2), \dots$ từ đó dùng kiến thức về dãy số để tìm được $S(n)$. Một bài toán truy hồi thường thì sẽ giải quyết được bởi một dãy, nhưng đôi khi, ta cũng cần có nhiều dãy số phối hợp với nhau mới có thể mô tả được đầy đủ trạng thái của bài toán. Các bài toán sử dụng phương pháp thiết lập hệ truy hồi rất đa dạng, phong phú và mức độ khó dễ khác nhau. Để làm rõ được cách vận dụng phương pháp tôi xin đưa ra một số ví dụ sau đây.

5.1. Các bài toán kinh điển

Bài 1 (Dãy Fibonacci). Một đôi thỏ (gồm một thỏ đực và một thỏ cái) cứ mỗi tháng sinh được một đôi thỏ con (cũng gồm một thỏ đực và một thỏ cái); một đôi thỏ con, khi trong 2 tháng tuổi, sau mỗi tháng sinh ra một đôi thỏ con khác và quá trình sinh nở cứ thế tiếp diễn. Hỏi sau n tháng thì có bao nhiêu đôi thỏ nếu tháng đầu tiên có một đôi thỏ sơ sinh?

Lời giải.

Dựa vào giả thiết thì ta có thể thấy rằng

- Tháng 1 và tháng 2: chỉ có một đôi thỏ.
- Tháng 3: đôi thỏ này sẽ sinh ra một đôi thỏ con mới, do đó trong tháng này có hai đôi thỏ.
- Tháng 4: chỉ có đôi thỏ ban đầu sinh con, đôi thỏ con ở tháng trước mới tròn một tháng tuổi nên chưa sinh được, đến thời điểm này có 3 đôi thỏ.
- Tháng 5: có 2 đôi thỏ (đôi thỏ đầu và đôi thỏ được sinh ra ở tháng thứ ba) cùng sinh con, đôi thỏ thứ 4 mới tròn 1 tháng tuổi nên chưa sinh được, tính thêm 3 đôi thỏ có sẵn thì tháng này có $2 + 3 = 5$ đôi thỏ.

Tổng quát lên, nếu n là số nguyên dương, gọi F_n là số đôi thỏ có ở tháng thứ n , ta có ngay $F_1 = F_2 = 1$. Với $n \geq 3$, ta thấy rằng

- Tất cả số thỏ đang có ở tháng $n-1$ là F_{n-1} .

- Các đôi thỏ sinh ra ở tháng $n - 1$ không thể sinh con ở tháng thứ n , và ở tháng này mỗi đôi thỏ ở tháng thứ $n - 2$ đều sinh ra một đôi thỏ con, số thỏ con này sinh ra mới chính là số thỏ ở tháng thứ $n - 2$ và là F_{n-2} .

Do đó, số thỏ ở tháng thứ n , là F_n , bao gồm cả thỏ có sẵn và thỏ con mới sinh ra hay

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

□

Bài 2 (Bài toán chia kẹo Euler). Có bao nhiêu cách chia m cái kẹo cho n đứa trẻ?

 **Lời giải.**

Bài toán tương đương với bài toán "Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = m." \quad (1)$$

Phương trình trên tương đương với

$$m - x_1 = x_2 + x_3 + \dots + x_n. \quad (2)$$

Gọi $S(m, n)$ là số nghiệm của phương trình (1). Khi đó với mỗi giá trị của $x_1 (0 \leq x_1 \leq m)$ ta có số nghiệm của phương trình (2) là $S(m - x_1, n - 1)$. Từ đó ta thu được hệ thức

$$S(m, n) = \sum_{x=0}^m S(m - x, n - 1)$$

Dễ tính được $S(m, 1) = 1$; $S(m, 2) = m + 1$; $S(m, 3) = \frac{(m+2)(m+1)}{2}$. Bằng quy nạp ta có

$$S(m, n) = C_{m+n-1}^{n-1}.$$

Thật vậy, giả sử mệnh đề đúng với n , ta chứng minh nó đúng với $n + 1$.

$$S(m, n + 1) = \sum_{x=0}^m S(m - x, n) \sum_{x=0}^m C_{m-x+n-1}^{n-1} = \sum_{x=0}^m C_{x+n-1}^{n-1} = \sum_{x=0}^m (C_{x+n}^n - C_{x-1+n}^n) = C_{m+n}^n.$$

□

Bài 3 (Tháp Hà Nội). Cho n chiếc đĩa đường kính lần lượt là $1, 2, \dots, n$ và 3 chiếc cọc (các đĩa có lỗ ở tâm để có thể xuyên vào các cọc). Ban đầu, các đĩa được sắp xếp trên cọc A theo thứ tự đường kính giảm dần tính từ dưới lên. Ta được phép chuyển một đĩa trên cọc nguồn sang một trong hai cọc còn lại là B, C sao cho trong quá trình chuyển, đĩa lớn hơn không được xếp trên đĩa nhỏ. Mục đích là chuyển tất cả các đĩa sang cọc C . Tính số bước ít nhất cần để chuyển hết số đĩa.

 **Lời giải.**

Gọi T_n là số bước đi tối thiểu để chiến thắng trong trường hợp n đĩa. Với $n = 1$ thì rõ ràng cần 1 bước chuyển.

Với $n \geq 2$, ta cần thực hiện các công đoạn sau (và bắt buộc như thế để đạt được số lần tối thiểu)

- a) Chuyển $n - 1$ đĩa ở trên chiếc đĩa lớn nhất sang cọc B theo quy tắc trên (dùng cọc C làm trung gian), ta cần T_{n-1} bước. Đĩa lớn nhất vẫn giữ nguyên ở cọc A .
- b) Chuyển đĩa lớn nhất sang cọc C , cần 1 bước.
- c) Chuyển $n - 1$ đĩa ở cọc B đến cọc C và đặt lên trên chiếc đĩa lớn nhất. Ta cần T_{n-1} bước.

Vì thế nên số bước ít nhất cần thực hiện là

$$T_n = 2T_{n-1} + 1,$$

và dễ dàng tìm được $T_n = 2^n - 1$ với mọi n . □

5.2. Các bài toán trong các đề thi học sinh giỏi, Olympic

Bài 4 (AIME 2023). Alice biết rằng sẽ có 3 lá bài màu đỏ và 3 lá bài màu đen sẽ được mở ra cho cô một cách ngẫu nhiên, mỗi lần một lá. Trước khi mở ra mỗi lá bài, Alice phải đoán màu của nó. Nếu Alice chơi một cách tối ưu, số lượng dự đoán đúng trung bình mà cô sẽ có là $\frac{a}{b}$, trong đó a và b là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tìm $a + b$.

Lời giải.

Đặt $f(m, n)$ là số điểm trung bình mà Alice nhận được với m lá bài màu đỏ và n lá bài màu đen. Chú ý rằng $f(m, 0) = f(0, m) = m$, và $f(m, m) = \frac{1}{2} + f(m, m - 1)$ với mọi m . Bây giờ, với $m \neq n$, ta có

$$f(m, n) = \frac{n}{m+n} (f(m, n-1) + T(n > m)) + \frac{m}{m+n} (f(m-1, n) + T(m > n)),$$

trong đó ta định nghĩa $T(S) = 1$ nếu S là đúng và $T(S) = 0$ nếu S là sai cho một phát biểu S . Sử dụng truy hồi này một vài lần để có được $f(3, 3) = \frac{41}{10}$. Vậy $a + b = 51$. □

Bài 5 (Đề thi đề nghị DHĐBBB Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ, năm 2023).

Cho $S = \{A_1, A_2, \dots, A_{11}\}$ là họ các tập hợp thoả mãn đồng thời hai điều kiện:

i) $A_i \cap A_j \neq \emptyset, \forall 1 \leq i < j \leq 11$.

ii) $|A_j| = 5, \forall 1 \leq j \leq 11$.

Đặt $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{11}$, với mỗi $x \in A$ ký hiệu $d(x)$ là số các tập hợp thuộc S chứa x và $d = \max\{d(x) : x \in A\}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của d .

Lời giải.

Giả sử $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, xét bảng $m \times 11$ ô vuông (gồm m hàng, 11 cột) sao cho tại mỗi ô vuông thứ (i, j) (hàng thứ i , cột thứ j) ta đặt một số $a_{i,j}$ xác định bởi

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & x_i \in A_j \\ 0 & x_i \notin A_j. \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} d(x_i) &= \sum_{j=1}^{11} a_{i,j}, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}; \\ |A_j| &= \sum_{i=1}^m a_{i,j}, \forall j \in \{1, 2, \dots, 11\} \end{aligned}$$

và

$$\sum_{i=1}^m d(x_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{11} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{11} \sum_{i=1}^m a_{i,j} = \sum_{j=1}^{11} |A_j| = 55. \quad (1)$$

Ta có

$$\sum_{i < j} |A_i \cap A_j| = \sum_{k=1}^m C_{d(x_k)}^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m d(x_k)(d(x_k) - 1) \leq \frac{1}{2}(d-1) \sum_{k=1}^m d(x_k). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\sum_{i < j} |A_i \cap A_j| \leq \frac{55(d-1)}{2}. \quad (3)$$

Mặt khác, từ giả thiết $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ nên với mỗi cặp (A_i, A_j) luôn tồn tại $x_k \in A_i \cap A_j$ hay cặp (A_i, A_j) được tính ít nhất một lần trong biểu thức $\sum_{i < j} |A_i \cap A_j|$, do đó ta có

$$\sum_{i < j} |A_i \cap A_j| \geq C_{11}^2 = 55. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta suy ra $d \geq 3$.

Nếu $d = 3$ thì với mỗi $x_i \in S$ ta có $d(x_i) \leq d = 3$.

Ta chứng minh không tồn tại $x_j \in S$ để $d(x_j) \leq 2$. Thật vậy, giả sử tồn tại $x_j \in S$ để $d(x_j) \leq 2$, khi đó

$$\begin{aligned} 55 &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m d(x_i)(d(x_i) - 1) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} d(x_i)(d(x_i) - 1) + \frac{1}{2} d(x_j)(d(x_j) - 1) \\ &\leq \frac{n-1}{2} \sum_{i \neq j} d(x_i) + \frac{d(x_j)(d(x_j) - 1)}{2}. \end{aligned}$$

Mà

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{2} \sum_{i \neq j} d(x_i) + \frac{d(x_j)(d(x_j) - 1)}{2} &= \frac{n-1}{2} \sum_{i=1}^m d(x_i) + \frac{d(x_j)(d(x_j) - d)}{2} \\ &\leq \frac{(3-1)55}{2} + \frac{2(2-3)}{2} = 54. \end{aligned}$$

Điều này dẫn đến vô lý, hay ta có $d(x_i) = 3 \forall x_i \in S$, suy ra $3m = 55$ (không thoả mãn).

Vậy $d = 4$ và ta chỉ ra có 11 tập hợp thoả mãn yêu cầu bài toán là

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{1, 2, 3, 4, 5\}, & A_2 &= \{1, 2, 3, 4, 5\}, & A_3 &= \{1, 6, 7, 8, 9\}, \\
A_4 &= \{1, 10, 11, 12, 13\}, & A_5 &= \{2, 6, 9, 10, 14\}, & A_6 &= \{3, 7, 11, 14, 15\}, \\
A_7 &= \{4, 8, 9, 12, 15\}, & A_8 &= \{3, 6, 8, 10, 13\}, & A_9 &= \{4, 5, 6, 11, 14\}, \\
A_{10} &= \{2, 7, 11, 12, 13\}, & A_{11} &= \{5, 9, 13, 14, 15\}.
\end{aligned}$$

□

Bài 6 (Hà Tĩnh TST 2023). Một thầy giáo xây dựng chương trình ôn tập cho đội tuyển học sinh giỏi Quốc gia môn Toán trong một số ngày, mỗi ngày học đúng 1 trong 3 phần: Số học, Hình học và Tổ hợp.

- a) Có bao nhiêu cách xếp lịch ôn tập trong 6 ngày sao cho có đủ cả 3 phần.
- b) Có bao nhiêu cách xếp lịch ôn tập trong 8 ngày sao cho cứ mỗi 4 ngày liên tiếp thì đều có đủ cả 3 phần.

Lời giải.

- a) Ta xét các trường hợp thỏa mãn bài toán:

TH 1: Có 2 môn học mỗi môn 1 ngày, môn còn lại học 4 ngày.

Trường hợp này có $(C_3^2 \cdot C_6^1 \cdot C_5^1) \cdot C_4^4$ cách.

TH 2: Có 1 môn học 1 ngày, 1 môn học 2 ngày, 1 môn học 3 ngày.

Trường hợp này có $3! \cdot C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3$ cách.

TH 3: Cả 3 môn học mỗi môn học 2 ngày.

Trường hợp này có $C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2$ cách.

Vậy tổng số cách xếp lịch trình là

$$(C_3^2 \cdot C_6^1 \cdot C_5^1) \cdot C_4^4 + 3! \cdot C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3 + C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = 540 \text{ (cách)}.$$

- b) Để đơn giản, ta kí hiệu các môn lần lượt là 1, 2 và 3; đồng thời kí hiệu (*) là điều kiện “cứ mỗi 4 kí tự liên tiếp đều xuất hiện đủ 3 số 1, 2, 3”.

Khi đó, bài toán trở thành tính số xâu gồm tám kí tự tạo bởi các số 1, 2, 3 thỏa mãn điều kiện (*).

Với mỗi $n \geq 4$, đặt $x_1 x_2 \dots x_n$ là một xâu gồm n kí tự tạo bởi các số 1, 2, 3.

Từ điều kiện (*), suy ra trong ba kí tự cuối x_{n-2}, x_{n-1}, x_n phải xuất hiện ít nhất hai trong ba số 1, 2, 3.

Do đó, ta xây dựng các tập hợp như sau

- S_n là tập hợp tất cả các xâu kí tự thỏa mãn (*);
- A_n là tập hợp tất cả các xâu kí tự thỏa mãn (*) mà x_{n-2}, x_{n-1}, x_n đôi một khác nhau;
- B_n là tập hợp tất cả các xâu kí tự thỏa mãn (*) mà $x_{n-2} = x_{n-1}$ hoặc $x_{n-2} = x_n$;
- C_n là tập hợp tất cả các xâu kí tự thỏa mãn (*) mà $x_{n-1} = x_n$.

Khi đó, ta có $|S_n| = |A_n| + |B_n| + |C_n|$.

Với mỗi xâu $n+1$ kí tự ($n \geq 4$), xét 4 kí tự cuối $x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}$.

TH 1: Nếu xâu thuộc A_{n+1} thì x_{n-1}, x_n, x_{n+1} đôi một khác nhau nên x_{n-2} phải bằng x_{n-1} hoặc x_n hoặc x_{n+1} .

Với $x_{n-2} = x_{n+1}$ thì x_{n-2}, x_{n-1}, x_n đôi một khác nhau, nên xâu đó tương ứng với một xâu thuộc A_n .

Với $x_{n-2} = x_{n-1}$ hoặc $x_{n-2} = x_n$ thì xâu đó tương ứng với một xâu thuộc B_n .

Do đó ta có $|A_{n+1}| = |A_n| + |B_n|$.

TH 2: Nếu xâu thuộc B_{n+1} thì $x_{n-1} = x_n$ hoặc $x_{n-1} = x_{n+1}$.

Với $x_{n-1} = x_n$, thì xâu tương ứng với một xâu thuộc C_n .

Với $x_{n-1} = x_{n+1}$ thì x_{n-2}, x_{n-1}, x_n đôi một khác nhau nên xâu đó tương ứng với một xâu thuộc A_n .

Do đó, ta có $|B_{n+1}| = |A_n| + |C_n|$.

TH 3: Nếu xâu thuộc C_{n+1} thì $x_n = x_{n+1}$.

Suy ra x_{n-2}, x_{n-1}, x_n đôi một khác nhau, nên xâu đó tương ứng với một xâu thuộc A_n .

Do đó, ta có $|C_{n+1}| = |A_n|$.

Tóm lại, ta được mối quan hệ truy hồi

$$\begin{cases} |A_{n+1}| = |A_n| + |B_n| \\ |B_{n+1}| = |A_n| + |C_n| \\ |C_{n+1}| = |A_n| \end{cases}, \forall n \geq 5.$$

Ta tính $|A_4|, |B_4|, |C_4|$:

- $|A_4| = 3! \cdot 3 = 18$ (3 kí tự cuối có 3! cách xếp, kí tự đầu có 3 cách chọn);
- $|C_4| = 3! \cdot 1 = 6$ (xếp 3 số đầu có 3! cách, số cuối chỉ có 1 cách vì bằng số thứ 3);

- $|B_4| = 3! + 3! = 12$ (mỗi trường hợp tính tương tự như tính $|C_4|$).

Từ đây, kết hợp với quan hệ truy hồi ta xây dựng được bảng giá trị sau

n	$ A_n $	$ B_n $	$ C_n $
4	18	12	6
5	30	24	18
6	54	48	30
7	102	84	54
8	186	156	102

Vậy số cách xếp lịch ôn tập là $|S_8| = |A_8| + |B_8| + |C_8| = 444$.

□

Bài 7 (Hải Phòng TST 2023). Cho số nguyên dương n và ký hiệu S_n là tập hợp các hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ của $\{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $2(a_1 + a_2 + \dots + a_k)$ chia hết cho k với mọi $k = 1, 2, \dots, n$. Tính số phần tử của tập hợp S_n .

Lời giải.

Trước hết ta tính được $|S_1| = 1, |S_2| = 2, |S_3| = 6$.

Với $n \geq 4$ ta có $2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 2(1 + 2 + \dots + n) = n(n+1) \equiv 2 \pmod{n-1}$.

Mà $2(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$ chia hết cho $n-1$ nên $2a_n \equiv 2 \pmod{n-1}$.

Điều này chỉ xảy ra khi $a_n = n$ hoặc $a_n = 1$ hoặc $a_n = \frac{n+1}{2}$.

Trường hợp 1: Nếu $a_n = n$ thì $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ là các hoán vị thuộc tập S_{n-1} nên có $|S_{n-1}|$ hoán vị thỏa mãn.

Trường hợp 2: Nếu $a_n = 1$ thì $(a_1 - 1, a_2 - 1, \dots, a_{n-1} - 1)$ là các hoán vị thuộc tập hợp S_{n-1} . Vì $2[(a_1 - 1) + (a_2 - 1) + \dots + (a_k - 1)] = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_k) - 2k$ chia hết cho k với $1 \leq k \leq n-1$.

Do đó có $|S_{n-1}|$ hoán vị thỏa mãn.

Trường hợp 3: Nếu $a_n = \frac{n+1}{2}$, ta chọn $k = n-2$ ta có

$$\begin{aligned} 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2}) &= 2[(1 + 2 + \dots + n) - a_n - a_{n-1}] \\ &= n(n+1) - (n+1) - 2a_{n-1} = (n+2)(n-2) + (3 - 2a_{n-1}). \end{aligned}$$

Do đó $2a_{n-1} - 3$ chia hết cho $n - 2$ nên suy ra $2a_{n-1} - 3 \in \{0, n - 2, 2n - 4\}$.

Mà $2a_{n-1} - 3$ là số lẻ nên $2a_{n-1} - 3 = n - 2$ suy ra $a_{n-1} = \frac{n+1}{2}$ (vô lý).

Do đó ta có quan hệ truy hồi $|S_n| = 2|S_{n-1}|$ với $|S_3| = 6$ nên ta suy ra $|S_n| = 3 \cdot 2^{n-2}$ với mọi $n \geq 3$. $\square$

Bài 8 (Đề thi đề nghị DHĐBBB tỉnh Yên Bái, năm 2023).

Trong một phòng thi trắc nghiệm môn Toán có 24 thí sinh đã được xếp ngồi quanh một bàn tròn. Trong bì đựng đề thi của giám thị có 5 loại đề khác nhau, mỗi loại đề có nhiều bản. Một cách phát đề được gọi là đúng quy chế nếu mỗi thí sinh được nhận chỉ một đề và hai thí sinh bất kỳ ngồi ngay cạnh nhau nhận được hai loại đề khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách phát đề đúng quy chế?

Lời giải.

Gọi S_n là số cách phát đề cho n học sinh sao cho không có 2 học sinh nào ngồi cạnh nhau có cùng đề thi.

Cố định một học sinh làm vị trí đầu tiên và các học sinh bên tay phải của học sinh đó là vị trí thứ 2, thứ 3, ..., thứ n (học sinh ở vị trí thứ n ngồi cạnh học sinh ở vị trí thứ nhất)

Ta thấy,

- Nếu học sinh ở vị trí thứ nhất và học sinh ở vị trí thứ $n - 1$ có đề thi khác nhau thì sẽ có 3 cách phát đề cho học sinh ở vị trí thứ n .
- Nếu học sinh ở vị trí thứ nhất và học sinh ở vị trí thứ $n - 1$ có đề thi giống nhau thì có 4 cách phát đề cho học sinh ở vị trí thứ n .

Do đó ta có hệ thức $S_n = 3S_{n-1} + 4S_{n-2}$ ($n \geq 4$).

Sử dụng phương pháp sai phân để tính S_n . Xét phương trình đặc trưng

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_n = a \cdot (-1)^n + b \cdot 4^n$$

$$\text{Do } S_2 = 5 \cdot 4 = 20, S_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ nên } \begin{cases} a + 16b = 20 \\ -a + 64b = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S_n = 4(-1)^n + 4^n \Rightarrow S_{24} = 4 + 4^{24}. \quad \square$$

Bài 9 (Harvard-MIT Mathematics Tournament 2022).

Các số $1, 2, \dots, 10$ được sắp xếp ngẫu nhiên thành một vòng tròn. Tính xác suất để với mọi số nguyên dương $k < 10$, tồn tại một số nguyên $k' > k$ sao cho có tối đa một số nằm giữa k và k' trên vòng tròn.

Lời giải.

Gọi a_n là số cách sắp xếp $1, 2, 3, \dots, n$ theo hình tròn sao cho điều kiện được thỏa mãn. Số a gọi là "gần" với b nếu có tối đa một số nằm giữa a và b .

Để phát triển một công thức truy hồi cho a_n , ta xem xét hai trường hợp. Trong trường hợp thứ nhất, giả sử rằng n và $n - 1$ là kề nhau. Sau đó, bằng cách loại bỏ n khỏi vòng tròn số, bất kỳ số nào thỏa mãn điều kiện bởi vì n "gần" đó sẽ có $n - 1$ khoảng cách giống nhau từ nó, vì vậy mỗi số trong những số này vẫn thỏa đề. Do đó, sắp xếp tròn còn lại là một sắp xếp hợp lệ theo a_{n-1} . Do đó, mỗi sắp xếp với n số và hai số kề nhau có thể được thu được bằng cách chèn n vào một trong các vị trí liên tiếp với $n - 1$, tức là $2a_{n-1}$ trường hợp.

