

BÀI GIẢNG NHỊ THỨC NIU-TON

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Biết công thức khai triển nhị thức Niu-ton.
- + Biết tính chất các số hạng.

❖ Kỹ năng

- + Thành thạo khai triển nhị thức Niu-ton, tìm số hạng, hệ số chứa x^α trong khai triển.
- + Tính tổng dựa vào khai triển nhị thức Niu-ton.

hàng.

- Các số ở hàng thứ n trong tam giác Pascal là dãy

gồm $(n+1)$ số $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}, C_n^n$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Xác định các hệ số, số hạng trong khai triển nhị thức Niu-tơn

Bài toán 1: Tìm hệ số của số hạng chứa x^m trong khai triển $(ax^p + bx^q)^n$

Phương pháp giải

Xét khai triển:

$$\begin{aligned}(ax^p + bx^q)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k (ax^p)^{n-k} \cdot (bx^q)^k \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} \cdot b^k x^{np-pk+qk}.\end{aligned}$$

Số hạng chứa x^m ứng với giá trị k thỏa mãn

$$np - pk + qk = m \Rightarrow k = \frac{m - np}{q - p}.$$

Vậy hệ số của số hạng chứa x^m là $C_n^k a^{n-k} \cdot b^k$ với

$$\text{giá trị } k = \frac{m - np}{q - p}.$$

Nếu k không nguyên hoặc $k > n$ thì trong khai triển không chứa x^m , hệ số phải tìm bằng 0.

Lưu ý: Tìm số hạng không chứa x thì ta đi tìm giá trị k thỏa $np - pk + qk = 0$.

Ví dụ: Cho khai triển $(2x+1)^{10}$.

a) Tìm hệ số của x^5 trong khai triển trên.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } (2x+1)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot (2x)^k = \sum_{k=0}^{10} 2^k C_{10}^k \cdot x^k.$$

Số hạng chứa x^5 ứng với $k = 5$.

Hệ số cần tìm là $C_{10}^5 \cdot 2^5 = 8064$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Niu-tơn **Chú ý:**

$$\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^{21} \quad (x \neq 0).$$

Hướng dẫn giải

Ta có số hạng tổng quát là

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n};$$

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n};$