Trong trường hợp thứ hai, giả sử rằng n và $n - 1$ có một số nằm giữa chúng, gọi là k . Tiếp theo, xem xét việc loại bỏ cả n và k . Bất kỳ số nào gần với n cũng gần với $n - 1$. Hơn nữa, k vẫn kề $n - 1$, vì vậy nó vẫn thỏa mãn điều kiện. Do đó, ta còn lại một sắp xếp của $n - 2$ số thỏa mãn điều kiện đã cho, tức là a_{n-2} cách. Cuối cùng, mọi sắp xếp với n và $n - 1$ không kề nhau có thể được thu được bằng cách lấy một trong các sắp xếp tròn nhỏ a_{n-2} , chèn n liên tiếp với $n - 1$ (số lớn nhất trong sắp xếp này) và chọn một trong $n - 2$ số để bỏ qua từ sắp xếp bên ngoài và thay vào đó chèn giữa n và $n - 1$.

Từ những lập luận trên, ta có mối quan hệ truy hồi như sau:

$$a_n = 2a_{n-1} + 2(n-2)a_{n-2}.$$

Đặt $p_n = \frac{a_n}{(n-1)!}$, ta có:

$$p_n(n-1)! = 2p_{n-1}(n-2)! + 2p_{n-2}(n-2)! \Leftrightarrow p_n = \frac{2}{n-1}(p_{n-1} + p_{n-2}).$$

Vì $p_4 = p_5 = 1$, ta có $p_6 = \frac{4}{5}$, $p_7 = \frac{3}{5}$, $p_8 = \frac{2}{5}$, $p_9 = \frac{1}{4}$, và $p_{10} = \frac{13}{90}$. □

Bài 10 (Bắc Ninh TST 2021). Cho n là một số nguyên dương, kí hiệu $[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ và xét σ là một phép thế của tập $[n]$, nghĩa là một song ánh từ $[n]$ vào chính nó. Một quỹ đạo của x đối với σ là tập $O(x) = \{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots\}$, ta cũng có thể viết một quỹ đạo dưới dạng $O(x) = \{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{k-1}(x)\}$ với k là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $\sigma^k(x) = x$.

Ví dụ, xét $n = 7$ và phép thế

$$\sigma: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

có ba quỹ đạo $(1, 5, 4, 2)$, (3) , $(6, 7)$. Kí hiệu $c(n, k)$ là số phép thế của $[n]$ với chính xác k quỹ đạo.

a) Chứng minh rằng các số $c(n, k)$ thỏa mãn quan hệ truy hồi sau

$$c(n+1, k) = c(n, k-1) + n \cdot c(n, k).$$

b) Đặt $f_n(t) = t(t-1)(t-2) \cdot (t-n+1)$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng hệ số của số hạng chứa t^k , với $0 \leq k \leq n$, trong khai triển đa thức $f_n(t)$ là $(-1)^{n+k} \cdot c(n, k)$.

c) Giả sử n là số nguyên dương chẵn. Phép thế σ được gọi **đẹp** nếu tồn tại phần tử $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, sao cho $\sigma(i+1) - \sigma(i) = \frac{n}{2}$. Chứng minh rằng số phép thế đẹp nhiều hơn số phép thế không đẹp.

Lời giải.

a) Xét một phép thế σ của $[n+1]$ với chính xác k quỹ đạo. Ta xét hai trường hợp $n+1$ là điểm cố định và không.

- Nếu $n+1$ là điểm cố định của σ thì ta có một phép thế của $[n]$ với chính xác $k-1$ quỹ đạo. Số các phép thế đó là $c(n, k-1)$.
- Nếu $n+1$ không là điểm cố định, ta có thể bỏ phần tử $n+1$ bằng cách ánh xạ $\sigma^{-1}(n+1)$ thành $\sigma(n+1)$ để thu được một phép thế của $[n]$ với k quỹ đạo.

Hơn nữa mọi phép thế ρ của $[n]$ với k quỹ đạo được đếm n lần vì thế ta có thể thêm $n+1$ giữa j và $\rho(j)$ với mọi j .

Trong trường hợp này ta có thể thu được mọi phép thế của $n+1$ quỹ đạo bằng cách đếm ρ . Suy ra ta có $n \cdot c(n, k)$ phép thế và thu được điều phải chứng minh.

- Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n .

Nếu $n=1$ ta có $f_n(t)f_1(t) = t$ có hệ số bằng 1 và

$$(-1)^{n+k} \cdot c(n, k) = (-1)^{1+1} \cdot c(1, 1) = c(1, 1) = 1.$$

Mệnh đề đúng với $n=1$.

Giả sử mệnh đề cũng đúng với n , ta chứng minh nó cũng đúng với $n+1$.

Thật vậy, do

$$\begin{aligned} c_{n+1}(t) \cdot t^k &= \sum_{k=0}^{n+1} c(n+1, k) \cdot t^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (c(n, k-1) + n \cdot c(n, k)) t^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} c(n, k-1) t^k + \sum_{k=0}^{n+1} n \cdot c(n, k) t^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= t \cdot c_n(t) + n \cdot c_n(t) \\
&= (t + n) \cdot c_n(t).
\end{aligned}$$

Suy ra $c_{n+1}(t) = t(t+1)(t+2) \cdots (t+n)$. Kéo theo rằng

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+k} c(n, k) t^k &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n+1} (-t)^k \cdot c(n, k) \\
&= (-1)^n \cdot c_n(-t) \\
&= (-1)^n (-t)(-t+1) \cdots (-t-n+1).
\end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

b) Đặt $n = 2m$. Gọi X là tập các phép thế đẹp, X_i là tập các phép thế mà hai phần tử i và $i+m$ kề nhau. Khi đó, $X = \bigcup_{i=1}^m X_i$. Với $1 \leq i \leq m$, ta tạo hoán vị của X_i như sau

- Chọn một hoán vị của $(1, 2, \dots, i+m-1, i+m+1, \dots, n)$, có $(n-1)!$ cách.
- Xếp phần tử $i+m$ trước hoặc sau i , có 2 cách.

Suy ra $|X_i| = 2 \cdot (n-1)!$ cách.

Với mọi $1 \leq i \leq j \leq m$, ta tạo một phép thế thuộc tập $X_i \cup X_j$ như sau

- Chọn một hoán vị của $(1, 2, \dots, i+m-1, i+m+1, \dots, j+m-1, j+m+1, \dots, n)$, có $(n-2)!$ cách.
- Xếp phần tử $i+m$ trước hoặc sau i và xếp phần tử $j+m$ trước hoặc sau j có 4 cách.

Suy ra $|X_i \cap X_j| = 4 \cdot (n-2)!$ với mọi $1 \leq i \leq j \leq m$.

Theo nguyên lý bù trừ, ta có

$$|X| \geq \sum_{i=1}^m |X_i| - \sum_{i=1}^m |X_i \cap X_j| = 2m^2 \cdot (n-2)! > \frac{n!}{2}.$$

Suy ra số phép thế đẹp nhiều hơn số phép thế không đẹp.

□

Bài 11 (IMO Shortlist 2020). Cho n là một số nguyên dương. Tìm số lượng hoán vị $a_1, a_2, \dots, a_n$ của dãy số $1, 2, \dots, n$ sao cho

$$a_1 \leq 2a_2 \leq 3a_3 \leq \cdots \leq na_n. \quad (*)$$

Lời giải.

Kí hiệu P_n là số lượng các hoán vị thỏa mãn đề bài. Dễ thấy rằng $P_1 = 1$ và $P_2 = 2$.

Bổ đề. Với $n \geq 3$, nếu một hoán vị $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn (*) thì hoặc là $a_n = n$ hoặc là $a_{n-1} = n$

và $a_n = n - 1$.

Chứng minh. Gọi k là chỉ số sao cho $a_k = n$. Nếu $k = n$ thì bổ đề hiển nhiên đúng.

Nếu $k = n - 1$ thì từ (*) ta có $n(n - 1) = (n - 1)a_{n-1} \leq na_n$, do vậy $a_n \geq n - 1$. Vì $a_n \neq a_{n-1} = n$ nên lựa chọn duy nhất cho a_n là $a_n = n - 1$.

Bây giờ giả sử $k \leq n - 2$. Với mỗi $k < i < n$ ta có $kn = ka_k \leq ia_i < na_i$, do vậy $a_i \geq k + 1$. Hơn nữa, $na_n \geq (n - 1)a_{n-1} \geq (n - 1)(k + 1) = nk + (n - 1 - k)$, do đó $a_n \geq k + 1$. Bây giờ có $n - k + 1$ số $a_k, a_{k+1}, \dots, a_n$ tất cả đều lớn hơn k , nhưng chỉ có $n - k$ giá trị, điều này là vô lý.

Vậy bổ đề được chứng minh hoàn toàn.

Quay lại bài toán, nếu $a_n = n$ thì $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ phải là một hoán vị của các số $1, \dots, n - 1$ thỏa mãn $a_1 \leq 2a_2 \leq \dots \leq (n - 1)a_{n-1}$, có P_{n-1} hoán vị như vậy. Bất đẳng thức cuối cùng ở (*), $(n - 1)a_{n-1} \leq na_n = n^2$ hiển nhiên đúng.

Nếu $(a_{n-1}, a_n) = (n, n - 1)$, thì $a_1, a_2, \dots, a_{n-2}$ phải là một hoán vị của các số $1, \dots, n - 2$ thỏa mãn $a_2 \leq 2a_3 \leq \dots \leq (n - 2)a_{n-2}$, có P_{n-2} hoán vị như vậy. Bất đẳng thức cuối cùng ở (*), $(n - 2)a_{n-2} \leq (n - 2)^2 < n(n - 1) = (n - 1)a_{n-1} = na_n$, hiển nhiên đúng.

Suy ra dãy $(P_1, P_2, \dots)$ thỏa mãn quan hệ truy hồi $P_n = P_{n-1} + P_{n-2}$ với mọi $n \geq 3$. Hai hạng tử đầu của dãy là $P_1 = F_2$ và $P_2 = F_3$, như vậy bằng quy nạp ta suy ra $P_n = F_{n+1}$. $\square$

Bài 12 (ICO 2020). Seyed có 998 đồng xu màu trắng, một đồng xu màu đỏ, và một đồng xu không bình thường với một mặt màu đỏ và một mặt màu trắng. Anh ấy không thể nhìn thấy màu của các đồng xu mà thay vào đó anh ấy có một máy quét kiểm tra xem tất cả các mặt của đồng xu tiếp xúc với kính của máy quét có màu trắng hay không. Có thuật toán nào để tìm ra đồng xu màu đỏ bằng cách sử dụng máy quét tối đa 17 lần không?

 **Lời giải.**

Bổ đề 1. Xét dãy Fibonacci. Đối với mỗi số nguyên $n \geq 2$:

$$F_n \leq 2^{n-2}$$

Chứng minh ta tiến hành bằng cách quy nạp. Với trường hợp $n = 2$, $F_2 = 1 \leq 2^{2-2} = 1$. Giả sử mệnh đề đúng với F_n . Ta có

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \leq 2F_n \leq 2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}$$

Do đó bổ đề đúng cho tất cả các số nguyên lớn hơn 1.

Bổ đề 2. Ta có thể tìm ra đồng xu màu đỏ từ n đồng xu gồm một đồng xu màu đỏ và $n - 1$ đồng xu màu trắng trong tối đa $\lceil \log_2 n \rceil$ bước.

Chứng minh. ta tiến hành bằng cách quy nạp. Trường hợp $n = 1$ là trường hợp dễ dàng.

Giả sử rằng giả thiết quy nạp được thỏa mãn cho $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Ta chứng minh rằng nó cũng

đúng cho n . Lấy $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ đồng xu và đặt chúng vào máy quét. Từ câu trả lời, ta biết được rằng đồng xu màu đỏ nằm trong những đồng xu này hoặc trong những đồng xu khác.

Bằng cách sử dụng giả thiết quy nạp, ta có thể tìm ra đồng xu màu đỏ trong tối đa

$$\lceil \log_2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \rceil + 1 \leq \lceil \log_2 n \rceil \text{ bước.}$$

Quay lại vấn đề chính, ta muốn chứng minh rằng có thể tìm ra đồng xu màu đỏ trong bất kỳ nhóm nào gồm k đồng xu (với $k < F_n$), bao gồm một đồng xu không bình thường, bằng cách sử dụng máy quét tối đa n lần. Một lần nữa, ta sử dụng phương pháp quy nạp. Đối với $n = 1$ và $n = 2$, ta có thể tìm ra đồng xu màu đỏ bằng cách sử dụng máy quét tối đa 1 và 2 lần, tương ứng. Giả sử rằng đối với mỗi i từ 3 đến $n - 1$, ta có thể tìm ra đồng xu màu đỏ trong F_i đồng xu (bao gồm một đồng xu không bình thường) bằng cách sử dụng máy quét tối đa i lần. Bây giờ, ta lấy F_n đồng xu và chia thành hai nhóm A và B với F_{n-1} và F_{n-2} đồng xu, tương ứng. Sau đó, ta quét nhóm B . ta có hai trường hợp:

- Không có mặt màu đỏ trong nhóm B , do đó, đồng xu màu đỏ nằm trong nhóm A . Từ giả thiết quy nạp, ta có thể tìm ra nó trong tối đa $n - 1$ bước.
- Có một mặt màu đỏ trong nhóm B . Trong trường hợp này, ta đảo ngược các đồng xu trong máy quét và quét lại. Ta lại có hai trường hợp:
 - Có một mặt màu đỏ, do đó, đồng xu màu đỏ nằm trong nhóm này và theo giả thiết quy nạp, ta có thể tìm ra nó trong tối đa $n - 2$ bước.
 - Không có mặt màu đỏ, ngụ ý rằng nhóm A có $F_{n-1} - 1$ đồng xu màu trắng và một đồng xu màu đỏ. Sử dụng bổ đề 1, ta có $F_{n-2} \leq 2^{n-2}$, do đó, ta có thể tìm ra đồng xu màu đỏ bằng cách sử dụng bổ đề 2 với tối đa $n - 2$ bước.

Vậy câu trả lời cho bài toán là "Có". □

Bài 13 (Hà Tĩnh TST 2016-2017). Cho tập $S = \{1, 2, 3, \dots, 2016\}$. Hỏi có bao nhiêu hoán vị $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2016})$ của tập S sao cho $2(a_1 + a_2 + \dots + a_k) : k$ với $\forall k = 1, 2, 3, \dots, 2016$.

 **Lời giải.**

Ta xét trường hợp $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

Gọi F_n là số hoán vị thỏa mãn tính chất. Ta có

$$F_1 = 1; F_2 = 2; F_3 = 6.$$

Xét một hoán vị $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ thỏa mãn yêu cầu, ta gọi đó là hoán vị đẹp.

Với mỗi hoán vị đẹp ta đều có

$$2(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) : (n-1) \Rightarrow n(n+1) - 2a_n : (n-1)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow ((n-1)(n+2) - 2(a_n - 1)) : (n-1) \\ &\Rightarrow 2(a_n - 1) \{0; n-1; 2(n-1)\} \Rightarrow a_n \in \left\{1; \frac{n+1}{2}; n\right\}. \end{aligned}$$

Trường hợp 1. Nếu $a_n = \frac{n+1}{2}$ ta có

$$\begin{aligned} 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2}) : (n-2) &\Rightarrow (n(n+1) - 2a_{n-1} - (n+1)) : (n-2) \\ &\Rightarrow ((n-2)(n+2) - (2a_{n-1} - 3)) : (n-2) \\ &\Rightarrow 2a_{n-1} - 3 \in \{0; n-2; 2(n-2)\} \\ &\Rightarrow a_{n-1} \in \left\{\frac{3}{2}; \frac{n+1}{2}; n - \frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

Ta thấy cả 3 trường hợp này đều không thỏa mãn.

Trường hợp 2. Nếu $a_n = n$, ta có $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1})$ là một hoán vị đẹp của tập $S_1 = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$.

Có F_{n-1} hoán vị $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1})$ của tập $S_1 = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$.

Bổ sung n vào cuối mỗi hoán vị ta được một hoán vị đẹp $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ của tập $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ và ngược lại.

Trường hợp 3. Nếu $a_n = 1$ ta thấy $(a_1 - 1, a_2 - 1, \dots, a_{n-1} - 1)$ là một hoán vị đẹp của tập $S_1 = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$.

Mỗi hoán vị đẹp $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1})$ của tập $S_1 = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ cho ta một hoán vị đẹp $(b_1 + 1, b_2 + 1, b_3 + 1, \dots, b_{n-1} + 1; 1)$ của tập $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ và ngược lại.

Vì có F_{n-1} hoán vị đẹp $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1})$ của tập $S_1 = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ nên có F_{n-1} hoán vị đẹp $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ của tập $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Suy ra

$$F_n = 2F_{n-1}.$$

Từ giả thiết

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 2 \\ F_3 = 6 \\ F_n = 2F_{n-1} \end{cases} \Rightarrow F_n = 3 \cdot 2^{n-2}.$$

Vậy $F_{2106} = 3 \cdot 2^{2104}$. □

Bài 14 (Đề nghị DHĐBB 2013). Với n là số nguyên dương, một tập con của tập $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ được gọi là tốt nếu sau khi ta sắp xếp thứ tự tăng các phần tử của nó thì thu được các số lẻ, chẵn, lẻ, ... theo thứ tự. Ví dụ các tập con tốt là $\{1, 4, 5, 6\}$, $\{3, 4, 7\}$, tập $\emptyset$. Tập $\{2, 3, 4, 7\}$ không là tập con tốt do nó bắt đầu bởi số chẵn. Tính số tập con tốt của tập $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Lời giải.

Gọi f_n là số tập con tốt của $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Ta lập hệ thức truy hồi của f_n .

- Nếu tập con tốt của $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ không lấy n thì $f_n = f_{n-1}$.
- Nếu tập con tốt của $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ lấy n thì $f_n = f_{n-2}$.

Vậy ta có

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}.$$

Hơn nữa

$$f_1 = 2, f_2 = 3.$$

Phương trình đặc trưng

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Suy ra

$$f_n = A \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + B \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Thay 2 giá trị đầu ta được

$$\begin{cases} A \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + B \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 2 \\ A \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 + B \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{2(2\sqrt{5} - 1)}{\sqrt{5} - 5} \\ B = \frac{2}{5 + \sqrt{5}}. \end{cases}$$

Suy ra

$$f_n = \frac{2(2\sqrt{5} - 1)}{\sqrt{5} - 5} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{2}{5 + \sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n = \frac{2\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}.$$

□

Bài 15 (IMO 2011). Giả sử $n > 0$ là một số nguyên. Cho một cái cân đĩa và n quả cân có khối lượng lần lượt là $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{n-1}$. Ta muốn đặt lên cái cân mỗi một trong n quả cân, lần lượt từng quả một, theo cách để đảm bảo đĩa cân bên phải không bao giờ nặng hơn đĩa cân bên trái. Ở mỗi bước ta chọn một trong các quả cân chưa được đặt lên rồi đặt nó lên đĩa bên phải, hoặc đĩa bên trái, cho đến khi tất cả các quả cân đều được đặt lên đĩa. Hỏi có bao nhiêu cách để thực hiện việc đặt cân theo đúng mục đích đặt ra?

Lời giải.

Gọi s_n là số cách để thực hiện việc đặt cân theo đúng mục đích đặt ra.

Xét cách đặt $n + 1$ quả cân có khối lượng $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^n$.

Do $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 < 2^n$ nên trong mọi cách đặt cân thoả mãn bài toán thì quả cân có khối lượng 2^n luôn được đặt ở đĩa cân bên trái.

Nếu quả cân 2^n được chọn cuối cùng chỉ có một cách đặt (vì quả 2^n chỉ đặt lên đĩa bên trái) và số cách đặt n quả cân còn lại là s_n .

Nếu quả cân 2^n được đặt ở bước thứ i ($i = 1, 2, \dots, n$). Khi đó có n cách chọn i và trong trường hợp này quả cân 2^{n-1} có 2 cách đặt (đĩa bên phải hay bên trái đều thoả mãn), do đó số cách đặt $n + 1$ quả cân trong trường hợp này là $2n \cdot s_n$. Vậy ta có hệ thức truy hồi

$$s_{n+1} = 2n \cdot s_n + s_n = (2n + 1)s_n.$$

Ta có $s_1 = 1$ nên $s_n = (2n - 1)(2n - 3) \dots 3 \cdot 1$. □

Bài 16 (VMO 2009). Cho số nguyên dương n . Kí hiệu T là tập hợp gồm $2n$ số nguyên dương đầu tiên. Hỏi có tất cả bao nhiêu tập con S của T có tính chất trong S không tồn tại các số a, b mà $|a - b| \in \{1; n\}$?

 **Lời giải.**

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, kí hiệu d_n là số cần tìm theo yêu cầu đề bài.

Xét bảng ô vuông kích thước $2 \times n$. Điền vào các ô vuông con của bảng, lần lượt từ trái qua phải, từ trên xuống dưới, các số từ 1 đến $2n$.

1	2	...	$n - 1$	n
$n + 1$	$n + 2$	...	$2n - 1$	$2n$

Gọi ô thứ n của hàng 1 và ô thứ 1 của hàng 2 là hai ô đặc biệt. Khi đó hai số $a, b \in T$ thoả $|a - b| \in \{1; n\}$ khi và chỉ khi chúng nằm ở 2 ô kề nhau hoặc ở 2 ô đặc biệt. Vì thế d_n chính bằng số cách chọn 1 số ô của bảng (kể cả số ô được chọn bằng 0) mà ở mỗi cách không có 2 ô kề nhau hoặc 2 ô đặc biệt được chọn.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, kí hiệu

- k_n là số cách chọn mà ở mỗi cách không có 2 ô kề nhau được chọn. (*)
- s_n là số cách chọn mà trong các ô được chọn ở mỗi cách có 2 ô đặc biệt và không có 2 ô kề nhau.

Ta có $d_n = k_n - s_n$.

Tính k_n .

Dễ thấy, tất cả các cách chọn ô thoả mãn điều kiện (*) bao gồm

- k_{n-1} cách chọn mà ở mỗi cách không có ô nào thuộc cột 1 của bảng được chọn.
- $2t_{n-1}$ cách chọn mà ở mỗi cách đều có ô thuộc cột 1 của bảng được chọn;
trong đó t_n là số cách chọn ô thoả mãn điều kiện (*) của bảng khuyết đơn $2 \times n$.

		...		
x		...		

Do đó

$$k_n = k_{n-1} + 2t_{n-1}. \quad (1)$$

Lại có, tất cả các cách chọn ô thoả mãn điều kiện (*) từ bảng khuyết đơn $2 \times n$ bao gồm

- k_{n-1} cách chọn mà ở mỗi cách ô đánh dấu “x” không được chọn.
- t_{n-1} cách chọn mà ở mỗi cách ô đánh dấu “x” đều được chọn.

Vì thế $t_n = k_{n-1} + t_{n-1}$

Từ đó và (1) suy ra

$$k_n = k_{n-1} + 2(k_{n-2} + t_{n-2}) = 2k_{n-1} + k_{n-2}. \quad (2)$$

Bằng cách đếm trực tiếp, ta có $k_1 = 3, k_2 = 7$. Do đó ta tìm được

$$k_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1}}{2}. \quad (3)$$

Tính s_n

Dễ thấy $s_1 = 0, s_2 = s_3 = 1$ và với $n \geq 4$ ta có $s_n = h_{n-2}$, trong đó h_n là số cách chọn ô thoả mãn điều kiện (*) từ bảng khuyết kép $2 \times n$.

A		...	
		...	B

Do $s_3 = 1$, đặt $h_1 = 1$. Bằng cách đếm trực tiếp, ta có $h_2 = 4$.

Xét $n \geq 3$.

Dễ thấy, tất cả các cách chọn ô thoả mãn điều kiện (*) từ bảng khuyết kép $2 \times n$ bao gồm

- k_{n-2} cách chọn mà ở mỗi cách cả 2 ô A và B đều không được chọn.
- $2t_{n-2}$ cách chọn mà ở mỗi cách có đúng 1 trong 2 ô A, B được chọn.
- t_{n-2} cách chọn mà ở mỗi cách cả 2 ô A, B cùng được chọn.

Do đó

$$h_n = k_{n-2} + 2t_{n-2} + h_{n-2} = k_{n-1} + h_{n-2}. \quad (4)$$

Từ (2) và (4) suy ra

$$2h_n - k_n = 2h_{n-2} - k_{n-2}, \forall n \geq 3.$$

Dẫn tới $2h_n - k_n = (-1)^n, \forall n \geq 1$.

Vì thế

$$s_n = h_{n-2} = \frac{k_{n-2} + (-1)^{n-2}}{2}, \forall n \geq 3.$$

Vậy $d_1 = 3, d_2 = 6$

$$d_n = \frac{2k_n - k_{n-2} + (-1)^{n-3}}{2}, \forall n \geq 3 \text{ (} k_n \text{ theo (3))}.$$

□

Bài 17 (VMO-2002). Cho tập S gồm tất cả số nguyên trong đoạn $[1; 2002]$. Gọi T là tập hợp gồm tất cả các tập con không rỗng của S . Với mỗi tập X thuộc T kí hiệu $m(X)$ là trung bình cộng của tất cả các số thuộc X . Đặt $m = \frac{\sum m(X)}{|T|}$, ở đây tổng lấy theo tất cả các tập hợp X thuộc T . Tìm m .

 **Lời giải.**

Với mỗi k thuộc $1, 2, \dots, 2002$ đặt $m_k = \sum m(X)$ ở đây tổng lấy theo tất cả các tập hợp X thuộc T mà $|X| = k$.

Xét số a bất kì thuộc tập S . Dễ thấy a có mặt trong C_{2001}^k tập X thuộc T mà $|X| = k$

Suy ra

$$k \cdot m_k = (1 + 2 + 3 + \dots + 2002) C_{2001}^{k-1} = 1001 \cdot 2003 \cdot C_{2001}^{k-1}.$$

nên

$$\sum m(X) = \sum_{k=1}^{2002} m_k = 1001 \cdot 2003 \cdot \sum_{k=1}^{2002} \frac{C_{2001}^{k-1}}{k} = \frac{2003}{2} \cdot \sum_{k=1}^{2002} C_{2002}^k = \frac{2003 \cdot (2^{2002} - 1)}{2}.$$

$$\text{Vì } |T| = 2^{2002} - 1 \text{ nên } m = \left(\frac{\sum m(X)}{|T|} \right) = \frac{2003}{2}.$$

□

Bài 18 (VMO 1990 – bảng A). Các em nhỏ của một lớp đứng thành vòng tròn chơi trò chia kẹo. Cô giáo cho mỗi em một số chẵn chiếc kẹo. Một em nào đó đưa nửa số kẹo của mình cho bạn ở ngay bên tay phải mình. Tiếp đó em vừa nhận được kẹo của bạn xong cũng làm như thế nếu số

kẹo của mình là số chẵn, còn nếu là số lẻ thì nhận được một chiếc kẹo của cô trước khi đưa cho bạn. Các em cứ đưa kẹo như thế theo vòng tròn. Chứng minh rằng sẽ dẫn đến trường hợp là có một em đưa một nửa số kẹo của mình không phải cho bạn mà là cho cô giáo thì khi đó số kẹo của mỗi em đều bằng nhau.

Lời giải.

Giả sử hai học sinh A và B đứng liên nhau theo thứ tự chuyển kẹo. Xét thời điểm thứ n khi A đang chuyển x_n chiếc kẹo cho B và giữ lại a_n chiếc kẹo mà B chưa nhận kẹo.

Lúc đó giả sử số kẹo mà A và B đang giữ là a_n, b_n . Gọi M_n, T_n theo thứ tự là số kẹo lớn nhất và số kẹo nhỏ nhất của mọi học sinh tại thời điểm thứ n không tính đến x_n .

Tại thời điểm thứ $n + 1$ khi B đang chuyển số kẹo x_{n+1} cho người tiếp theo thì số kẹo của B theo

$$\text{giả thiết là } b_{n+1} = x_{n+1} = \begin{cases} \frac{b_n + x_n}{2}, \\ \frac{b_n + x_n + 1}{2}. \end{cases}$$

Lúc đó người đứng tiếp sau B chưa nhận kẹo và số kẹo của mọi người trừ B ra không đổi so với thời điểm thứ n (*)

• Nếu $a_n = x_n = b_n$ thì $b_{n+1} = a_n = b_n$ nên theo (*) thì $M_{n+1} = M_n$ và $T_{n+1} = T_n$.

• Nếu $a_n = x_n \neq b_n$ ta xét riêng M_{n+1} và T_{n+1} .

$$- \text{ Xét } M_{n+1} \text{ có } b_{n+1} \leq \frac{x_n + b_n + 1}{2} \leq \frac{M_n + M_n + 1}{2} = M_n + \frac{1}{2}.$$

Do M_n và b_{n+1} đều là số nguyên thì $b_{n+1} \leq M_n$. Từ đó và (*) suy ra $M_{n+1} \leq M_n$.

Vậy dãy (M_n) là dãy tự nhiên không tăng.

$$- \text{ Xét } T_{n+1} \text{ nếu } x_n < b_n \text{ thì } b_n \geq x_n + 1 = a_n + 1 \geq T_n + 1; \text{ nếu } x_n > b_n \text{ thì } x_n \geq b_n + 1 = a_n + 1 \geq T_n + 1.$$

$$\text{Vậy ta có } b_{n+1} \geq \frac{x_n + b_n}{2} \geq \frac{T_n + T_n + 1}{2} = T_n + \frac{1}{2}.$$

Do T_n và b_{n+1} đều là số nguyên thì $b_{n+1} \geq T_n + 1$.

Từ đó và (*) suy ra hoặc $T_{n+1} > T_n$ nếu ở thời điểm thứ n chỉ có duy nhất một số $b_n = T_n$ hoặc $T_{n+1} = T_n$, nếu có ít nhất một học sinh khác B có số kẹo là T_n .

Vậy dãy (T_n) là dãy tự nhiên không giảm, hơn nữa khi $b_n = T_n < a_n$ thì đến thời điểm thứ $n + 1$ có $b_{n+1} \geq T_n + 1$ nên số T_n sẽ mất đi một lần, và cứ tiếp tục chuyển kẹo sau hữu hạn lần thì số T_n mất hết, nghĩa là dãy (T_n) tăng thực sự.

Do dãy (M_n) là dãy tự nhiên không tăng còn dãy (T_n) là dãy tự nhiên không giảm và có lúc tăng thực sự nên đến một thời điểm nào đó phải có $M_k = T_k$, lúc đó số kẹo của mọi học sinh đều như nhau. □

Bài 19 (Trung quốc 1989). Có thể nào chia được 1989 điểm thành 30 nhóm có cỡ của các nhóm đó không bằng nhau để cho số các tập hợp gồm 3 điểm mà mỗi điểm được chọn từ 3 nhóm khác nhau là lớn nhất.

Lời giải.

Giả sử các cỡ của 30 nhóm là $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{30}$

Ta sẽ gọi nhóm có cỡ a_k vẫn tắt là nhóm k .

Giả sử $a_k \leq a_{k+1} - 3$.

Khi đó xét việc thay a_k bởi $a_k + 1$ và a_{k+1} bởi $a_{k+1} - 1$ ta vẫn còn được các nhóm có cỡ không bằng nhau. Số tất cả các bộ ba mà không có phần tử nào thuộc nhóm k hoặc $k + 1$ thì không bị ảnh hưởng, chỉ có các bộ ba có đúng một phần tử thuộc nhóm k hoặc $k + 1$ bị ảnh hưởng. Nhưng số các bộ ba có đúng một phần tử thuộc nhóm k và một phần tử thuộc nhóm $k + 1$ tăng lên, bởi vì $a_k a_{k+1} < (a_k + 1)(a_{k+1} - 1)$.

Như thế khoảng trống lớn nhất là 2.

Giả sử có hai khoảng trống độ dài là 2. Ta giả sử $a_j + 1 < a_{j+1} < a_k < a_{k+1} - 1$.

Bây giờ ta có thể thay a_j và a_{k+1} bởi $a_j + 1$ và $a_{k+1} - 1$.

Lập luận giống như trước số các bộ ba cũng tăng lên.

Vậy có nhiều lắm là hai khoảng trống độ dài 2.

Điều này chỉ đủ cho ta xác định các cỡ. Giả sử các cỡ tạo thành một dãy đơn giản có tất cả các khoảng trống bằng 1.

Nếu thành phần đầu tiên là n thì thành phần sau cùng là $n + 29$ và tổng là $\frac{30(2n + 29)}{2}$. Nhưng tổng này không thể bằng 1989 vì 1989 không là bội của 5.

Do đó ta giả sử các cỡ tạo thành một dãy đơn giản có tất cả các khoảng trống bằng 1, ngoại trừ một thành phần bị bỏ qua, để có một khoảng trống bằng 2.

Nếu thành phần đầu tiên là v và thành phần bị bỏ qua là m thì ta có

$$\frac{30(2n + 29)}{2} - m = 1989.$$

Nếu $n \leq 50$ thì $m \leq 2015 - 1989 = 26$, số này quá nhỏ vì ta phải có m giữa n và $n + 30$.

Nếu $n \geq 52$ thì $m \geq 2077 - 1989 = 88$, số này quá lớn.

Vậy $n = 51$ và $m = 57$

Suy ra các cỡ là 51, 52, 56, 58, 59, 60, ..., 81. □

Bài 20 (IMO-1967). Trong một cuộc đấu thể thao tổng số huy chương là m được phát trong n ngày thi đấu. Trong ngày thứ nhất người ta phát một huy chương và một phần bảy số huy chương còn lại. Trong ngày thứ hai người ta phát hai huy chương và một phần bảy số huy chương còn lại. Trong các ngày tiếp theo được tiếp tục và phát tương tự như thế. Ngày sau cùng còn lại n huy

chương để phát. Hỏi có bao nhiêu huy chương được thưởng và đã phát trong bao nhiêu ngày?

Lời giải.

Giả sử số huy chương còn lại khi bắt đầu ngày thi đấu thứ r là m_r . Khi đó $m_1 = m; m_n = n$ và với mọi $k < n$ ta có

$$\frac{6(m_k - k)}{7} = m_{k+1}.$$

Biến đổi và rút gọn ta có

$$m = 1 + 2 \cdot \frac{7}{6} + 3 \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^2 + \cdots + n \left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}.$$

hay

$$m = 36 \left[1 - (n+1) \left(\frac{7}{6}\right)^n + n \left(\frac{7}{6}\right)^{n+1} \right] = 36 + (n-6) \frac{7^n}{6^{n-1}}.$$

Do 6 và 7 nguyên tố cùng nhau nên 6^{n-1} phải chia hết $n-6$.

Nhưng lại có $6^{n-1} > n-6$ nên suy ra $n = 6$ và $m = 36$.

Vậy có 36 huy chương và phát trong 6 ngày. □

5.3. Bài tập đề nghị

Bài 21. Từ các chữ số 1, 2, 3 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có số lượng chữ số là lẻ, sao cho mỗi chữ số 1, 2, 3 xuất hiện đúng lẻ lần.

Lời giải.

Gọi x_n là số các số tự nhiên được lập thành từ các chữ số 1, 2, 3 có n chữ số, n lẻ và các chữ số trên xuất hiện lẻ lần. (*)

Xét một số bất kì có n chữ số $n = 2k + 1$.

Trường hợp 1. Số đó thỏa mãn điều kiện (*), có 3 cách thêm hai chữ số giống nhau vào cuối số đó, để được một số có $n + 2$ chữ số thỏa mãn điều kiện bài toán.

Trường hợp 2. Số đó không thỏa mãn (*). Vì n lẻ nên trong trường hợp này có đúng 2 chữ số xuất hiện chẵn lần (gọi là a, b) và 1 chữ số xuất hiện lẻ lần.

Nên trong trường hợp này có đúng hai cách thêm hai chữ số đó (ab hoặc ba) vào cuối để được một số có $n + 2$ chữ số thỏa mãn điều kiện bài toán.

Vậy có

$$x_{n+2} = 3x_n + 2(3^n - x_n) = x_n + 2 \cdot 3^n.$$

Từ đó tìm được

$$x_n = \frac{3(3^{n-1} - 1)}{4}.$$

□

Bài 22. Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Tìm số cách chia tập S thành 3 tập con khác rỗng sao cho mỗi tập con không chứa hai số nguyên liên tiếp.

Lời giải.

Kí hiệu $S(n)$ là số cách chia tập S thành 3 tập con không chứa khác rỗng mà bất kì tập con nào cũng không chứa 2 phần tử liên tiếp nhau. Ta sẽ tìm cách tính $S(n+1)$ theo $S(n)$.

Giả sử ta đã chia được 3 tập con và tổng số phần tử của chúng là n . Bổ sung thêm phần tử $n+1$. Sẽ có 2 khả năng xảy ra:

- Khả năng 1: $n+1$ không tạo thành 1 tập con mới (tức tập chứa $n+1$ có ít nhất 1 phần tử khác). Khi đó, rõ ràng ta có 2 cách bổ sung $n+1$ (vào 1 trong 2 tập không chứa n).
Vậy số cách xây dựng tập con trong trường hợp này là $2S(n)$.
- Khả năng 2: $n+1$ tạo thành 1 tập con mới. Khi đó, n số từ 1 đến n phải nằm trong 2 tập hợp còn lại. Có thể thấy ngay chỉ có 1 cách chia thỏa mãn (1 tập chứa các số chẵn và tập còn lại chứa các số lẻ).
Do đó, số cách trong trường hợp này là 1 cách.

Vậy ta thu được công thức truy hồi

$$S(n+1) = 2S(n) + 1.$$

Mặt khác, kiểm tra trực tiếp ta có $S(3) = 1$, nên

$$\begin{aligned} S(n+1) = 2S(n) + 1 &\Leftrightarrow S(n+1) + 1 = 2(S(n) + 1) \\ &\Leftrightarrow S(n+1) + 1 = 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Như vậy, số cách chia tập hợp thỏa mãn đề bài là

$$S(n) = 2^{n-2} - 1, \quad S(1) = S(2) = 0.$$

□

Bài 23. Cho số nguyên dương n . Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 3, có n chữ số và các chữ số đều thuộc $\{3, 4, 5, 6\}$?

Lời giải.

Gọi x_n là số các số có n chữ số lập từ $\{3, 4, 5, 6\}$ và chia hết cho 3.

Gọi y_n là số các số có n chữ số lập từ $\{3, 4, 5, 6\}$ và không chia hết cho 3.

Xét một số có n chữ số thỏa mãn bài toán là $x = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$.

Trường hợp 1. Nếu $\overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} : 3$ thì $x : 3 \Leftrightarrow a_n : 3$, do đó có 2 cách chọn a_n .

Như vậy trường hợp này có $2x_{n-1}$ cách chọn x .

Trường hợp 2. Nếu $\overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$ không chia hết cho 3. Khi đó ta chỉ chọn được 1 số a_n thuộc $\{3, 4, 5, 6\}$ để $x = \overline{a_1 a_2 \dots a_n} : 3$.

Như vậy trường hợp này có y_{n-1} cách chọn x .

Như vậy ta có

$$x_n = 2x_{n-1} + y_{n-1}.$$

Tương tự ta thu được

$$y_n = 2x_{n-1} + 3y_{n-1}.$$

Biến đổi ta thu được

$$x_{n+1} - 5x_n + 4x_{n-1} = 0.$$

Giải phương trình sai phân này với chú ý rằng $x_1 = 2; x_2 = 6$ ta tìm được

$$x_n = \frac{4^n + 2}{3}.$$

□

Bài 24. Cho tập $S = \{1; 2; \dots; n\}$ với n là số nguyên lớn hơn 2. Tìm số tập con của tập S sao cho trong mỗi tập con đều có ít nhất hai phần tử là hai số nguyên liên tiếp.

 **Lời giải.**

Gọi S_n là tập hợp các tập con khác $\emptyset$ của tập $\{1; 2; \dots; n\}$ mà trong mỗi tập con không có hai phần tử nào là hai số nguyên liên tiếp.

Chia các phần tử của S_n thành hai nhóm:

- Nhóm không chứa phần tử n : Số các tập con như vậy là $|S_{n-1}|$;
- Nhóm chứa phần tử n : $\{n\}$ hoặc $\{a_1; a_2; \dots; a_k; n\} (1 \leq k \leq n-1)$.

Rõ ràng $a_i \neq n-1 (i = 1, 2, \dots, k)$ nên số các tập con như vậy là $|S_{n-2}| + 1$.

Do vậy

$$|S_n| = |S_{n-1}| + |S_{n-2}| + 1.$$

Với chú ý $|S_2| = 2, |S_3| = 4$, ta có

$$|S_n| = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right] - 1.$$

Mặt khác, số tập con khác $\emptyset$ của tập $\{1; 2; \dots; n\}$ là $2^n - 1$.

Vậy số tập con thoả mãn đề bài là

$$2^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right].$$

□

Bài 25. Cho số nguyên $n \geq 2$. Hãy tìm số các hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ của $(1, 2, \dots, n)$ sao cho tồn tại duy nhất một chỉ số $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ thoả mãn $a_i > a_{i+1}$.

 **Lời giải.**

Gọi S_n là số các hoán vị thoả mãn điều kiện bài toán.

- $a_n = n \Rightarrow$ số các hoán vị có dạng $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, n)$ là S_{n-1} .
- $a_{n-1} = n \Rightarrow$ số các hoán vị có dạng $(a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, n, a_n)$ là C_{n-1}^{n-2} .
- $a_i = n \Rightarrow$ số các hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ thoả mãn là C_{n-1}^{i-1} với $\forall i = \overline{1; n-1}$.

Do vậy ta có

$$S_n = S_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i-1} = S_{n-1} + 2^{n-1} - 1.$$

Lại có $S_2 = 1$ nên $S_n = 2^n - n - 1$.

□

Bài 26. Cho số nguyên $n > 1$. Tìm số các bộ số nguyên $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ thoả mãn $|a_i| \leq 1$ với $\forall i = 1, 2, \dots, n$ và $|a_i - a_{i+1}| \leq 1$ với $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$.

 **Lời giải.**

Trong tập S_n các bộ số nguyên thoả mãn bài toán, gọi A_n, B_n, C_n lần lượt là tập hợp các bộ có a_n bằng $-1, 0, 1$ tương ứng.

Ta có

$$|S_n| = |A_n| + |B_n| + |C_n|.$$

Mặt khác, dễ thấy từ mỗi bộ thuộc A_n hoặc B_n , ta có thể bổ sung $a_{n+1} = -1$ để được một bộ thuộc A_{n+1} nên

$$|A_{n+1}| = |A_n| + |B_n|.$$

Tương tự ta có $|C_{n+1}| = |C_n| + |B_n|$ và $|B_{n+1}| = |A_n| + |B_n| + |C_n| = |S_n|$.

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} |S_{n+1}| &= |A_{n+1}| + |B_{n+1}| + |C_{n+1}| = (|A_n| + |B_n| + |C_n|) + |B_{n+1}| + |B_n| \\ &= 2|S_n| + |S_{n-1}|. \end{aligned}$$

Kết hợp với $|S_2| = 7, |S_3| = 17$ ta tính được

$$|S_n| = \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1}}{2}.$$

□

Bài 27. Cho số nguyên dương n . Có bao nhiêu số tự nhiên có n chữ số, trong mỗi số các chữ số đều lớn hơn 1 và không có hai chữ số khác nhau cùng nhỏ hơn 7 đứng cạnh nhau?

Lời giải.

Kí hiệu X_n là tập tất cả các số tự nhiên có n chữ số thoả mãn đề bài, A_n, B_n là các tập con của X_n theo thứ tự gồm các số có tận cùng nhỏ hơn 7; các số có tận cùng lớn hơn 6.

Ta có

$$X_n = A_n \cup B_n, A_n \cap B_n = \emptyset \Rightarrow |X_n| = |A_n| + |B_n|.$$

Lấy một phần tử của X_{n+1} bỏ đi chữ số tận cùng ta được một phần tử của X_n .

Nếu chữ số tận cùng nhỏ hơn 7 (thuộc A_n) thì chỉ có 1 cách thêm vào chữ số cuối để được 1 phần tử của A_{n+1} và có đúng 3 cách thêm vào chữ số cuối để được 1 phần tử của B_{n+1} .

Nếu chữ số tận cùng lớn hơn 6 (thuộc B_n) thì có 5 cách thêm vào chữ số cuối để được 1 phần tử của A_{n+1} và có đúng 3 cách thêm vào chữ số cuối để được 1 phần tử của B_{n+1} .

Từ các lập luận trên ta có

$$\begin{cases} |A_{n+1}| = |A_n| + 5|B_n| \\ |B_{n+1}| = 3|A_n| + 3|B_n| \end{cases} \quad (1)$$

Từ (1) suy ra

$$\begin{aligned} |A_{n+1}| + |B_{n+1}| &= 4|A_n| + 8|B_n| \\ &= 4(|A_n| + |B_n|) + 4|B_n| \\ &= 4(|A_n| + |B_n|) + 12(|A_{n-1}| + |B_{n-1}|) \quad (n \geq 2). \end{aligned}$$

Kí hiệu $x_n = |X_n|$, ta có $x_{n+2} = x_{n+1} + 12x_n, n \in \mathbb{N}^*$.

Từ đó ta có

$$\begin{cases} x_{n+2} - 6x_{n+1} = -2(x_{n+1} - 6x_n) \\ x_{n+2} + 2x_{n+1} = 6(x_{n+1} + 2x_n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{n+2} - 6x_{n+1} = (-2)^n(x_2 - 6x_1) \\ x_{n+2} + 2x_{n+1} = (6)^n(x_2 + 2x_1). \end{cases}$$

Suy ra

$$x_{n+1} = \frac{1}{8} [(x_2 + 2x_1) \cdot 6^n - (x_2 - 6x_1) \cdot (-2)^n].$$

Để thấy $x_1 = 8$, ta tìm x_2 . Xét $u \in X_2 \Rightarrow u = \overline{ab}; a, b \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

- Nếu $a \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ thì có 4 cách chọn b .
- Nếu $a \in \{7, 8, 9\}$ thì có 8 cách chọn b .

Vậy $x_2 = 5 \cdot 4 + 3 \cdot 8 = 44$. Do đó

$$x_n = \frac{1}{2} [15 \cdot 6^{n-1} + (-2)^{n-1}].$$

□

Bài 28. Kí hiệu $f(n)$ là số hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ của $(1, 2, \dots, n)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

a) $a_1 = 1$.

b) $|a_i - a_{i+1}| \leq 2, \forall i = 1, 2, \dots, n-1$.

Thiết lập hệ thức truy hồi của $f(n)$.

 **Lời giải.**

Ta xét với $n \geq 5$. Do $a_1 = 1$ và $|a_1 - a_2| \leq 2$ nên $a_2 = 2$ hoặc $a_2 = 3$.

- Nếu $a_2 = 2$ thì $(a_2, a_3, \dots, a_n)$ là hoán vị của $(2, 3, \dots, n)$ thỏa mãn:

+ $a_2 = 2$.

+ $|a_i - a_{i+1}| \leq 2, \forall i = 2, 3, \dots, n-1$.

Số các hoán vị như vậy chính là $f(n-1)$.

- Nếu $a_2 = 3$ thì $a_3 \in \{2, 4, 5\}$.

Giả sử có $a_k = 2 (3 < k < n)$ thì do $|a_{k-1} - a_k| \leq 2, |a_k - a_{k+1}| \leq 2$ và a_{k-1}, a_k khác 1, 2, 3 nên $a_{k-1} = a_{k+1} = 4 \Rightarrow$ vô lí.

Vậy $a_3 = 2$ hoặc $a_n = 2$.

Nếu $a_3 = 2$ thì $a_4 = 4$, do đó $(a_4, a_5, \dots, a_n)$ là hoán vị của $(4, 5, \dots, n)$ thỏa mãn:

+ $a_4 = 4$.

+ $|a_i - a_{i+1}| \leq 2, \forall i = 4, 5, \dots, n-1$.

Số các hoán vị như vậy chính là $f(n-3)$.

Nếu $a_n = 2$ thì $a_{n-1} = 4$ nên $a_3 = 5$, kết hợp với giả thiết suy ra

$$a_{n-2} = 6, a_4 = 7, a_{n-3} = 8, \dots$$

Cứ như thế chỉ có một hoán vị thỏa mãn.

Dễ dàng tính được

$$f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = 4.$$

Tóm lại, ta có hệ thức truy hồi

$$f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = 4,$$

$$f(n) = f(n-1) + f(n-3), \forall n \geq 5.$$

□

Bài 29. Xếp 10 học sinh ngồi quanh một bàn tròn. Ngân hàng đề có tất cả 5 loại đề thi. Hỏi có bao nhiêu cách phát đề cho học sinh sao cho không có 2 học sinh nào ngồi cạnh nhau có cùng đề thi?

 **Lời giải.**

Gọi S_n là số cách phát đề cho học sinh sao cho không có 2 học sinh nào ngồi cạnh nhau có cùng đề thi.

Cố định một học sinh làm vị trí đầu tiên và các học sinh bên tay phải của học sinh đó là vị trí thứ 2, thứ 3, ..., thứ n (học sinh ở vị trí thứ n ngồi cạnh học sinh ở vị trí thứ nhất).

Ta thấy:

- Nếu học sinh ở vị trí thứ nhất và học sinh ở vị trí thứ $n - 1$ có đề thi khác nhau thì sẽ có 3 cách phát đề cho học sinh ở vị trí thứ n .
- Nếu học sinh ở vị trí thứ nhất và học sinh ở vị trí thứ $n - 1$ có đề thi giống nhau thì có 4 cách phát đề cho học sinh ở vị trí thứ n .

Do đó ta có hệ thức

$$S_n = 3S_{n-1} + 4 \quad (n \geq 4).$$

Sử dụng phương pháp sai phân để tính S_n . Xét phương trình đặc trưng

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_n = a(-1)^n + b \cdot 4^n.$$

Do $S_2 = 5 \cdot 4 = 20$, $S_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Ta có

$$\begin{cases} a + 16b = 20 \\ -a + 64b = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1. \end{cases}$$

Vậy

$$S_n = 4(-1)^n + 4^n \Leftrightarrow S_{10} = 4 + 4^{10}.$$

□

Bài 30. Có n quả bóng $b_1, b_2, \dots, b_n$ và $2n$ hộp $h_1, h_2, \dots, h_{2n}$. Biết rằng quả bóng b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) chỉ bỏ được vào các hộp $h_1, h_2, \dots, h_{2i}$. Hỏi có bao nhiêu cách bỏ k ($1 \leq k \leq n$) quả bóng vào các hộp, biết rằng mỗi hộp chứa nhiều nhất một quả bóng? (Hai cách bỏ bóng được gọi là khác nhau khi có ít nhất một quả bóng được bỏ vào hai hộp khác nhau trong hai cách đó).

Lời giải.

Đặt $S_{n,k}$ là số cách bỏ k quả bóng vào các hộp. Giả sử $2 \leq k \leq n$.

Nếu một trong k quả bóng được chọn là b_n thì $k - 1$ quả bóng còn lại có thể bỏ vào các hộp bằng $S_{n-1,k-1}$ cách. Đồng thời, b_n có $2n - (k - 1) = 2n - k + 1$ cách chọn một hộp trong các hộp còn lại để bỏ.

Do đó số cách bỏ bóng trong trường hợp này là $(2n - k + 1) \cdot S_{n-1,k-1}$

Trường hợp quả bóng b_n không được chọn, lưu ý rằng $k \leq n - 1$. Mọi quả bóng trong các quả bóng $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ đều có thể bỏ vào các hộp bằng $S_{n-1,k}$ cách, suy ra

$$S_{n,k} = S_{n-1,k} + (2n - k + 1)S_{n-1,k-1} \quad (n \geq 3, 2 \leq k \leq n).$$

Nhận thấy

$$S_{n,n} = (n + 1)S_{n-1,n-1}; \quad S_{n,1} = n(n + 1); \quad S_{1,1} = 2.$$

Từ đó bằng quy nạp ta chứng minh được

$$S_{n,k} = \frac{(n + 1)k!(C_n^k)^2}{n - k + 1}.$$

□

Bài 31. Xét đa giác đều n đỉnh với tâm O . Người ta tô màu các miền tam giác OA_iA_{i+1} ($1 \leq i \leq n$) ($A_{n+1} \equiv A_1$) bằng k ($k \geq 3$) màu sao cho hai miền kề nhau được tô bởi hai màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách tô màu như vậy?

Lời giải.

Gọi $S(n, k)$ là số cách tô màu thỏa mãn bài toán.

Ta có k cách tô màu miền OA_1A_2 , $k - 1$ cách tô màu miền $OA_2A_3, \dots$, $k - 1$ cách tô màu miền OA_nA_1 .

Do đó có tất cả $k(k - 1)^{n-1}$ cách tô. Tuy nhiên, ta phải trừ đi các cách tô sai, chẳng hạn khi các miền OA_nA_1 và OA_1A_2 cùng màu, khi đó ta coi OA_nA_2 như một miền tam giác (bỏ qua đỉnh A_1), số cách tô như vậy là $S(n - 1, k)$. Do đó ta có hệ thức

$$\begin{aligned} S(n, k) &= k(k - 1)^{n-1} - S(n - 1, k) \\ &= k(k - 1)^{n-1} - [k(k - 1)^{n-2} - S(n - 2, k)] \\ &= \dots \\ &= k(k - 1)^{n-1} - k(k - 1)^{n-2} + \dots + (-1)^{n-4}[k(k - 1)^3 - S(3, k)] \end{aligned}$$

Suy ra $S(n, k) = (k - 1)^n + (-1)^n(k - 1)$.

□

Bài 32. Có n người ngồi thành một hàng ngang vào n chiếc ghế. Hỏi có bao nhiêu cách lập hàng mới cho n người đó mà trong mỗi cách lập hàng mới mỗi người hoặc giữ nguyên vị trí của mình, hoặc đổi chỗ cho người liền bên trái, hoặc đổi chỗ cho người liền bên phải.

Lời giải.

Đánh số thứ tự vị trí các ghế từ trái qua phải là $1, 2, 3, \dots, n$

Gọi S_n là số cách lập hàng mới cho n người thỏa mãn đề bài.

Dễ thấy $S_1 = 1, S_2 = 2$.

Với $n \geq 3$ Xét một cách lập hàng mới thỏa mãn điều kiện. Có hai loại hàng được lập

- Loại 1: Người ở vị trí số 1 giữ nguyên vị trí. Rõ ràng số hàng được lập loại này là S_{n-1} cách.
- Loại 2: Người ở vị trí số 1 đổi chỗ, khi đó người ở vị trí số 1 chỉ có thể xếp vào vị trí số 2 và người ở vị trí 2 phải chuyển sang vị trí 1. Số hàng loại này là S_{n-2} .

Từ đó ta có $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}, n \geq 3$.

Vậy $S_1 = 1, S_2 = 2, S_{n+2} = S_{n+1} + S_n, n \in \mathbb{N}^*$. □

Bài 33. Trong thành phố A có n cô gái và n chàng trai và các cô gái đều quen biết các chàng trai. Trong thành phố B có n cô gái $g_1, g_2, \dots, g_n$ và $2n - 1$ chàng trai $b_1, b_2, \dots, b_{2n-1}$. Các cô gái g_i chỉ quen các chàng trai $b_1, b_2, \dots, b_{2i-1}$ và không quen biết các chàng trai khác.

Kí hiệu $A(r), B(r)$ lần lượt là số các cách thức khác nhau để r cô gái từ thành phố A và thành phố B có thể khiêu vũ với r chàng trai từ chính thành phố của họ tạo thành r cặp, mỗi cô gái với một chàng trai mà cô ấy quen biết.

Chứng minh rằng $A(r) = B(r)$.

Lời giải.

Ta kí hiệu $A(r)$ và $B(r)$ bởi $A(n, r)$ và $B(n, r)$

Ta có thể chọn r cô gái trong n cô gái của thành phố A bằng C_n^r cách.

Ta có thể chọn r chàng trai trong n chàng trai của thành phố A bằng C_n^r cách.

Vì mỗi cô gái trong A đều quen với các chàng trai nên bất kì nhóm nào gồm r cô gái được chọn ra đều có thể xếp cặp với r chàng trai nên ta có

$$A(n, r) = C_n^r \cdot C_n^r \cdot r! = C_n^r \cdot \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Cho $n \geq 3$ và $2 < r < 3$. Xét mọi cách chọn r cặp bạn khiêu vũ trong B sao cho mỗi cô gái đều quen biết bạn nhảy của mình. Có hai trường hợp để chọn lựa

- Nếu một trong các cô gái đang khiêu vũ là g_n thì $r - 1$ cô gái kia có thể chọn bạn nhảy bằng $B(n - 1, r - 1)$ cách. Khi đó g_n có thể chọn bất kì người nào trong $(2n - 1) - (r - 1)$ chàng

tra bị vì cô gái ý quen biết tất cả $2n - 1$ chàng trai. Do vậy tổng số cách chọn trong trường hợp này là $(2n - r) \cdot B(n - 1, r - 1)$.

- Giả sử không có cô gái g_n nào cả. Để ý rằng điều này không xảy ra nếu $n = r$ nên $r \leq n - 1$. Bây giờ mọi cô gái trong các cô $g_1, g_2, \dots, g_{n-1}$ đều có thể chọn bạn nhảy mà các cô quen biết bằng $B(n - 1, r)$ cách.

Từ đó ta có đẳng thức sau với mọi $n \geq 3$

$$B(n, r) = B(n - 1, r) + (2n - r) \cdot B(n - 1, r - 1)$$

với $r = 2, \dots, n - 1$ và $B(n, n) = n \cdot B(n - 1, r - 1)$.

Ta cũng thấy rằng $A(n, k)$ cũng thỏa mãn hệ thức truy hồi tương tự.

Vì $A(n, 1) = B(n, 1) = n^2$ với mọi n và $A(2, 2) = B(2, 2) = 2$ nên $A(n, r) = B(n, r)$ với mọi $n \geq 1$ và $r = 1, 2, \dots, n$.

Do đó $A(r) = B(r)$. □

Bài 34. Cho một bảng hình vuông gồm $n \times n$ ô vuông. Hỏi có bao nhiêu cách tô hai màu xanh hoặc đỏ vào các ô vuông trong bảng sao cho mỗi hình vuông 2×2 có số ô được tô bởi hai màu bằng nhau. (Hai cách tô được gọi là khác nhau nếu có một ô vuông nào đó mà trong cách này thì được tô màu đỏ còn cách kia thì được tô màu xanh).

Lời giải.

Gọi S_n là số cách tô trong bảng $n \times n$, $\forall n > 1$.

Xét tập T_n gồm các ô vuông nằm trong cột n (tính từ trái sang) và hàng n (tính từ trên xuống).

Ta gọi A_n là số các cách tô sao cho hai ô kề nhau trong T_n có cùng màu và B_n là số các cách tô sao cho các ô trong T_n có màu xen kẽ.

Nhận xét 1. Mỗi cách tô thuộc B_n sẽ ứng với một cách tô thuộc B_{n-1} , còn mỗi cách tô thuộc A_n sẽ ứng với một cách tô thuộc A_{n-1} và một cách tô thuộc B_{n-1} . (Điều này suy ra khi xét bảng ô vuông $(n - 1) \times (n - 1)$ có được từ bảng $n \times n$ sau khi bỏ T_n).

Nhận xét 2. Mỗi cách tô thuộc T_n sẽ ứng với một cách tô thuộc T_{n-1} , Mỗi cách tô thuộc T_{n-1} sẽ ứng với một cách tô thuộc $T_{n-2}, \dots$

Từ đó ta có

$$|B_n| = |B_{n-1}|, |A_n| = |A_{n-1}| + |B_{n-1}|, \forall n > 2.$$

$$S_n = |A_n| + |B_n| = |A_{n-1}| + |B_{n-1}| + |B_n|, \forall n > 2$$

Vậy

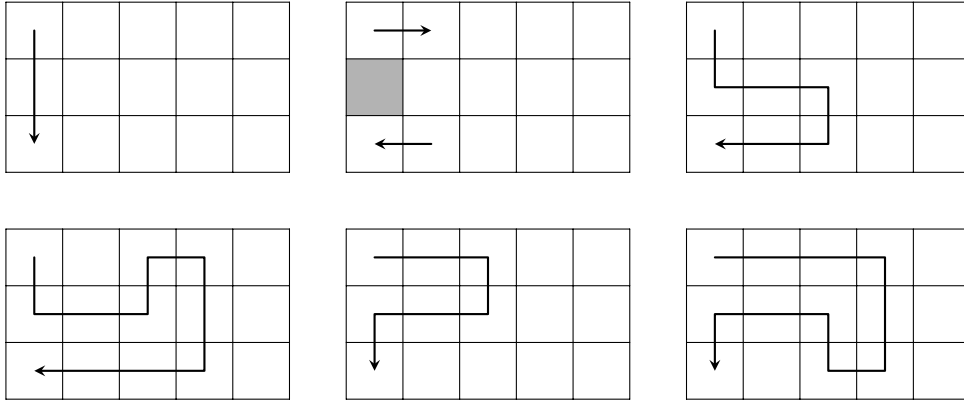
$$S_n = 8n - 10.$$

□

Bài 35. Một con xe được đặt trên bàn cờ kích thước $3 \times n$, với $n \in \mathbb{N}^*$. Con xe đi từ vị trí $(1, 1)$ đến vị trí $(3, 1)$ bằng một đường đi không tự cắt. Hỏi có bao nhiêu đường đi như thế trên bàn cờ?

Lời giải.

Gọi số đường đi là r_n . Có 6 cách đi như các hình vẽ sau



- 1) Đường đi qua các ô $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$. Có 1 đường đi loại này.
- 2) Đường đi không qua ô $(2, 1)$. Mỗi đường đi loại này bắt đầu là $(1, 1) \rightarrow (1, 2)$ và kết thúc là $(3, 2) \rightarrow (3, 1)$. Có r_{n-1} đường đi loại này.
- 3) Đường đi bắt đầu là $(1, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 2)$ và không trở lại hàng 1. Mỗi đường đi như vậy đến hàng 3 từ ô $(2, k)$, với $2 \leq k \leq n$ và đi dọc theo hàng 3 đến ô $(3, 1)$. Có $n - 1$ đường đi loại này.
- 4) Đường đi bắt đầu là $(1, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow \dots \rightarrow (2, k) \rightarrow (1, k) \rightarrow (1, k + 1)$, kết thúc là $(3, k + 1) \rightarrow (3, k) \rightarrow \dots \rightarrow (3, 1)$, với $2 \leq k \leq n - 1$. Có $r_{n-2} + r_{n-3} + \dots + r_1$ đường đi loại này.
- 5) Đường đi bắt đầu là $(1, 1) \rightarrow (1, 2)$ và kết thúc là $(2, 1) \rightarrow (3, 1)$. Có $n - 1$ đường đi loại này.
- 6) Đường đi là $(1, 1) \rightarrow (1, 2) \rightarrow \dots \rightarrow (1, k) \rightarrow (1, k + 1) \rightarrow (2, k + 1) \rightarrow (3, k + 1) \rightarrow (3, k) \rightarrow (2, k) \rightarrow \dots \rightarrow (2, 1) \rightarrow (3, 1)$. Có $r_{n-3} + r_{n-2} + \dots + r_1$ đường đi loại này.

Vậy

$$r_n = 1 + r_{n-1} + 2(n - 1) + 2(r_{n-2} + r_{n-3} + \dots + r_1) = 2n - 1 + r_{n-1} + 2(r_{n-2} + r_{n-3} + \dots + r_1).$$

Suy ra

$$r_{n+1} = 2n + 1 + r_n + 2(r_{n-1} + r_{n-2} + \dots + r_1).$$

Do đó

$$\begin{aligned} r_{n+1} - r_n &= 2 + r_n + r_{n-1} \Leftrightarrow r_{n+1} = 2 + 2r_n + r_{n-1} \\ &\Leftrightarrow r_{n+1} + 1 = 2(r_n + 1) + r_{n-1} + 1. \end{aligned}$$

Để thấy $r_1 = 1, r_2 = 4$. Sử dụng phương trình đặc trưng tìm được

$$r_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(1 + \sqrt{2})^{n+1} - (1 - \sqrt{2})^{n+1} \right] - 1.$$

□

Bài 36. Cho $A = 1, 2, \dots, 2n$. Một tập con của A được gọi là tốt nếu nó có đúng hai phần tử x, y và $|x - y| \in \{1, n\}$. Tìm số các tập hợp $A_1, A_2, \dots, A_n$ thoả mãn điều kiện A_i là tập con tốt với mọi $i = 1, 2, \dots, n$ và $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A$.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta sẽ viết lại bài toán như sau “Cho 1 hình chữ nhật kích thước $2 \times n$ được chia thành các ô vuông đơn vị. Đánh số các ô từ trái qua phải là $1, 2, \dots, n$ (hàng 1) và $n + 1, n + 2, \dots, 2n$ (hàng 2). Lát chúng bằng các quân đô-mi-nô 1×2 sao cho chúng phủ kín hình chữ nhật và không có 2 quân nào đè lên nhau. Ngoài ra, với n lẻ, ta được bổ sung thêm 1 quân đô-mi-nô “đặc biệt” có thể phủ kín 2 ô n và $n + 1$. Đếm số cách lát thoả mãn đề bài.

Với bài toán này, xét S_n là số cách lát thoả mãn đề bài với hình chữ nhật kích thước $2 \times n$. Ta sẽ tìm cách xây dựng công thức truy hồi cho S_n .

Giả sử ta đã lát được hình chữ nhật $2 \times (n + 1)$ bằng các quân đô-mi-nô. Xét quân đô-mi-nô phủ lên ô vuông n . Có 3 khả năng xảy ra

- 1) Quân đô-mi-nô đó phủ lên 2 ô $(n; 2n)$. Rõ ràng phần còn lại là 1 hình chữ nhật kích thước $2 \times n$, và số cách lát trong tình huống này là S_n .
- 2) Quân đô-mi-nô đó phủ lên 2 ô $(n, n + 1)$. Như vậy, buộc phải có 1 quân đô-mi-nô phủ lên 2 ô $(2n - 1, 2n)$ và khi đó, phần còn lại là 1 hình chữ nhật kích thước $2 \times (n - 1)$. Tức số cách lát trong tình huống này là S_{n-1} .
- 3) Quân đô-mi-nô đó phủ lên 2 ô $(n, n + 1)$ (với n lẻ). Khi đó, phần còn lại chỉ có thể lát được bằng các quân đô-mi-nô nằm ngang (nếu có 1 quân đô-mi-nô nào nằm dọc thì nó sẽ chia hình chữ nhật thành 2 phần, mỗi phần có 1 số lẻ ô chưa được lát (do quân đô-mi-nô “đặc biệt” gây ra)). Tức trong trường hợp này chỉ có 1 cách lát duy nhất.

Như vậy ta xây dựng được công thức truy hồi như sau

$$S_{2k} = S_{2k-1} + S_{2k-2} - 1,$$

(lưu ý rằng khi n chẵn thì không có quân đô-mi-nô “đặc biệt” nên phải bớt đi 1 cách của S_{2k-1})

$$S_{2k+1} = S_{2k} + S_{2k-1}.$$

(lập luận tương tự với quân đô-mi-nô “đặc biệt”).

Và bằng quy nạp ta sẽ thu được $S_{2k} = F_{2k}$, $S_{2k+1} = F_{2k+1} + 1$, trong đó F_k là số Fibonacci thứ k của dãy Fibonacci được xác định bởi công thức

$$F_0 = F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Cuối cùng ta được công thức tổng quát

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] + \frac{1-(-1)^n}{2}.$$

□

Bài 37 (THTT 5/2010). Từ các số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có n chữ số sao cho trong mỗi số đó đều chứa một số lẻ các chữ số 1 và một số chẵn các chữ số 2 (n là một số nguyên dương cho trước)?

 **Lời giải.**

Với mỗi số nguyên dương n , kí hiệu M_n là tập tất cả các số tự nhiên có n chữ số được lập từ các số 1, 2, 3, 4, 5.

Kí hiệu A_n ; B_n ; C_n ; D_n là tập các số tự nhiên có n chữ số được lập từ các số 1, 2, 3, 4, 5 theo thứ tự chứa một số lẻ các chữ số 1 và chẵn các chữ số 2, chứa một số lẻ các chữ số 1 và lẻ các chữ số 2, chứa một số chẵn các chữ số 1 và chẵn các chữ số 2, chứa một số chẵn các chữ số 1 và lẻ các chữ số 2.

Dễ thấy A_n ; B_n ; C_n ; D_n đôi một rời nhau và

$$M_n = A_n \cup B_n \cup C_n \cup D_n, |A_n| = |B_n| = |C_n| = |D_n| = \frac{1}{4} |M_n| = \frac{5^n}{4}.$$

Lấy một phần tử của M_{n+1} , bỏ đi phần tử cuối ta được một phần tử của M_n , ngược lại lấy một phần tử x của M_n .

- Nếu $x \in A_n$ thì có 3 cách thêm vào chữ số cuối để tạo ra một phần tử của M_{n+1} .
- Nếu $x \in B_n$ thì có 1 cách thêm vào chữ số cuối để tạo ra một phần tử của M_{n+1} .
- Nếu $x \in C_n$ thì có 1 cách thêm vào chữ số cuối để tạo ra một phần tử của M_{n+1} .
- Nếu $x \in D_n$ thì không có cách thêm nào vào chữ số cuối để tạo ra một phần tử của M_{n+1} .

Vậy

$$|A_{n+1}| = 3|A_n| + |B_n| + |C_n| = |A_n| + (|A_n| + |B_n| + |C_n| + |D_n|) = |A_n| + 5^n.$$

Từ

$$\begin{aligned} |A_1| = 1, |A_{n+1}| = |A_n| + 5^n &\Rightarrow |A_{n+1}| = |A_1| + 5 + 5^2 + \dots + 5^n = \frac{5^{n+1} - 1}{4} \\ &\Rightarrow |A_n| = \frac{5^n - 1}{4}. \end{aligned}$$

□

6. Đếm bằng ánh xạ

6.1. Kiến thức cơ bản

Định nghĩa 6.1. Ánh xạ

Một ánh xạ f từ tập X đến tập Y là một quy tắc đặt tương ứng mỗi phần tử x của X với một (và chỉ một) phần tử của Y . Phần tử này được gọi là ảnh của x qua ánh xạ f và được kí hiệu là $f(x)$.

i) Tập X được gọi là tập xác định của f . Tập hợp Y được gọi là tập giá trị của f .

ii) Ánh xạ f từ X đến Y được kí hiệu là

$$f : X \rightarrow Y$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

iii) Khi X và Y là các tập số thực, ánh xạ f được gọi là một hàm số xác định trên X .

iv) Cho $a \in X, y \in Y$. Nếu $f(a) = y$ thì ta nói y là ảnh của a và a là nghịch ảnh của y qua ánh xạ f .

v) Tập hợp $Y = \{y \in Y \mid \exists x \in X, y = f(x)\}$ gọi là tập ảnh của f . Nói cách khác, tập ảnh $f(X)$ là tập hợp tất cả các phần tử của Y mà có nghịch ảnh.

Định nghĩa 6.2. Đơn ánh

Ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ được gọi là đơn ánh nếu với $a \in X, b \in X$ mà $a \neq b$ thì $f(a) \neq f(b)$, tức là hai phần tử phân biệt sẽ có hai ảnh phân biệt.

Từ định nghĩa ta suy ra ánh xạ f là đơn ánh khi và chỉ khi với $a \in X, b \in X$ mà $f(a) = f(b)$, ta phải có $a = b$.

Định nghĩa 6.3. Toàn ánh

Ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ được gọi là toàn ánh nếu với mỗi phần tử $y \in Y$ đều tồn tại một phần tử $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Như vậy f là toàn ánh nếu và chỉ nếu $Y = f(X)$.

Định nghĩa 6.4. Song ánh

Ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ được gọi là song ánh nếu nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh. Như vậy ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ là song ánh nếu và chỉ nếu với mỗi $y \in Y$, tồn tại và duy nhất một phần tử $x \in X$ để $y = f(x)$.

Định nghĩa 6.5. Ánh xạ ngược của một song ánh

Ánh xạ ngược của f , được kí hiệu bởi f^{-1} , là ánh xạ từ Y đến X gán cho mỗi phần tử $y \in Y$ phần tử duy nhất $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Như vậy

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

Nếu f không phải là song ánh thì ta không thể định nghĩa được ánh xạ ngược của f . Do đó chỉ nói đến ánh xạ ngược khi f là song ánh.

Định nghĩa 6.6. Ánh xạ hợp

Nếu $g : A \rightarrow B$ và $f : B \rightarrow C$ và $g(A) \subset B$ thì ánh xạ hợp $f \circ g : A \rightarrow C$ được xác định bởi

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)).$$

Kí hiệu $p^n = \underbrace{p \circ p \circ \dots \circ p}_n$.

6.2. Phương pháp ánh xạ

Nguyên lý ánh xạ. Cho A và B là các tập hữu hạn khác rỗng và $f : A \rightarrow B$ là một ánh xạ. Khi đó,

- Nếu f là đơn ánh thì $|A| \leq |B|$.
- Nếu f là toàn ánh thì $|A| \geq |B|$.
- Nếu f là song ánh thì $|A| = |B|$.

Phương pháp ánh xạ dựa vào ý tưởng rất đơn giản:

- Nếu tồn tại một song ánh từ tập hữu hạn A vào tập hữu hạn B thì $|A| = |B|$. Do đó, muốn chứng minh hai tập hợp có cùng số phần tử, chỉ cần xây dựng một song ánh giữa chúng. Hơn nữa, ta có thể đếm được số phần tử của một tập hợp A bằng cách xây dựng song ánh từ A vào một tập hợp B mà ta đã biết cách đếm hoặc dễ đếm hơn.
- Nếu tồn tại một đơn ánh (tương ứng toàn ánh) từ A vào B thì $|A| \leq |B|$ (tương ứng $|A| \geq |B|$). Do đó, đơn ánh và toàn ánh chủ yếu được sử dụng để chứng minh các bài toán liên quan đến bất đẳng thức tổ hợp. Chuyển bài toán cần chứng minh về việc so sánh số phần tử của hai tập hợp, trong đó có một tập hợp đã biết cách đếm hoặc dễ đếm.

Tương tự nguyên lý Dirichlet, về mặt ý tưởng thì hết sức đơn giản tuy nhiên thực tế thì không phải đơn giản như thế. Để sử dụng phương pháp này ta cần xác định được một song ánh giữa tập

cần đếm và một tập đã biết cách đếm việc làm này không phải lúc nào cũng thực hiện dễ dàng. Sau đây là một số bài tập áp dụng phương pháp trên.

 Định lý 1 (Bài toán chia kẹo của Euler).

Cho k, n là các số nguyên dương. Số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

là C_{n+k-1}^{k-1} .

 Lời giải.

Ta cho tương ứng mỗi nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

với một chuỗi nhị phân độ dài $n + k - 1$ trong đó có n bit 1 và $k - 1$ bit 0, cụ thể chuỗi gồm x_1 bit 1, sau đó là 1 bit 0, tiếp theo là x_2 bit 1, sau đó là 1 bit 0, cứ như thế, cuối cùng là x_k bit 1. Dễ dàng chứng minh được đây là một song ánh từ tập A các nghiệm nguyên không âm của phương trình đã cho vào tập hợp B các chuỗi nhị phân độ dài $n + k - 1$ với n bit 1 và $k - 1$ bit 0. Từ đó, theo nguyên lý song ánh ta có $|A| = |B| = C_{n+k-1}^{k-1}$ (đpcm). $\square$

Bài 1. Cho các số tự nhiên k, n . Hãy xác định số các ánh xạ $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^n f(i) = k.$$

 Lời giải.

Đây chính là bài toán chia kẹo Euler. Đáp số: C_{n+k-1}^{k-1} . $\square$

Bài 2. Mỗi hoán vị $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ của $1, 2, \dots, 2n$ gọi là có tính chất P nếu $|x_i - x_{i+1}| = n$ với ít nhất một giá trị $i \in \{1, 2, \dots, 2n\}$. Chứng minh rằng với mỗi số n , số hoán vị có tính chất P lớn hơn số hoán vị không có tính chất P .

 Lời giải.

Ta chia $1, 2, \dots, 2n$ thành n cặp $(1, n+1), (1, n+2), \dots, (n, 2n)$. Bây giờ ta thiết lập một ánh xạ f từ tập các hoán vị không có tính chất P vào tập các hoán vị có tính chất P . Giả sử $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ là một hoán vị bất kì không có tính chất P và giả sử x_k là số cùng cặp với x_{2n} , $k \leq 2n - 2$, khi đó ánh xạ f xác định như sau

$$(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_k, x_{2n}, x_{2n-1}, x_{2n-2}, \dots, x_{k+1})$$

Ta chứng minh f là đơn ánh nhưng không toàn ánh. Suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Bài 3. Với số nguyên dương n , chứng minh rằng số cách biểu diễn n thành tổng các số lẻ nhiều hơn số cách biểu diễn n thành tổng các số nguyên dương đôi một khác nhau.

Lời giải.

Giả sử A là tập tất cả các cách biểu diễn n thành tổng các số lẻ và B là tập tất cả các cách biểu diễn n thành tổng các số nguyên dương đôi một khác nhau. Tức là,

$$\begin{aligned} A &= \left\{ (a_i) \mid a_i \text{ lẻ}, \sum_i a_i = n \right\} \text{ và} \\ B &= \left\{ (b_i) \mid b_i \neq b_j, i \neq j, \sum_i b_i = n \right\} \\ &= \left\{ 2^{s_i} r_i - i \mid s_i \in \mathbb{N}, r_i \text{ lẻ}, \sum_i b_i = n \right\} \end{aligned}$$

Ta xây dựng toàn ánh f từ A vào B .

Với mỗi bộ $(a_i) \in A$, giả sử có k_1 số lẻ b_1, k_2 số lẻ $b_2, \dots, k_t$ số lẻ b_t . Tức là ta có $\sum_{i=1}^t k_i b_i = n$.

Biểu diễn $k_i, i = 1, 2, \dots, t$ theo hệ nhị phân

$$k_i = \overline{l_{s_i,i} l_{s_i-1,i} \dots l_{1,i} l_{0,i}} = 2^{s_i} l_{s_i,i} + 2^{s_i-1} l_{s_i-1,i} + \dots + 2^1 l_{1,i} + 2^0 l_{0,i}$$

Ta thấy

$$\sum_{i=1}^t (2^{s_i} l_{s_i,i} + 2^{s_i-1} l_{s_i-1,i} + \dots + 2^1 l_{1,i} + 2^0 l_{0,i}) b_i = \sum_{i=1}^t k_i b_i = n$$

Và các số hạng trong biểu diễn nhị phân của k_i trừ trường hợp $l_{s_i-j,i} \neq 0$ đôi một khác nhau. Do đó

$$(2^{s_1} l_{s_1,1} b_1, 2^{s_1-1} l_{s_1-1,1} b_1, \dots, 2^0 l_{0,1} b_1, \dots, 2^{s_t} l_{s_t,t} b_t, 2^{s_t-1} l_{s_t-1,t} b_t, \dots, 2^0 l_{0,t} b_t) \in B$$

Khi đó ánh xạ $f : A \rightarrow B$ được xác định như sau

$$\begin{aligned} (b_1, b_1, \dots, b_1, b_2, b_2, \dots, b_2, \dots, b_t, b_t, \dots, b_t) \mapsto \\ (2^{s_1} l_{s_1,1} b_1, 2^{s_1-1} l_{s_1-1,1} b_1, \dots, 2^0 l_{0,1} b_1, \dots, 2^{s_t} l_{s_t,t} b_t, 2^{s_t-1} l_{s_t-1,t} b_t, \dots, 2^0 l_{0,t} b_t) \end{aligned}$$

Ta chứng minh được f là toàn ánh. Do đó ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài 4 (APMO 1998). Giả sử F là tập hợp tất cả các bộ gồm n tập $(A_1, A_2, \dots, A_n)$, trong đó A_i là tập con của tập $\{1, 2, \dots, 2012\}$. Tính $\sum_{(A_1, A_2, \dots, A_n) \in F} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$.

Lời giải.

Với i phần tử $n_1, n_2, \dots, n_i \in \{1, 2, \dots, 2012\}$, ta đếm xem có bao nhiêu bộ $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ thỏa mãn $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{n_1, n_2, \dots, n_i\} (*)$.

Ta cho các phần tử $n_1, n_2, \dots, n_i$ đăng kí có mặt trong tập A_k bằng cách với mỗi phần tử n_j ta gán

cho 1 bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ sao cho $a_t = \begin{cases} 0 & \text{if } n_i \notin A_t \\ 1 & \text{if } n_i \in A_t \end{cases}, \forall t = \overline{1, n}.$

Một bộ đăng kí là hợp lệ nếu có ít nhất 1 số 1 (nếu không thì phần tử tương ứng không có mặt trong tập $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$).

Với i phiếu đăng kí $n_1, n_2, \dots, n_i$ (ta gọi là nhóm phiếu đăng kí), ta sẽ lập được bộ $(A_1, A_2, \dots, A_n)$.

Ngược lại, với 2 nhóm phiếu đăng kí khác nhau ta sẽ có 2 bộ tập hợp $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ khác nhau, do đó số bộ $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ thỏa mãn (*) bằng số nhóm phiếu đăng kí hợp lệ.

Vì phiếu đăng kí của $n_j, j = 1, 2, \dots, n$ gồm n chữ số 0 hoặc 1 và phải có ít nhất 1 số 1 nên có $2^n - 1$ cách ghi phiếu cho n_j , suy ra có $(2^n - 1)^i$ nhóm phiếu đăng kí hợp lệ khác nhau.

Có C_{2012}^i cách chọn i phần tử nên suy ra

$$\begin{aligned} \sum_{(A_1, A_2, \dots, A_n) \in F} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^{2012} i C_{2012}^i (2^n - 1)^i = 2012 (2^n - 1) 2^{n(2012-1)} \\ &= 2012 (2^n - 1) 2^{2011n}. \end{aligned}$$

Bài toán này không dùng phương pháp song ánh theo nghĩa thường, ở đây sẽ không có ánh xạ nào cả. Nguyên lý ánh xạ ở đây được dùng bằng cách, thay vì tính tổng này ta tìm cách tính một tổng khác dễ hơn và có giá trị bằng tổng đã cho. Với mỗi $\{1, 2, \dots, 2012\}$ ta gọi S_i là số các bộ trong F mà i thuộc hợp các phần tử của họ. Rõ ràng trong S thì i được đếm S_i lần, do đó $S = \sum S_i$. Để thấy các S_i bằng nhau và bằng $(2^n - 1) 2^{2011n}$ và tổng cần tính bằng $2012 (2^n - 1) 2^{2011n}$. $\square$

Bài 5. Cho $n \geq 3$ và $X \subset \{1, 2, \dots, n^3\} = E$ gồm $3n^2$ phần tử. Chứng minh rằng có thể tìm được

9 số $a_1, a_2, \dots, a_9 \in X$ đôi một khác nhau sao cho hệ $\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0 \\ a_4x + a_5y + a_6z = 0 \\ a_7x + a_8y + a_9z = 0 \end{cases}$ có nghiệm nguyên

(x_0, y_0, z_0) thỏa mãn $x_0, y_0, z_0 \neq 0$.

Lời giải.

Sắp xếp các phần tử của tập X theo thứ tự $x_1 < x_2 < \dots < x_{3n^2}$. Đặt

$$X_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_{n^2}\}, X_2 = \{x_{n^2+1}, x_{n^2+2}, \dots, x_{2n^2}\}, X_3 = \{x_{2n^2+1}, x_{2n^2+2}, \dots, x_{3n^2}\}$$

Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} f : X_1 \times X_2 \times X_3 &\rightarrow E \times E \\ (a, b, c) &\mapsto (b - a, c - b) \end{aligned}$$

Ta có $|X_1 \times X_2 \times X_3| = |X_1| |X_2| |X_3| = n^6$. Do $a \in X_1, b \in X_2, c \in X_3$ nên $a < b < c$, suy ra $b - a \geq 1, c - b \geq 1$ và $(b - a) + (c - b) = c - a < n^3$. Vì vậy tập ảnh của f là tập con của tập A với

$A = \{(m; n) \mid m, n \in X, m + n \leq n^3\}$. Mà ta có

$$|A| = \sum_{k=1}^{n^3-1} k = \frac{n^3(n^3-1)}{2} < \frac{n^6}{2}.$$

Do đó, theo nguyên lý Dirichle tồn tại 3 bộ số $(a_i, b_i, C_i), i = 1, 2, 3$ cho cùng một ảnh (x_0, y_0) nghĩa là ta có $b_i - a_i = x_0$ và $C_i - b_i = y_0, i = 1, 2, 3$. Chọn $z_0 = -x_0 - y_0$ thì $z_0 = a_i - C_i, i = 1, 2, 3$. Do vậy với mỗi $i = 1, 2, 3$ thì ta có

$$C_i x_0 + a_i y_0 + b_i z_0 = C_i (b_i - a_i) + a_i (C_i - b_i) + b_i (a_i - C_i) = 0.$$

Chúng tỏ hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1 x + a_1 y + b_1 z = 0 \\ C_2 x + a_2 y + b_2 z = 0 \\ C_3 x + a_3 y + b_3 z = 0 \end{cases}$$

có nghiệm nguyên (x_0, y_0, z_0) thỏa mãn $x_0, y_0, z_0 \neq 0$. Do

$$a_i \in X_1, b_i \in X_2, C_i \in X_3 \text{ nên } a_i \neq b_i \neq C_i, \forall 1 \leq i, j, k \leq 3.$$

Giả sử $\exists 1 \leq i < j \leq 3 : a_i = a_j$ thì do $b_i - a_i = b_j - a_j$ nên $b_i = b_j$ suy ra $C_i = C_j$, do đó $(a_i, b_i, C_i) = (a_j, b_j, C_j)$, vô lý. Vậy $a_i \neq a_j, \forall 1 \leq i < j \leq 3$. Tương tự, $b_i \neq b_j, C_i \neq C_j, \forall 1 \leq i < j \leq 3$. Vậy bài toán được chứng minh. $\square$

Bài 6. Có n người xếp hàng dọc. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra k người sao cho không có hai người liên tiếp được chọn.

 **Lời giải.**

Ta đánh số n người bằng các số thứ tự $1, 2, \dots, n$. Một cách chọn thích hợp chính là một bộ số $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n$ thỏa mãn điều kiện $a_{i+1} - a_i > 1$ (tức là ≥ 2). Vậy ta cần tìm số phần tử của

$$A = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) \mid 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n, \quad a_{i+1} - a_i \geq 2 \text{ với } i = \overline{1, k-1}\}$$

Xét ánh xạ $f(a_1, a_2, \dots, a_k) = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ với $b_i = a_i - i + 1$ thì rõ ràng ta có

i) $b_1 = a_1 \geq 1$.

ii) $b_{i+1} - b_i = (a_{i+1} - (i+1) + 1) - (a_i - i + 1) = a_{i+1} - a_i - 1 > 0$.

iii) $b_k = a_k - k + 1 \leq n - k + 1$.

Suy ra $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ là phần tử của tập hợp B :

$$B = \{(b_1, b_2, \dots, b_k) \mid 1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_k \leq n - k + 1\}$$

Dễ thấy f là một đơn ánh.

Ngoài ra, ánh xạ $g(b_1, b_2, \dots, b_k) = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ với $a_i = b_i + i - 1$ cho chúng ta một đơn ánh từ B vào A . Vậy $|A| = |B| = C_{n-k+1}^k$. $\square$

Bài 7 (Putnam 2002). Cho $n > 1$ là một số nguyên dương và T_n là số các tập con khác rỗng của tập $\{1, 2, \dots, n\}$ sao cho trung bình cộng tất cả các phần tử của nó là một số nguyên. Chứng minh rằng $T_n - n$ là một số chẵn.

 **Lời giải.**

Có n tập con 1 phần tử và các tập này đều thoả mãn điều kiện trong đầu bài. Vậy ta chỉ cần chứng minh số các tập con nhiều hơn một phần tử có tính chất đó là một số chẵn là xong. Ta hãy ghép các tập con này thành từng cặp như sau: Các tập có trung bình thuộc nó đi với một tập có trung bình không thuộc nó. $\square$

Bài 8. Có n người xếp thành một hàng dọc. Có bao nhiêu cách chọn ra k người, sao cho không có hai người kề nhau được chọn?

 **Lời giải.**

Cách 1. (Phương pháp song ánh) Đặt $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Gọi $u_1 < u_2 < \dots < u_k$ là số thứ tự của những người được chọn thì ta có $u_{i+1} - u_i \geq 2$ với mọi $i = 1, \dots, k-1$. Đặt $A = \{(u_1, u_2, \dots, u_k) \in E_n^k \mid u_{i+1} - u_i \geq 2 \text{ với mọi } i = 1, \dots, k-1\}$. Xét ánh xạ $f: A \rightarrow B$, trong đó $B = \{(v_1, v_2, \dots, v_k) \in E_{n-k+1}^k \mid v_1 < v_2 < \dots < v_k\}$ xác định như sau

$$f(u_1, u_2, \dots, u_k) = (v_1, v_2, \dots, v_k)$$

với $v_i = u_i - (i - 1)$. Ta kiểm tra $(v_1, v_2, \dots, v_k) \in B$:

a) Rõ ràng $v_{i+1} - v_i = (u_{i+1} - i) - (u_i - (i - 1)) = u_{i+1} - u_i - 1 \geq 1$

b) $v_1 = u_1 \geq 1, v_k = u_k - (k - 1) \leq n - k + 1$.

Ta kiểm tra f là một song ánh. Nếu $(u_1, u_2, \dots, u_k) \neq (u'_1, u'_2, \dots, u'_k)$ thì rõ ràng ảnh của chúng khác nhau. Suy ra f là một đơn ánh. Ngược lại, với $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ thuộc B , ta chọn $u_i = v_i + i - 1$ thì $(u_1, u_2, \dots, u_k)$ thuộc A và $f(u_1, \dots, u_k) = (v_1, v_2, \dots, v_k)$. Suy ra f là toàn ánh.

Vậy $|A| = |B|$. Mà $|B|$ thì rõ ràng là bằng số các tập con k phần tử của E_{n-k+1} , do đó bằng C_{n-k+1}^k .

Cách 2. (Sử dụng bài toán chia kẹo của Euler). Giả sử ta chọn được k người. Gọi x_1 là số người tính từ người đầu tiên đến trước người thứ nhất được chọn, x_2 là số người nằm giữa người thứ

nhất và người thứ hai, ..., x_k là số người nằm giữa người thứ $k - 1$ và người thứ k , và x_{k+1} là số người nằm sau người thứ k đến cuối. Khi đó ta có

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} = n - k \quad (1)$$

và x_1, x_{k+1} là các số nguyên không âm, còn $x_2, \dots, x_k$ là các số nguyên ≥ 1 .

Ngược lại, nếu $(x_1, \dots, x_{k+1})$ là một nghiệm của (1) với $x_1, x_{k+1} \geq 0, x_2, \dots, x_k \geq 1$ thì ta cho tương ứng với cách chọn người thứ $1 + x_1, 2 + x_1 + x_2, \dots, k + x_1 + \dots + x_k$ thì rõ ràng do

$$(i + x_1 + \dots + x_i) - (i - 1 + x_1 + \dots + x_{i-1}) = 1 + x_i \geq 2$$

nên không có 2 người liên tiếp được chọn.

Để hoàn tất lời giải bài toán, ta đặt $y_1 = x_1, y_{k+1} = x_{k+1}$ và $y_i = x_i - 1$ với $i = 2, \dots, k$ thì được

$$y_1 + y_2 + \dots + y_{k+1} = n - 2k + 1 \quad (2)$$

với y_i là các số nguyên không âm.

Theo kết quả của định lý chia kẹo của Euler, ta có số nghiệm của (2) bằng C_{n-k+1}^k . Đó cũng chính là kết quả của bài toán ban đầu của chúng ta. $\square$

Bài 9. Có n người xếp thành một vòng tròn. Có bao nhiêu cách chọn ra k người, sao cho không có hai người kề nhau được chọn?

Lời giải.

Bài toán này có thể giải bằng kết quả của bài toán trên và phương pháp *cắt đường tròn*. Giả sử n người đó được đánh số $1, 2, \dots, n$. Ta xét các trường hợp sau:

- Người số 1 được chọn. Khi đó người số 2 và số n không được chọn. Như vậy ta phải chọn thêm $k - 1$ người từ 3 đến $n - 1$ sao cho không có hai người kề nhau được chọn. Vì $n - 1$ không kề 3 nên có thể coi đây là $n - 3$ người xếp theo một hàng dọc. Theo kết quả của bài toán trên, số cách chọn bằng $C_{n-3-(k-1)+1}^{k-1} = C_{n-k-1}^{k-1}$.
- Người số 1 không được chọn. Khi đó ta cần chọn k người từ số 2 đến n sao cho không có 2 người kề nhau được chọn. Vì 2 và n không kề nhau nên có thể coi đây là $n - 1$ người xếp theo một hàng dọc. Theo kết quả của bài toán trên, số cách chọn bằng C_{n-k}^k .

Vậy đáp số của bài toán là

$$C_{n-k-1}^{k-1} + C_{n-k}^k = \frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-2k)!} + \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} = \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!} (k + n - k) = \frac{n}{k} C_{n-k-1}^{k-1}.$$

$\square$

Bài 10. Cho $k, n \in \mathbb{N}^*$ và $1 < k \leq n$. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn ra k số đôi một khác nhau từ n số nguyên dương đầu tiên sao cho trong mỗi bộ k số được chọn ra, không có hai số nào là hai số nguyên liên tiếp.

Lời giải.

Gọi m là số cần tìm. Ta có $m = |A|$, với A là tập gồm tất cả các bộ không có thứ tự $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ thỏa mãn $a_i \in \{1, 2, \dots, n\}$ với $i = 1, 2, \dots, k$ và $|a_i - a_j| \notin \{0, 1\}$ với mọi $i \neq j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Không mất tính tổng quát, với mỗi $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in A$, ta có thể giả sử

$$a_1 < a_2 < \dots < a_k.$$

Xét tương ứng

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) \in A \rightarrow (a_1, a_2 - 1, \dots, a_k - k + 1)$$

Dễ thấy, tương ứng nói trên xác lập một song ánh từ A đến B , với B là tập gồm tất cả các bộ $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ không có thứ tự thỏa mãn

$$b_i \in \{1, 2, \dots, n - k + 1\}, \forall i = 1, 2, \dots, k \text{ và } b_i \neq b_j, \forall i \neq j \in \{1, 2, \dots, k\}$$

Từ đây suy ra $|A| = |B| = C_{n-k+1}^k$. □

Bài 11 (VMO 2012). Cho một nhóm gồm 5 cô gái, kí hiệu là G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 và 12 chàng trai. Có 17 chiếc ghế được xếp thành một hàng ngang. Người ta xếp nhóm người đã cho ngồi vào các chiếc ghế đó sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:

- i) Mỗi ghế có đúng một người ngồi;
- ii) Thứ tự ngồi của các cô gái, xét từ trái qua phải, là G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 ;
- iii) Giữa G_1 và G_2 có ít nhất 3 chàng trai;
- iv) Giữa G_4 và G_5 có ít nhất 1 chàng trai và nhiều nhất 4 chàng trai.

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp như vậy? (Hai cách xếp được coi là khác nhau nếu tồn tại một chiếc ghế mà người ngồi ở chiếc ghế đó trong hai cách xếp là khác nhau).

Lời giải.

Cách 1. Đánh số thứ tự các ghế từ trái sang phải là $1, 2, \dots, 17$.

Gọi x_1 là số chàng trai được xếp bên trái G_1 , x_2 là số chàng trai ở giữa G_1 và G_2 , x_3 là số chàng trai ở giữa G_2 và G_3 , x_4 là số chàng trai ở giữa G_3 và G_4 , x_5 là số chàng trai ở giữa G_4 và G_5 , x_6 là số chàng trai được xếp ở bên phải G_5 . Khi đó bộ số $(x_1, x_2, \dots, x_6)$ hoàn toàn xác định vị trí các cô gái và ta có

a) $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$.

b) $3 \leq x_2$.

c) $1 \leq x_5 \leq 4$.

Đổi biến $y_2 = x_2 - 3$ và $y_5 = x_5 - 1$ ta được $x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 + x_6 = 8$.

Với các ẩn không âm và có thêm điều kiện $y_5 \leq 3$.

Tiếp theo, sử dụng bài toán chia kẹo của Euler ở dạng

$$x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 8 - y_5.$$

ta được số cách phân ghế cho các cô gái là

$$C_{12}^4 + C_{11}^4 + C_{10}^4 + C_9^4 = 1161.$$

Vì còn có 12 chàng trai có thể hoán đổi vị trí ở 12 chiếc ghế dành cho họ nên số cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán là $12!1161$.

Cách 2. Cũng đánh số thứ tự các ghế từ trái sang phải là $1, 2, \dots, 17$. Gọi g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 là vị trí chỗ ngồi của các cô gái G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 tương ứng. Khi đó ta có $1 \leq g_1 < g_2 < g_3 < g_4 < g_5 \leq 17$. Ngoài ra ta còn có $3 < g_2 - g_1$ và $1 < g_5 - g_4 < 6$. Đặt

$$A = \{(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5) \mid 1 \leq g_1 < g_2 < g_3 < g_4 < g_5 \leq 17, 3 < g_2 - g_1, 1 < g_5 - g_4 < 6\}$$

thì ta cần tìm $|A|$. Đặt

$$B = \{(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5) \mid 1 \leq g_1 < g_2 < g_3 < g_4 < g_5 \leq 17, 3 < g_2 - g_1, 1 < g_5 - g_4\}$$

$$C = \{(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5) \mid 1 \leq g_1 < g_2 < g_3 < g_4 < g_5 \leq 17, 3 < g_2 - g_1, 6 \leq g_5 - g_4\}$$

thì rõ ràng ta có $A = B \setminus C$ (với $C \subset B$), suy ra $|A| = |B| - |C|$.

Để tính $|B|$, ta đặt $D = \{(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5) \mid 1 \leq h_1 < h_2 < h_3 < h_4 < h_5 \leq 13\}$ và xét ánh xạ

$$f : B \rightarrow D, f(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5) \mapsto (g_1, g_2 - 3, g_3 - 3, g_4 - 3, g_5 - 4)$$

thì dễ dàng kiểm chứng được f là một song ánh.

Nhưng $|D|$ bằng số cách chọn 5 phần tử ra từ 13 phần tử nên ta có $|D| = C_{13}^5$. Vậy $|B| = |D| = C_{13}^5$.

Một cách hoàn toàn tương tự, ta tính được $|C| = C_9^5$. Vậy số cách xếp chỗ cho 15 cô gái bằng $C_{13}^5 - C_9^5 = 1161$. $\square$

Bình luận.

- Bài toán chia kẹo Euler là một ứng dụng trực tiếp của phương pháp song ánh hết sức quan trọng để giải các bài toán tổ hợp.

- Đây là một bài tổ hợp cơ bản. Các vấn đề này đã được trình bày khá kỹ trong các tài liệu bồi dưỡng học sinh giỏi.
- Ngoài các phương pháp trình bày ở trên, còn có thể trình bày theo lối hàm sinh, đa thức. Chẳng hạn số cách xếp 5 cô gái thỏa mãn yêu cầu đề bài chính là hệ số của x^8 trong khai triển $(1 + x + x^2 + \dots)^5 (1 + x + x^2 + x^3)$.
- Một sai lầm phổ biến có thể gặp là quên nhân $12!$.
- Trong lời giải, nên chứng minh chặt chẽ f (trong lời giải 2) là ánh xạ, sau đó chứng minh nó là song ánh.
- Nếu không chứng minh lại định lý bài toán chia kẹo của Euler thì ít nhất cũng cần phát biểu rõ ràng định lý này.
- Bài tập tương tự: Có bao nhiêu cách chọn ra k người từ n người xếp thành một hàng dọc sao cho không có hai người liên tiếp được chọn?

Bài 12. Cho $n, k, m \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện $m > 1$ và $1 < k \leq n$. Hỏi có tất cả bao nhiêu chỉnh hợp chập k $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ của n số nguyên dương đầu tiên mà mỗi chỉnh hợp $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ đều thỏa mãn ít nhất một trong hai điều kiện:

- Tồn tại hai số $i \neq j \in \{1, 2, \dots, k\}$ sao cho $i < j$ và $a_i > a_j$.
- Tồn tại $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ sao cho $a_i - i$ không chia hết cho m .

Lời giải.

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau

Bổ đề: Cho các số nguyên dương k và n . Nếu A là tập gồm các số nguyên dương a không vượt quá n và thỏa mãn $n : k$ thì $|A| = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$.

Chứng minh. Dễ thấy $A = \{k, 2k, \dots, mk\}$, với m là số thỏa mãn điều kiện $mk \leq n < (m+1)k$. (1)

Từ đó suy ra $A \sim \{1, 2, \dots, m\}$. Vì thế $|A| = m = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ (do (1)).

Trở lại bài toán, gọi A là tập gồm tất cả các chỉnh hợp chập k của n số nguyên dương đầu tiên. Gọi A^* là tập gồm tất cả các chỉnh hợp thỏa mãn yêu cầu bài toán, và gọi B là tập gồm tất cả các chỉnh hợp không thỏa mãn yêu cầu bài toán. Hiển nhiên ta có

$$A^* = A \setminus B \quad (1)$$

Xét tập B . Ta có

$$B = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) \in A \mid a_1 < a_2 < \dots < a_k, a_i - i : m, \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}\}$$

Xét tương ứng

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) \in B \mapsto (a_1 + (m-1), a_2 + 2(m-1), \dots, a_k + k(m-1))$$

Ta chứng minh được tương ứng trên là một song ánh từ B đến B_1 , trong đó B_1 là tập gồm tất cả các bộ không có thứ tự $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ thỏa mãn $b_i \in \{1, 2, \dots, n + k(m-1)\}$ và $b_i \leq m, \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Từ đó suy ra $|B| = |B_1|$. Mặt khác, theo bổ đề ta có $|B_1| = C_{\left[\frac{n-k}{m}\right]+k}^k$. Vì vậy, từ (1) ta được

$$|A^*| = n(n-1) \dots (n-k+1) - C_{\left[\frac{n-k}{m}\right]+k}^k.$$

□

Chú ý: Trong bài toán trên, khi cho $m = 2$ ta sẽ có bài 3 của đề thi quốc gia chọn học sinh giỏi toán THPT năm 1996 (bảng A).

Bài 13. Cho đa giác đều có 103 cạnh. Tô màu đỏ cho 79 đỉnh của đa giác và tô màu xanh cho các đỉnh còn lại. Gọi A là số cặp đỉnh đỏ kề nhau và B là số cặp đỉnh xanh kề nhau.

- Tìm tất cả các giá trị có thể nhận được của cặp (A, B) .
- Xác định số cách tô màu các đỉnh của đa giác để $B = 14$. Biết rằng, hai cách tô màu được xem là như nhau nếu chúng có thể nhận được từ nhau thông qua 1 phép quay quanh tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác.

Lời giải.

- Số đỉnh màu xanh là 24 đỉnh ($103 - 79$). Nếu tất cả các đỉnh đỏ chia thành một cụm thì $A = 78$. Nếu bị cắt thành 2 cụm thì $A = 77$. Và cứ thế tiếp tục, tức là nếu có k cụm (mỗi cụm là các đỉnh cùng màu đỏ đứng sát nhau) thì $A = 79 - k$. Nếu có k cụm đỏ thì cũng có k cụm xanh nên có $B = 24 - k$. Các giá trị có thể của k là từ 1 đến 24, nên có 24 khả năng tất cả.
- Để có $B = 14$ thì $k = 10$ (phải chia quân xanh thành 10 cụm, quân đỏ thành 10 cụm).
Gọi X là số cụm các điểm đỏ liên nhau, thì $B = 24 - X$. Do vậy $B = 14$ thì $X = 10$. Áp dụng công thức chia kẹo của pt chia kẹo, ta suy ra được số cách chia 24 điểm xanh vào 10 cụm là C_{23}^9 . Tiếp theo, ta sẽ xem xét việc xếp các điểm xanh–đỏ như là việc có sẵn 79 điểm đỏ ở trên đường tròn, và ta bỏ đi 10 cụm điểm xanh và các khoảng trống giữa 2 điểm đỏ liên tiếp, mỗi khoảng có tối đa 1 cụm. Như vậy thì số cách chọn ra 10 khoảng trống trong 79 khoảng là C_{79}^{10} . Sự trùng lặp theo phép quay là ở chỗ ta chọn 10 vị trí trong 79 vị trí theo đường tròn. Có $(79, 10) = 1$ mà ta không phải lo về "các cấu hình lộn xộn", mỗi cách tô bị lặp đúng 79 lần, do vậy đáp số là $\frac{C_{79}^{10} C_{23}^9}{79}$.



Bài 14. Với mỗi đỉnh của đa giác đều 9 đỉnh (cửu giác) được tô bởi màu đỏ hoặc xanh da trời. Chứng minh rằng tồn tại 2 tam giác đơn sắc đồng dạng, trong đó tam giác đơn sắc là tam giác có tất cả các đỉnh là cùng 1 màu.

Lời giải.

Ta gọi đơn giác đỏ (xanh) nếu tất các đỉnh của tam giác là đỏ hoặc xanh. Vì đa giác có 9 đỉnh, mỗi đỉnh chỉ tô 2 màu xanh hoặc đỏ nên có ít nhất 5 đỉnh có cùng 1 màu. Không mất tính tổng quát, giả sử đó là màu đỏ. Suy ra có ít nhất $C_5^2 = 10$ đơn giác đỏ. Giờ ta chứng minh có 2 tam giác đỏ đồng dạng.

Đặt A_1, A_2, A_9 là các đỉnh của đa giác và ω là đường tròn ngoại tiếp đa giác. 9 đỉnh đa giác chia đường tròn này thành 9 cung bằng nhau. Gọi mỗi cung trong 9 cung này là 1 mảnh. Gọi $A_i A_j A_k$ là tam giác thỏa mãn $A_i A_j \leq A_j A_k \leq A_k A_i$. Định nghĩa $a_{i,j}$ là số mảnh của cung $A_i A_j$ không chứa điểm A_k . Ta định nghĩa tương tự với $a_{j,k}$ và $a_{k,i}$. Khi đó $\triangle A_i A_j A_k$ được xác định bởi bộ ba $(a_{i,j}, a_{j,k}, a_{k,i})$. Do 1 tam giác có 3 đỉnh, nên ta dễ thấy $1 \leq a_{i,j} \leq a_{j,k} \leq a_{k,i} \leq 7$ (trường hợp góc lớn nhất là 3 đỉnh nằm kề nhau trên đường tròn). Do $A_i A_j + A_j A_k + A_k A_i = 180^\circ$, do đó $a_{i,j} + a_{j,k} + a_{k,i} = 9$. Ví dụ với tam giác $\triangle A_2 A_4 A_8$ ta xác định được bộ ba tương ứng là $(2, 3, 4)$. Dễ thấy các tam giác đồng dạng cho cùng 1 bộ ba, trong khi 2 tam giác không đồng dạng có các bộ ba khác nhau. Từ đó ta xây dựng song ánh $A \rightarrow B$ như sau:

A : tập các tam giác đồng dạng.

B : tập các số tự nhiên a, b, c thỏa mãn $1 \leq a \leq b \leq c \leq 7$ và $a + b + c = 9$.

Ta có thể liệt kê ra các phần tử của B là

$$(1, 1, 7), (1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 4, 4), (2, 2, 5), (2, 3, 4), (3, 3, 3)$$

có tất cả 7 phần tử.

Suy ra A cũng có 7 phần tử hay có tất cả 7 dạng tam giác khác nhau. Trong khi đó ta có 10 tam giác đơn sắc, nên tồn tại ít nhất 2 tam giác đơn sắc đồng dạng. □

Bài 15. Cho n nguyên dương. Hỏi có bao nhiêu các biểu diễn n thành tổng của ít nhất 2 số nguyên dương. (Ví dụ có 3 cách biểu diễn số 3 thành tổng của các số nguyên dương: $3 = 1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1$)

Lời giải.

Ta viết n dưới dạng sau:

$(1_1_ \dots _1)$ gồm n số 1. Xét $n - 1$ khoảng trống trong đó là $\overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$, khi đó các khoảng trống sẽ có 2 trạng thái là 0 hoặc 1. Nếu trạng thái là 0, thì ta sẽ thay khoảng trống bởi dấu "+", nếu trạng

thái là 1 thì thay bởi ")+"(. Ví dụ như $4 = (1_1_1_1) = (a_1, a_2, a_3)$. Khi đó nếu $(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 1)$ thì $4 = (1 + 1 + 1) + (1) = 3 + 1$ là một cách biểu diễn.

Ta có tất cả 2^{n-1} cách biểu diễn cho dãy nhị phân $(n-1)$ bit $\overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$ và mỗi dãy nhị phân cho một cách biểu diễn duy nhất của n .

Trong dãy nhị phân này, chỉ có trường hợp duy nhất là dãy $00 \dots 0$ là không biểu diễn dưới dạng tổng của ít nhất 2 số. Do đó có $2^{n-1} - 1$ cách biểu diễn n dưới dạng tổng của ít nhất 2 số nguyên dương $\square$

Bài 16. Cho n là số tự nhiên với $n \geq 2$, và đặt dãy $S = (1, 2, \dots, n)$. Một dãy con của S được gọi là dãy con số học nếu nó có ít nhất 2 phần tử và nó là 1 cấp số cộng. Dãy con số học được gọi là cực đại nếu dãy này không thể kéo dài bằng cách thêm vào một phần tử khác của S . Xác định số dãy con số học cực đại.

Lời giải.

Ta có công sai $a_2 - a_1$ phải lớn hơn a_1 để không thể điền thêm phần tử nào vào bên trái dãy con (phía trước a_1), nên $a_2 \geq 2a_1$. Lại có $a_2 \leq 2m$ nên $a_1 \leq m$. Khi đó để một dãy con là cực đại thì $1 \leq a_1 \leq m$ và $2a_1 \leq a_2 \leq n$ (1). Ta cũng có, với mỗi bộ (a_1, a_2) thỏa mãn điều kiện trên thì cũng cho ra duy nhất 1 dãy con cực đại có phần tử ban đầu a_1 và công sai $a_2 - a_1$. Suy ra dãy số con cực đại và bộ (a_1, a_2) thỏa mãn đk (1) là song ánh. Ta có, với mỗi cách chọn a_1 thì có $n - 2a_1 + 1$ cách chọn a_2 . Do có m cách chọn a_1 nên số bộ (a_1, a_2) thỏa mãn đk (1) là:

$$\begin{aligned} \sum_{a_1=1}^m (n - 2a_1 + 1) &= mn - 2 \frac{m(m+1)}{2} + m \\ &= 2m^2 - m^2 = m^2 \end{aligned}$$

Vậy có m^2 dãy con cực đại với $n = 2m$.

Xét với $n = 2m + 1$, với m là số nguyên dương.

Tương tự ta có: $a_2 \geq 2a_1$, suy ra $a_1 \leq m$. Lý luận tương tự, ta có số dãy con cực đại là:

$$\begin{aligned} \sum_{a_1=1}^m (n - 2a_1 + 1) &= mn - 2 \frac{m(m+1)}{2} + m \\ &= m(2m + 1) - m^2 = m^2 + m \end{aligned}$$

Vậy, với mỗi số tự nhiên n , ta có $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ dãy con số học cực đại $\square$

Song ánh có thể được sử dụng giữa các tập hợp mà các tập hợp này không cần hữu hạn. Dưới đây là một ví dụ.

Bài 17. Giả sử rằng có 2 quản trị PEA, là những người duy nhất có quyền quay số truy cập vào tệp tài liệu Internet của học viện, biết rằng tại một thời điểm tệp này chỉ xử lý cho một yêu cầu

truy cập. Với 15 phút sử dụng tệp cho 1 lần truy cập và tệp chỉ được sử dụng từ 4 giờ chiều đến 6 giờ chiều trong ngày. Biết rằng không có yêu cầu truy cập nào được thực hiện sau 5h45 chiều, và 1 người không được yêu cầu truy cập quá 1 lần. Ít nhất 1 người trong số họ thực hiện thành công cuộc gọi. Hỏi xác suất là bao nhiêu để cả 2 người đều có thể thực hiện thành công cuộc gọi của mình?

Lời giải.

Gọi An và Giang là 2 quản trị của PEA. Ta biết rằng yêu cầu truy cập vào tệp internet của học viện chỉ được thực hiện trong 105 phút. Giả sử An gọi sau 4 giờ x phút, Giang gọi sau 4 giờ y phút, khi đó ta có thể ánh xạ bộ thời gian gọi của 2 người tới điểm (x, y) trên mặt phẳng tọa độ. Rõ ràng đây là một song ánh.

Tập hợp các điểm (x, y) là hình vuông OA_2PZ_2 . Rõ ràng một người không thể gửi yêu cầu truy cập thành công nếu người còn lại đang làm việc với tệp, do đó để cả 2 người có thể đều truy cập được tệp tài liệu thì ta phải có $|x - y| > 15$. Xét miền của tập hợp các điểm (x, y) được xác định bởi $|x - y| \leq 15$. Đây là giao của 2 phương trình đường thẳng với hình vuông, cắt tại các điểm Z_1, Z_2, A_1, A_3 . Ta xác định được $Z_1 = (0, 15), Z_3 = (90, 105), A_1 = (15, 0), A_3 = (105, 90)$.

Từ đó, xác suất để cả 2 người cùng truy cập được vào tệp là:

$$p = \frac{S_{\triangle Z_1 Z_2 Z_3} + S_{\triangle A_1 A_2 A_3}}{S_{OA_2 P Z_2}} = \frac{90^2}{105^2} = \frac{36}{49}.$$

□

Bài 18. Cho 8 chiếc nhẫn khác nhau, tìm số cách xếp 5 chiếc nhẫn xếp trên 4 ngón tay (không tính ngón cái) trên một bàn tay. Biết rằng thứ tự từng chiếc nhẫn trên một ngón tay là quan trọng và không bắt buộc ngón nào cũng phải có nhẫn.

Lời giải.

Ta có C_8^5 cách chọn ra 5 chiếc nhẫn bất kỳ để đeo trong 8 chiếc nhẫn đã cho. Đặt a, b, c, d là số chiếc nhẫn trên từng ngón tay. Ta có $a + b + c + d = 5$. Ta có C_8^3 cách sắp xếp các chiếc nhẫn vào 4 ngón tay (giả thiết là các chiếc nhẫn ko phân biệt). Lại có với mỗi cách sắp xếp 5 chiếc nhẫn ko phân biệt thì tương ứng có $5!$ cách sắp xếp đối với 5 chiếc nhẫn phân biệt. Vậy ta có số cách sắp xếp là:

$$C_8^5 \cdot C_8^3 \cdot 5! = 376320.$$

□

Bài 19. Ngân hàng Bảo Hiểm của nước cộng hòa Fatand có 15 nhân viên điều hành cấp cao. Mỗi nhân viên này có 1 thẻ truy cập vào kho của ngân hàng và trên mỗi thẻ bất kỳ đều có 1 bảng gồm m mã hóa khác nhau. Để mở được kho, mỗi người sẽ đặt thẻ của mình vào khóa điện tử của kho.

Máy tính sẽ thu thập tất cả các mã khác nhau trên thẻ và hàm sẽ được mở khi và chỉ khi tập các mã hóa có n mã hóa (khác nhau) đặt trước. Vì lý do bảo mật, hàm có thể được mở nếu và chỉ nếu có ít nhất thẻ của 6 nhân viên cao cấp. Tìm n và m thỏa mãn n nhỏ nhất để có thể thực hiện được chính sách bảo mật nêu như trên.

Lời giải.

Dễ thấy với mỗi một nhóm gồm 5 nhân viên cao cấp thì sẽ thiếu ít nhất 1 mã hóa so với n mã hóa đặt trước để mở được hàm. Đặt A là tập hợp các nhóm có 5 nhân viên và B là tập hợp gồm n mã hóa cần để mở hàm. Xét ánh xạ từ A vào 1 trong các mã hóa có thể thiếu trong nhóm 5 người (số mã hóa thiếu có thể nhiều hơn 1, nhưng chỉ xét ánh xạ 1-1 để dễ thực hiện). Gọi ánh xạ này là f , ta sẽ chứng minh nó là đơn ánh. Thật vậy, gọi $a_1, a_2 \in A$ là 2 nhóm khác nhau thỏa mãn $f(a_1) = f(a_2) = c$, c là mã còn thiếu. Do a_1 khác a_2 nên tồn tại nhóm 6 người lấy từ 2 nhóm a_1 và a_2 mà vẫn thiếu ít nhất 1 mã (mã c), (vô lý so với giả thiết). Vậy f là đơn ánh. Rõ ràng f là ánh xạ từ A vào B nên ta có:

$$n = |B| \geq |A| = C_{15}^5 = 3003$$

Ta sẽ chứng minh $n = 3003$ thỏa mãn. Khi đó cho mỗi nhóm 5 người 1 nhận được 1 mã $c(a)$ khác nhau trong 3003 mã cho trước (điều này có thể thực hiện được vì ta có tất cả 3003 nhóm). Tiếp theo ta viết mỗi mã $c(a)$ này vào thẻ của các thành viên không nằm trong nhóm. Khi đó, mỗi mã sẽ được viết cho 10 người không trong nhóm, suy ra ta viết tất cả $10 \cdot C_{15}^5$ các mã, đồng thời được chia đều cho 15 người nên thẻ mỗi người sẽ có $\frac{10 \cdot C_{15}^5}{15} = 2002$ mã khác nhau.

Xét một nhóm gồm 6 người bất kỳ. Theo như cách sắp xếp mã như trên, với nhóm a gồm 5 người bất kỳ sẽ chỉ thiếu duy nhất một mã $c(a)$. Ta sẽ chứng minh nhóm 6 người có đủ n mã khác nhau. Thật vậy, xét 2 nhóm 5 người bất kỳ a_1 và a_2 từ 6 người được chọn. Khi đó ta có $c(a_1) \neq c(a_2)$. Ta sẽ chứng minh rằng nhóm a_2 có mã $c(a_1)$. Giả sử trong a_2 không có mã $c(a_1)$, khi đó theo định nghĩa hàm c như ban đầu, ta có $c(a_1) = c(a_2)$ (vô lý). Vậy một nhóm 6 người sẽ có đủ mã để mở kho, hay $m = 2002$.

Kết luận: $n = 3003, m = 2002$ □

Bài 20. Bart hiện là nhân viên của rạp chiếu phim. Rạp này có sức chứa 200 chỗ ngồi. Trong ngày khởi chiếu phần I Star War: The Phantom Menace, có 200 người đứng xếp hàng để mua vé xem phim. Giá mỗi vé là 5\$. Trong 200 người mua vé, 100 trong số họ có hóa đơn loại 5\$, nửa còn lại là hóa đơn loại 10\$ (mỗi người có 1 hóa đơn). Bart vốn bất cẩn và vẫn không chịu thay đổi. 200 người đó xếp hàng 1 cách ngẫu nhiên và không ai muốn chờ để thay đổi vé của mình khi họ mua vé. Xác suất là bao nhiêu để Bart có thể bán được hết tất cả các vé có lợi nhất (thành công).

Lời giải.

Để dễ dàng hơn ta thay 100 bằng n . Ta xem xét những người là không phân biệt được. Ta cân nhắc sự sắp xếp của n người sở hữu hóa đơn 5\$ và n người sở hữu hóa đơn 10\$ (nói cách khác ta làm phép nhân lên $(n!)^2$ tới cả hai mẫu số và tử số, việc này không ảnh hưởng tới giá trị của xác suất). Có C_{2n}^n cách sắp xếp xác số mà không hạn chế. Bart sẽ thành công khi và chỉ khi: ta sắp xếp $2n$ số vào một hàng ngang và đánh số vị trí của chúng từ trái qua phải từ $1, 2, 3, \dots, 2n$. Với $1 \leq i \leq 2n$, đặt $a_i (b_i)$ là số người có hóa đơn 5\$(10\$) đứng trước vị trí thứ i . Ta cần đếm số sự sắp xếp thỏa mãn $a_i \geq b_i$ với $1 \leq i \leq 2n$. Gọi S là tập hợp tất cả các sắp xếp như vậy. Gọi T là tập hợp các sự sắp xếp khác nhau như trên. Ta sẽ tìm $|T|$.

Ta có $|S| = C_{2n}^n - |T|$.

Một phần tử $t \in T, t = (t_1, t_2, \dots, t_{2n})$ có số $i, 1 \leq i \leq 2n$ thỏa mãn $a_i < b_i$. Gọi $f(t)$ là ký hiệu của số chỉ đầu tiên. Bởi sự xác định cả ta, $a_{f(t)} = \frac{f(t)-1}{2}, b_{f(t)} = \frac{f(t)+1}{2}$ và $t_{f(t)} = 10$. Vì vậy có nhiều hơn số hóa đơn 10\$ so với 5\$ tính đến (tại) thời điểm thứ $f(t)$. Ta thay đổi toàn bộ các đồng 5\$ thành 10\$ và các đồng 10\$ thành 5\$ sau thời điểm thứ $f(t)$, thì khi đó ta thu được một hoán vị $g(t)$ của $n+1$ đồng 10\$ và $n-1$ đồng 5\$.

Ví dụ: với $n=6$ ta có $t = (5, 10, 10, 5, 10, 10, 10, 5, 10, 5, 5, 5)$.

Ta có

$$(a_1, a_2, \dots, a_{12}) = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6)$$

$$(b_1, b_2, \dots, b_{12}) = (0, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6)$$

$$f(t) = 3, a_2 = 1, b_2 = 1, t_3 = 10$$

$$g(t) = (5, 10, 10, 10, 5, 5, 5, 10, 5, 10, 10, 10)$$

Do đó ta xác định một ánh xạ từ T vào U —là tập hợp hoán vị của $n+1$ đồng 10\$ và $n-1$ đồng 5\$. Ta sẽ chứng minh g là một song ánh và 10\$ bằng nhau. Không khó để thấy dãy mới này thuộc T , do đó g là một toàn ánh.

Bây giờ ta chứng minh g là đơn ánh. Xét t và t' là 2 phần tử thuộc T . Giả sử rằng tại thời điểm thứ $i, 1 \leq i \leq 2n$ là thời điểm đầu tiên t và t' có sự khác nhau. Không giảm tính tổng quát $g/st_i = 5$ và $t_{f(t)} = 10$, thì $f(t) \neq i$. Nếu $f(t) < i$ thì $f(t') = f(t)$ bởi $i-1$ vị trí đầu của t và t' là hoàn toàn giống nhau. Khi đó tại thời điểm thứ $i, g(t)$ và $g(t')$ có giá trị là 10 và 5 tương ứng, do đó $g(t) \neq g(t')$. Ta lại xét $f(t) > i$. Thì tại thời điểm thứ i của $g(t)$ là t_i , có $t_i = 5$. Bởi vì $(i-1)$ vị trí đầu của t và t' như nhau, $f(t') > i$. Do đó tại thời điểm thứ i của $g(t')$ là t'_i , nó bằng 10. Do đó $g(t) \neq g(t')$. Suy ra g là song ánh.

Từ đó theo ta có:

$$|T| = |U| = C_{2n}^{n-1}. \text{ Vậy } |S| = C_{2n}^n - |T| = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$$

Trở lại bài toán, ta có $n = 200$, vậy xác suất là $\frac{1}{201}$. □

Bài 21. Chứng minh rằng

$$\binom{0}{n}^2 + \binom{1}{n}^2 + \binom{2}{n}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = C_{2n}^n$$

Lời giải.

Ta thấy C_{2n}^n bằng số cách chọn ra n đối tượng từ $2n$ đối tượng đôi một khác nhau.

Mặt khác, chia $2n$ đối tượng này ra thành 2 nhóm: ả hóm 1 và nhóm 2 đều gồm n đối tượng. Khi đó để chọn ra n phần tử ta thực hiện như sau. Chọn k phần tử từ nhóm 1: có C_n^k cách chọn, sau đó chọn $n - k$ đối tượng từ nhóm 2: có $C_{n-k}^{n-k} = C_n^k$ cách chọn. Theo quy tắc nhân có $\binom{k}{n}^2$ cách chọn ra n đối tượng mà trong đó có k đối tượng thuộc nhóm 1. Cho $k = 0, 1, \dots, n$ và theo quy tắc cộng ta có đpcm. $\square$

Bài 22. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^n k \binom{k}{n}^2 = n C_{2n-1}^{n-1}.$$

Lời giải.

Hướng dẫn: Xét bài toán có n học sinh nam và n học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra n học sinh sao cho có 1 học sinh nam làm lớp trưởng? $\square$

Bài 23. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^n 2^k C_n^k C_{n-k}^{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} = C_{2n+1}^n.$$

Lời giải.

Xét bài toán "chọn n số từ $2n + 1$ số khác nhau" theo 2 cách:

Cách 1 : chia $2n + 1$ số thành n cặp gồm 2 số và 1 số x

- Bước 1: chọn ra k cặp, từ mỗi cặp này chọn ra một số. Có C_n^k cách chọn ra k cặp và có 2 cách chọn ra 1 số trong mỗi cặp. Vậy theo quy tắc nhân có $2^k C_n^k$ cách chọn theo bước 1
- Bước 2: chọn $\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor$ cặp trong $n - k$ cặp còn lại, ngoài ra số x sẽ được chọn nếu $n - k$ lẻ và không chọn được thêm x nếu $n - k$ chẵn. Khi đó có $C_{n-k}^{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor}$ cách chọn trong bước 2

Theo quy tắc nhân có $C_{n-k}^{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} \cdot C_n^k \cdot 2^k$ cách chọn ra n số trong mỗi lần chọn. Cho $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ta có được tổng ở vế trái đẳng thức.

Cách 2: chọn theo tổ hợp chập n của $2n + 1$ phần tử: có C_{2n+1}^n cách chọn.

Vậy ta có đpcm. $\square$

Bài 24. Cho tập $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Mỗi tập con không rỗng của A ta xác định duy nhất một tổng đan dấu như sau: sắp xếp các phần tử của A theo thứ tự tăng dần sau đó gán luân phiên các dấu $+$ và $-$ sao cho phần tử lớn nhất mang dấu cộng. Tính tổng các tổng đan dấu trên.

Lời giải.

Coi tập rỗng có tổng bằng 0.

Với các tập A_i khác rỗng ta chia chúng làm 2 loại: tập A_1 chứa các tập chứa phần tử n , tập A_2 chứa các tập không chứa phần tử n . Khi đó tương ứng sau là song ánh:

$$f: A_2 \rightarrow A_1$$

$$A_i = \{a_1 > a_2 > \dots > a_i\} \rightarrow f(A_i) = \{n > a_1 > a_2 > \dots > a_i\}$$

Khi đó tổng của tổng đơn dấu của A_i và $f(A_i)$ bằng n . Vì A có 2^n tập con nên có 2^{n-1} cặp tập con A_i và $f(A_i)$. Suy ra tổng các tổng đơn dấu bằng $n2^{n-1}$. $\square$

Bài 25. Cho tập $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Gọi T là tập tất cả các tập con không rỗng của S . Với mỗi $X \in T$, gọi $m(X)$ là trung bình cộng các phần tử của X . Tính $m = \frac{\sum m(X)}{|T|}$.

Lời giải.

Xét song ánh $f: T \rightarrow T, f(X) = \{n+1-x\}$ với $x \in X$.

Ta thấy $m(X) + m(f(X)) = n+1$. Do đó:

$$2 \sum m(X) = \sum (m(X) + m(f(X))) = |T| \cdot (n+1) \Rightarrow m = \frac{n+1}{2}.$$

 $\square$ **6.3. Bài tập đề nghị**

Bài 26. Cho $n, k, m \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện $m > 1$ và $1 < k \leq n$. Hỏi có tất cả bao nhiêu chỉnh hợp chập k $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ của n số nguyên dương đầu tiên mà mỗi chỉnh hợp $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ đều thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

- i) Tồn tại hai số $i \neq j \in \{1, 2, \dots, k\}$ sao cho $i < j$ và $a_i > a_j$.
- ii) Tồn tại $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ sao cho $a_i - i$ không chia hết cho m .

Bài 27. Cho các số $n, k \in \mathbb{N}^*$ và $1 < k < n, n > 3$. Cho đa giác lồi $A_1, A_2, \dots, A_n$. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách tô màu k đỉnh của đa giác đó sao cho trong mỗi cách tô không có hai đỉnh kề nhau nào cùng được tô màu.

Hướng dẫn: Gọi T là tập gồm tất cả các cách tô màu thỏa mãn yêu cầu đề bài. Gọi T_1 là tập gồm tất cả các cách tô màu thuộc T mà trong mỗi cách tô, ta đều thấy đỉnh A_1 không được tô màu. Đặt $T_2 = T \setminus T_1$. Hiển nhiên $T = T_1 \cup T_2$ và $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. Từ đó, theo bài toán trên, ta chứng minh được $|T| = \frac{n}{n-k} C_{n-k}^k$.

Bài 28. Cho m, n là các số nguyên lớn hơn 1. Cho S là một tập hợp có n phần tử, $A_1, A_2, \dots, A_m$ là những tập con của S . Giả thiết rằng bất kì hai phần tử x và y trong S bao giờ cũng có một tập hợp A_i sao cho x ở trong A_i và y không ở trong A_i hoặc x không ở trong A_i và y ở trong A_i . Chứng minh rằng $n \leq 2^m$.

Hướng dẫn: Xét đơn ánh $f : S \rightarrow T = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_i \in \{0, 1\}\}$ trong đó $f(x) = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ thoả mãn $x_i = 1$ nếu x ở trong A_i và $x_i = 0$ nếu x không ở trong A_i .

Bài 29. Có một nhóm người mà trong đó, mỗi cặp không quen nhau có đúng hai người quen chung, mỗi cặp quen nhau thì không có người quen chung. Chứng minh rằng số người quen của mỗi người là như nhau.

Hướng dẫn: Giả sử a, b là hai người tùy ý.

- Nếu a quen b thì a, b không có người quen chung. Gọi A, B là tập các người quen của a, b tương ứng. Ta chỉ ra một tương ứng 1 – 1 giữa A, B như sau: Với mỗi người tùy ý $a' \in A$ thì a' không quen b nên a' và b có đúng hai người quen chung. Một trong hai người đó là a người còn lại là c , một người quen của b (hay $c \in B$).
- Nếu a không quen b thì họ có người quen chung là c . Khi đó $|A| = |B| = |C|$ (đpcm)

Bài 30. Gọi C_n là số hoán vị f của tập $S = \{1, 2, \dots, n\}$ thoả mãn $f(i) \geq i - 1, i = 1, 2, \dots, n$. Gọi E_n là số hoán vị f của S sao cho $f(i) \leq i + 1, i = 1, 2, \dots, n$. Chứng minh rằng $E_n = C_n$.

Hướng dẫn: Thiết lập song ánh $f \mapsto g : g(i) = n + 1 - f(n - i + 1)$.

Bài 31. Gọi M là số nguyên dương trong hệ thập phân có $2n$ chữ số, trong đó có n chữ số 1 và n chữ số 2. Gọi N là số nguyên dương trong hệ thập phân có n chữ số, trong đó chỉ có n các chữ số 1, 2, 3, 4 và số chữ số 1 bằng số chữ số 2. Chứng minh $M = N$.

Hướng dẫn: Thiết lập tương ứng như sau

$$f : \overline{a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_n} \mapsto \overline{c_1 c_2 \dots c_n}.$$

Trong đó, $\overline{a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_n} \in M$ và $C_i = a_i + b_i$ theo qui tắc

$$1 + 1 = 1$$

$$1 + 2 = 3$$

$$2 + 1 = 4$$

$$2 + 2 = 2$$

Khi đó, f là một ánh xạ từ M vào N . Thật vậy, đặt

$$X = \{i \mid (a_i, b_i) = (2, 1), 1 \leq i \leq n\}, |X| = x$$

$$Y = \{i \mid (a_i, b_i) = (1, 2), 1 \leq i \leq n\}, |Y| = y$$

$$Z = \{i \mid (a_i, b_i) = (1, 1), 1 \leq i \leq n\}, |Z| = z$$

$$T = \{i \mid (a_i, b_i) = (2, 2), 1 \leq i \leq n\}, |T| = t$$

thì số số 1 trong $\overline{a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_n}$ là $x + y = 2z$, còn số số 2 là $x + y = 2t$. Suy ra $z = t$. Vậy $\overline{c_1 c_2 \dots c_n}$ chứa số số 1 và số số 2 bằng nhau hay $\overline{c_1 c_2 \dots c_n} \in N$. Hơn nữa,

$$f : \overline{a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_n} \mapsto \overline{c_1 c_2 \dots c_n}$$

là một song ánh vì phép toán quy ước xác định tương ứng 1 – 1 giữa (a, b) và c . Vậy $|M| = |N|$.

Bài 32. Cho n nguyên dương và r nguyên dương thỏa mãn $r < n - r + 1$. Giả sử $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Có bao nhiêu tập con của X có r phần tử mà không có hai số tự nhiên liên tiếp nào.

Hướng dẫn: Gọi A là tập các tập con của X , có r phần tử và không chứa hai số tự nhiên liên tiếp và B là tập các tập con có r phần tử của tập hợp

$$Y = \{1, 2, \dots, n - r + 1\}. \text{ Thiết lập song ánh}$$

$$f : S = \{x_1, x_2, \dots, x_r\} \mapsto T = \{x_1, x_2 - 1, x_3 - 2, \dots, x_r - r + 1\}.$$

Trong đó $S \subset X, x_1 + 1 < x_2, x_2 + 1 < x_3, \dots, x_{r-1} + 1 < x_r$ (vì S không chứa hai số nguyên liên tiếp).

Dễ thấy $Y \in B$ và tương ứng trên là một song ánh. (Tập T là tập có r phần tử và có thể có hai số tự nhiên liên tiếp). Vậy $|A| = |B| = C_{n-r+1}^r$

Bài 33. Cho tập S gồm tất cả các số nguyên dương c trong đoạn $[1, n]$. Gọi T là tập hợp tất cả các tập con khác rỗng của S . Với mỗi X thuộc T , gọi $m(X)$ là trung bình cộng các phần tử của X . Tính $m = \frac{\sum_{X \in T} m(X)}{|T|}$.

Hướng dẫn: Ta thiết lập một ánh xạ

$$f : T \rightarrow T$$

$$X \mapsto f(X) = \{n + 1 - x, x \in X\}$$

Khi đó, f là song ánh nên $m(X) = m(f(X))$, do đó $2m = \frac{\sum_{X \in T} (m(X) + m(f(X)))}{|T|}$ mà $m(X) + m(f(X)) = n + 1$. Vậy $m = \frac{n + 1}{2}$.

Bài 34. Tính trung bình cộng các số tự nhiên N gồm 2013 chữ số thoả mãn N chia hết cho 999 và các chữ số của N nằm trong tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Hướng dẫn: Gọi X là tập các số tự nhiên thoả mãn đề bài. Ta thiết lập một song ánh

$$f : X \rightarrow X$$

$$x = \overline{a_1 a_2 \dots a_n} \mapsto f(x) = \overline{(9 - a_1)(9 - a_2) \dots (9 - a_n)}$$

Rõ ràng $x + f(x) = 99 \dots 9$ nên trung bình cộng các phần tử của X là $\frac{99 \dots 9}{2}$.

Bài 35. Cho các số $1, 2, \dots, 8$ được điền bất kỳ lên mặt của 1 bát phương sao cho mỗi một mặt là 1 số khác nhau. Tính xác suất để không có 2 số liên tiếp nào (8 và 1 cũng được cho 2 số liên tiếp) được viết trên 2 mặt có chung cạnh.

7. Sử dụng số phức trong phép đếm

7.1. Sử dụng số phức trong tính toán các biểu thức tổ hợp

Bài 1. Tính tổng $S_1 = \sum_{0 \leq 3k < n+1} C_n^{3k}$.

 **Lời giải.**

Xét đa thức $P(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$

Gọi $w = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ là một căn nguyên thủy bậc ba của đơn vị (có $w^2 + w + 1 = 0$) thì $w^{2k} + w^k + 1$ bằng 0 nếu k không chia hết cho 3, bằng 3 nếu k chia hết cho 3.

Vì thế $P(1) + P(w) + P(w^2) = \sum_{k=0}^n C_n^k (1 + w^k + w^{2k}) = 3 \sum_{0 \leq 3k < n+1} C_n^{3k}$.

Suy ra $S_1 = \frac{1}{3} (P(1) + P(w) + P(w^2))$. Mặt khác

$$P(1) = (1+1)^n = 2^n.$$

$$\begin{aligned} P(w) &= \left(1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \\ &= \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^n = \cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(w^2) &= \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^n = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \\ &= \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^n = \cos \left(\frac{-n\pi}{3}\right) + i \sin \left(\frac{-n\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S_1 = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3}\right).$$

□

Bài 2. Tính tổng $S_2 = \sum_{k=0}^n C_n^k \cos kx$.

 **Lời giải.**

Xét $T_2 = \sum_{k=0}^n C_n^k \sin kx$, ta có

$$\begin{aligned} S_2 + iT_2 &= \sum_{k=0}^n C_n^k (\cos kx + i \sin kx) = \sum_{k=0}^n C_n^k e^{ikx} \\ &= (1 + e^{ix})^n = (1 + \cos x + i \sin x)^n \\ &= \left(2 \cos \frac{x}{2}\right)^n \left(\cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2}\right)^n \\ &= 2^n \cos^n \frac{x}{2} \left(\cos \frac{nx}{2} + i \sin \frac{nx}{2}\right) \end{aligned}$$

So sánh phần thực, phần ảo ta được $S_2 = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \cos \frac{nx}{2}$.

□

Bài 3. Tính các tổng sau:

$$\text{a) } S_3 = \sum_{0 \leq 2k < n+1} (-1)^k C_n^{2k}.$$

$$\text{b) } S_4 = \sum_{0 \leq 2k+1 < n+1} (-1)^k C_n^{2k+1}.$$

$$\text{c) } S_5 = \sum_{0 \leq 4k < n+1} C_n^{4k}$$

$$\text{d) } S_6 = \sum_{0 < 4k+1 < n+1} C_n^{4k+1}$$

 **Lời giải.**

$$\text{Xét } (1+i)^n = \left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

$$\text{Mà } (1+i)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k i^k = \sum_{0 \leq 2k < n+1} (-1)^k C_n^{2k} + \sum_{0 < 2k+1 < n+1} (-1)^k C_n^{2k+1} i$$

$$\text{Từ đó suy ra: } S_3 = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}, S_4 = 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}.$$

$$\text{Lại có } 2^n = (1+1)^n = \sum_{0 \leq k \leq n} C_n^k, 0 = (1-1)^n = \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k C_n^k, \text{ suy ra}$$

$$\sum_{0 \leq 2k \leq n+1} C_n^{2k} = \sum_{0 < 2k+1 < n+1} C_n^{2k+1} = 2^{n-1}.$$

$$S_5 = \frac{1}{2} (S_3 + \sum_{0 \leq 2k < n+1} C_n^{2k}) = \frac{1}{2} (2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}),$$

$$S_6 = \frac{1}{2} (S_4 + \sum_{0 < 2k+1 < n+1} C_n^{2k+1}) = \frac{1}{2} (2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}). \quad \square$$

Bài 4. Chứng minh rằng $2^{2m-1} \cos^{2m} x = \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \cos(2m-2k)x + \frac{1}{2} C_{2m}^m$.

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i \sin x \end{cases} \Rightarrow \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
 2^{2m} \cos^{2m} x &= (2 \cos x)^{2m} = (e^{ix} + e^{-ix})^{2m} \\
 &= \sum_{k=0}^{2m} C_{2m}^k (e^{ix})^k (e^{-ix})^{2m-k} = \sum_{k=0}^{2m} C_{2m}^k e^{2(k-m)ix} \\
 &= \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k e^{2(k-m)ix} + \sum_{k=m+1}^{2m} C_{2m}^k e^{2(k-m)ix} \\
 &= \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k e^{-2(m-k)ix} + \sum_{t=0}^{m-1} C_{2m}^{2m-t} e^{2(m-t)ix} + C_{2m}^m \\
 &= \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k e^{-2(m-k)ix} + \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^{2m-k} e^{2(m-k)ix} + C_{2m}^m \\
 &= \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k (e^{-2(m-k)ix} + e^{2(m-k)ix}) + C_{2m}^m = 2 \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \cdot \cos(2m-2k)x + C_{2m}^m
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } 2^{2m-1} \cos^{2m} x = \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \cos(2m-2k)x + \frac{1}{2} C_{2m}^m. \quad \square$$

Với cách làm tương tự như trên, ta cũng chứng minh được đẳng thức

$$2^{2n} \cos^{2n+1} x = \sum_{k=0}^n C_{2n+1}^k \cos(2n+1-2k)x.$$

Sử dụng công thức $2i \sin x = e^{ix} - e^{-ix}$ và biến đổi tương tự trên, ta chứng minh được các đẳng thức sau

$$\begin{aligned}
 2^{2n-1} \sin^{2n} x &= (-1)^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{2n}^k \cos(2n-2k)x + \frac{(-1)^n}{2} C_{2n}^n \right); \\
 2^{2n} \sin^{2n+1} x &= (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k C_{2n+1}^k \sin(2n+1-2k)x.
 \end{aligned}$$

Xin giới thiệu với bạn đọc hai bài toán có cấu trúc tương tự.

Bài 5. Chứng minh rằng

$$\sum_{0 < 2k < n+1} (-1)^k 2k C_n^{2k} = n(\sqrt{2})^{n-3} \sin(n-1) \frac{\pi}{4}.$$

Bài 6 (IMO 1974). Chứng minh rằng số $\sum_{k=0}^n C_{2n+1}^{2k+1} 2^{3k}$ không chia hết cho 5 với mọi số nguyên $n \geq 0$.

7.2. Sử dụng đa thức và số phức trong các bài toán đếm

Để tiện cho việc đọc nội dung tiếp theo, tác giả xin giới thiệu lại một số kiến thức về số phức và đa thức.

Bổ đề 1. Số $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ là một căn bậc n của 1. Khi đó tập hợp tất cả các căn bậc n của 1 là $\{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots, \varepsilon^{n-1}\}$.

Chứng minh. Xét phương trình $z^n - 1 = 0$. Ta có:

$$\varepsilon^n = \cos \frac{n \cdot 2\pi}{n} + i \sin \frac{n \cdot 2\pi}{n} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

Do đó ε là một căn bậc n của 1. Với mỗi $j = 0, 1, \dots, n-1$, ta có:

$$(\varepsilon^j)^n = \cos \frac{j \cdot n \cdot 2\pi}{n} + i \sin \frac{j \cdot n \cdot 2\pi}{n} = \cos 2\pi j + i \sin 2\pi j = 1$$

Nên 1 có n căn bậc n là $\{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots, \varepsilon^{n-1}\}$. Để ý rằng $\varepsilon^n = 1$.

Ngoài ra, biểu diễn hình học các căn bậc n với $n \geq 3$ của đơn vị là n đỉnh của n giác đều nội tiếp đường tròn lượng giác.

Bổ đề 2. Cho đa thức $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ và $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{k} + i \sin \frac{2\pi}{k}$ là căn bậc k của đơn vị. Gọi S là tổng các hệ số ứng với tất cả lũy thừa là bội của k , ta có:

$$S = \frac{1}{k} (f(1) + f(\varepsilon) + f(\varepsilon^2) + f(\varepsilon^3) + \dots + f(\varepsilon^{k-1})).$$

Chứng minh.

Ta có

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n.$$

$$f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

$$f(\varepsilon) = a_0 + a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + \dots + a_n \varepsilon^n,$$

$$f(\varepsilon^2) = a_0 + a_1 \varepsilon^2 + a_2 (\varepsilon^2)^2 + \dots + a_n (\varepsilon^2)^n,$$

$$f(\varepsilon^3) = a_0 + a_1 \varepsilon^3 + a_2 (\varepsilon^3)^2 + \dots + a_n (\varepsilon^3)^n,$$

...

$$f(\varepsilon^{k-1}) = a_0 + a_1 \varepsilon^{k-1} + a_2 (\varepsilon^{k-1})^2 + \dots + a_n (\varepsilon^{k-1})^n.$$

Với mỗi $i = \overline{0, n}$, gọi $A_i = 1 + \varepsilon^i + (\varepsilon^i)^2 + (\varepsilon^i)^3 + \dots + (\varepsilon^i)^{k-1}$.

Nếu i là bội của k thì $A_i = k$.

Nếu i không là bội của k thì

$$A_i = 1 + \varepsilon^i + (\varepsilon^i)^2 + (\varepsilon^i)^3 + \dots + (\varepsilon^i)^{k-1} = \frac{1 - (\varepsilon^i)^k}{1 - \varepsilon^i} = \frac{1 - (\varepsilon^k)^i}{1 - \varepsilon^i} = 0,$$

vì $\varepsilon^k = 1$. Do đó

$$f(1) + f(\varepsilon) + f(\varepsilon^2) + f(\varepsilon^3) + \dots + f(\varepsilon^{k-1}) = k \sum_{i=0}^n a_i = kS.$$

Từ đó ta được

$$S = \frac{1}{k} \left(f(1) + f(\varepsilon) + f(\varepsilon^2) + f(\varepsilon^3) + \dots + f(\varepsilon^{k-1}) \right).$$

Tiếp theo xin giới thiệu một bài toán quen thuộc, có thể giải bằng các phương pháp đếm thông thường, ở đây tác giả xin giới thiệu một cách làm sử dụng công cụ đa thức và số phức.

Bài 1. Có bao nhiêu số nguyên dương có 5 chữ số mà tổng các chữ số của nó là một số chẵn?

 **Lời giải.**

Gọi S là số nguyên dương có 5 chữ số mà tổng các chữ số của nó là một số chẵn. Xét đa thức

$$f(x) = (x + x^2 + \dots + x^9)(1 + x + x^2 + \dots + x^9)^4 = \sum_{a_1 \neq 0, a_2, a_3, a_4, a_5} x^{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5} = \sum_{k=1}^{45} c_k x^k.$$

Nhận xét rằng mỗi số hạng $x^{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}$ của $f(x)$ trong khai triển tương ứng với một số có 5 chữ số $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$. Do đó số các số nguyên dương có 5 chữ số mà tổng các chữ số của nó là một số chẵn là tổng các hệ số của các số hạng ứng với lũy thừa chẵn trong khai triển đa thức $f(x)$. Vậy áp dụng bổ đề ta được

$$S = \sum_{k=1}^{22} c_{2k} = \frac{1}{2} (f(\varepsilon) + f(\varepsilon^2)) = \frac{1}{2} (f(-1) + f(1)) = \frac{9 \cdot 10^4}{2} = 45\,000,$$

với ε là các căn bậc hai của 1. □

Bằng cách chọn các đa thức phù hợp, ta có thể giải một số bài toán sau:

Bài 2 (Chọn đội tuyển PTNK 2009). Tìm số tất cả các số có n chữ số lập từ các chữ số 3, 4, 5, 6 và chia hết cho 3.

 **Lời giải.**

Gọi c_n là số các số có n chữ số thỏa mãn đề bài. Gọi α là một nghiệm của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$. Khi đó $\alpha^3 = 1$ và $\alpha^{2k} + \alpha^k + 1 = 0$ nếu k không chia hết cho 3 và $\alpha^{2k} + \alpha^k + 1 = 3$ nếu $k \vdots 3$.

Xét đa thức $P(x) = (x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^n$ để thấy c_n chính bằng tổng các hệ số của các số mũ chia hết cho 3 trong khai triển của $P(x)$. Nói cách khác, nếu $P(x) = \sum_{k=0}^{6n} a_k x^k$ thì $c_n = \sum_{k=0}^{2n} a_{3k}$.

Mặt khác ta có

$$P(1) + P(\alpha) + P(\alpha^2) = \sum_{k=0}^{6n} a_k (1 + \alpha^k + \alpha^{2k}) = \sum_{k=0}^{2n} 3a_{3k}.$$

Do

$$P(1) = (1 + 1 + 1 + 1)^n = 4^n,$$

$$P(\alpha) = (\alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6)^n = (1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3)^n = (1 + \alpha + \alpha^2 + 1)^n = 1,$$

$$P(\alpha^2) = (\alpha^6 + \alpha^8 + \alpha^{10} + \alpha^{12})^n = (1 + \alpha^2 + \alpha + 1)^n = 1^n = 1,$$

$$\text{nên ta có } c_n = \sum_{k=0}^{2n} a_{3k} = \frac{1}{3} (P(1) + P(\alpha) + P(\alpha^2)) = \frac{4^n + 2}{3}.$$

□

Bài 3 (VMO 2015). Cho $k \in \mathbb{N}^*$. Tìm các số tự nhiên n không vượt quá 10^k thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

- i) n chia hết cho 3.
- ii) Tất cả các chữ số trong biểu diễn thập phân của n đều thuộc tập hợp $A = \{2, 0, 1, 5\}$.

Lời giải.

Vì 10^k không chia hết cho 3 nên ta chỉ cần xét các số từ 0 cho đến $99 \dots 9$ (k chữ số 9). Bổ sung các chữ số 0 vào trước nếu cần thiết, ta đưa về xét việc đếm các bộ dãy gồm $\overline{a_1 a_2 \dots a_k}$ với a_i thuộc $\{2, 0, 1, 5\}$. Ta cần đếm các số như vậy và chia hết cho 3.

Chú ý là $\overline{a_1 a_2 \dots a_k}$ chia hết cho 3 khi và chỉ khi $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ chia hết cho 3, ta đưa bài toán về việc đếm số các bộ $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in A^k$ sao cho $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ chia hết cho 3.

Tiếp theo, hoàn toàn tương tự như ở bài trên, xét đa thức:

$$P(x) = (x^2 + 1 + x + x^5)^k$$

Ta có

$$P(x) = (x^2 + x + 1 + x^5)^k = \sum_{(a_1, a_2, \dots, a_k) \in A^k} x^{a_1 + a_2 + \dots + a_k}$$

Tổng các hệ số của $P(x)$ bằng số các bộ $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in A^k$ và bằng 4^k . Hơn nữa số các bộ $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in A^k$ sao cho $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ bằng tổng các hệ số của các số mũ chia hết cho 3 trong $P(x)$.

Đặt $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$. Ta cần tính:

$$S = a_0 + a_3 + a_6 + \dots$$

Gọi ε là nghiệm của phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ thì ta có $\varepsilon^3 = 1$. Từ đó để đếm S ta xét $P(x)$ nhận giá trị bằng 0 với mọi k không chia hết cho 3 và bằng 3 với k chia hết cho 3. (*)

Ta có

$$P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

$$P(\varepsilon) = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3 + \dots$$

$$P(\varepsilon^2) = a_0 + a_1\varepsilon^2 + a_2\varepsilon^4 + a_3\varepsilon^6 + a_4\varepsilon^8 + \dots$$

Áp dụng tính chất $\varepsilon^3 = 1$, ta suy ra

$$P(1) + P(\varepsilon) + P(\varepsilon^2) = 3a_0 + 3a_3 + 3a_6 + \dots$$

Suy ra $S = \frac{P(1) + P(\varepsilon) + P(\varepsilon^2)}{3} = \frac{4^k + \varepsilon^{2k} + \varepsilon^{4k}}{3}$. Cuối cùng, lại áp dụng tính chất (*), ta suy ra

$$S = \frac{4^k - 1}{3} \text{ nếu } k \text{ không chia hết cho 3 và } S = \frac{4^k + 2}{3} \text{ nếu } k \text{ chia hết cho 3.} \quad \square$$

Bài 4 (IMO 1995). Cho p là một số nguyên tố lẻ, tìm số các tập con A của tập $\{1; 2; 3; \dots; 2p\}$ biết rằng

- i) A chứa đúng p phần tử.
- ii) Tổng các phần tử của A chia hết cho p .

Lời giải.

Xét đa thức $P(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$. Đa thức này có $(p-1)$ nghiệm phức phân biệt. Gọi α là một nghiệm bất kỳ của $P(x)$. Chú ý rằng $\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{p-1}$ là $p-1$ nghiệm phân biệt của $P(x)$ và $\alpha^p = 1$. Theo định lý Viet ta có

$$x^p - 1 = (x-1)(x-\alpha)(x-\alpha^2) \dots (x-\alpha^{p-1})$$

Xét đa thức $Q(x) = (x-\alpha)(x-\alpha^2) \dots (x-\alpha^{2p})$ và gọi

$$H = \{A \subset \{1, 2, \dots, 2p\} : |A| = p\}.$$

Giả sử $Q(x) = \sum_{k=0}^{2p} a_k x^k$ khi đó

$$a_p = - \sum_{A \in H} \alpha^{S(A)} \text{ với } S(A) = \sum_{x \in A} x.$$

Vì nếu $S(A) = j \pmod{p}$ thì $\alpha^{S(A)} = \alpha^j$ nên

$$a_p = \sum_{j=0}^{p-1} n_j \alpha^j,$$

trong đó n_j là số các $A \in H$ sao cho $S(A) = j \pmod{p}$. Mặt khác $Q(x) = (x^p - 1)^2$, suy ra $a_p = -2$.

Thành thử

$$\sum_{j=0}^{p-1} n_j \alpha^j = 2. \quad (*)$$

Xét đa thức $R(x) = \sum_{j=0}^{p-1} n_j x^j + n_0 - 2$. Từ đẳng thức $(*)$ suy ra α là một nghiệm của $R(x)$. Vì $\deg P(x) = \deg R(x)$ và α là một nghiệm bất kỳ của $P(x)$, nên $P(x)$ và $R(x)$ chỉ sai khác nhau hằng số nhân. Từ đó $n_{p-1} = n_{p-2} = \dots = n_1 = n_0 - 2$, suy ra

$$n_0 - 2 = \frac{n_{p-1} + n_{p-2} + \dots + n_1 + n_0 - 2}{p} = \frac{C_{2p}^p - 2}{p}.$$

Vậy số các tập con A của tập hợp $\{1; 2; 3 \dots, 2p\}$ thỏa mãn đề bài là $n_0 = 2 + \frac{C_{2p}^p - 2}{2}$. □

Khi làm việc với những tập con, tức tổ hợp không lặp thì mô hình những đa thức trên đây không sử dụng được nữa. Với bài toán sau, ta cần dùng đến một mô hình khác.

Bài 5. Cho $X = \{0, 1, \dots, 25\}$. Tìm số các tập con 7 phần tử có tổng các phần tử chia hết cho 19.

Lời giải.

Với mỗi tập con $A \subseteq X$, gọi $S(A)$ là tổng các phần tử của A . Ta cũng quy ước $S(\emptyset) = 0$. Với mỗi $i = 0, 1, \dots, 18$, đặt:

$$P(i) = \{A \subseteq X \text{ sao cho } |A| = 7 \text{ và } S(A) \equiv i \pmod{19}\}.$$

Ta cần tính $P(0)$. Gọi α là căn nguyên thủy bậc 19 của 1. Khi đó $1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{18} = 0$ và $x^{19} - 1 = (x - 1)(x - \alpha) \dots (x - \alpha^{18})$.

Xét đa thức $Q(x) = (x - 1)(x - \alpha)(x - \alpha^2) \dots (x - \alpha^{25})$. Ta tính hệ số của x^{19} trong $Q(x)$ bằng 2 cách. Một mặt, nếu khai triển $Q(x)$ thì để được x^{19} , ta cần lấy từ 19 dấu ngoặc, còn 7 dấu ngoặc khác sẽ lấy các số có dạng α^k với k thuộc $\{0, 1, \dots, 25\}$. Như thế ta sẽ có tổng các số có dạng $\alpha^{S(A)}$ với A chạy qua tất cả các tập con có 7 phần tử của X . Chú ý rằng $\alpha^{S(A)}$ chỉ phụ thuộc vào số dư khi chia $S(A)$ cho 19 (đó là lý do tại sao ta lấy căn bậc 19 của đơn vị) nên từ đây dễ dàng suy ra tổng nói trên bằng:

$$- [|P(0)| + P(1) \cdot \alpha + P(2) \cdot \alpha^2 + \dots + P(18) \cdot \alpha^{18}].$$

Mặt khác, $Q(x) = (x^{19} - 1)(x - 1) \dots (x - \alpha^6)$. Suy ra hệ số của x^{19} bằng $-1 \cdot \alpha^2 \dots \alpha^6 = -\alpha^2$. Từ đây suy ra

$$|P(0)| + |P(1)| \cdot \alpha + [|P(2)| - 1] \cdot \alpha^2 + \dots + |P(18)| \cdot \alpha^{18} = 0.$$

Điều này đúng với mọi α là nghiệm của phương trình:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{18} = 0.$$

Suy ra đa thức $|P(0)| + |P(1)| \cdot \alpha + [|P(2)| - 1] \cdot \alpha^2 + \dots + |P(18)| \cdot \alpha^{18}$ tỷ lệ với đa thức $1 + x + \dots + x^{18}$ và vì thế:

$$|P(0)| = |P(1)| = |P(2)| - 1 = \dots = |P(18)|.$$

Như vậy, tất cả các $|P(i)|, i \neq 2$, bằng nhau và bằng $\frac{C_{19}^7 - 1}{19}$. Riêng $|P(2)|$ lớn hơn đúng 1 đơn vị!

Vậy đáp số là $\frac{C_{19}^7 - 1}{19}$. □

8. Kết luận

Trong chuyên đề “Một số phương pháp đếm trong các bài toán tổ hợp” chúng tôi đã đưa ra ứng dụng quan trọng nhất của một số phương pháp đếm trong tổ hợp như đếm bằng xây dựng mô hình, đếm bằng hai cách, đếm bằng quan hệ truy hồi, đếm bằng ánh xạ, đếm bằng số phức. Chuyên đề có hệ thống khá đầy đủ, chi tiết các phương pháp và cách thức áp dụng các phương pháp trên cũng như các kiến thức cơ sở liên quan của từng phương pháp. Chuyên đề này chúng tôi cũng đã cố gắng cập nhật và tổng hợp những bài toán mới trong các kì thi Olympic của các nước, khu vực và quốc tế có sử dụng một số phương pháp đã trình bày ở trên. Hệ thống các bài tập đưa ra theo thứ tự tăng dần độ khó để giúp các em học sinh thấy được nét đặc trưng riêng của từng phương pháp đếm, từ đó các em học sinh có thể sử dụng chúng một cách linh hoạt trong từng bài toán cụ thể. Chúng tôi hy vọng chuyên đề “Một số phương pháp đếm trong các bài toán tổ hợp” này sẽ góp một phần nhỏ vào quá trình giảng dạy phần tổ hợp và rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của quý thầy cô cũng như các em học sinh để chuyên đề ngày càng được hoàn thiện hơn.

9. Tài liệu tham khảo

1. Lê Hồng Đức, Lê Bích Ngọc, Lê Hữu Trí, *Phương pháp giải toán tổ hợp*, Nhà xuất bản Hà Nội, 2003.
2. Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Doan, Nguyễn Xuân Liêm, Nguyễn Khắc Minh, Đặng Hùng Thắng, *Đại số và giải tích 11 nâng cao*, Nhà xuất bản giáo dục, 2007.
3. Hà Huy Khoái (Tổng biên tập), *Tạp chí Pi*, Hội toán học Việt Nam, 2017-2024.
4. Diễn đàn <https://artofproblemsolving.com/community>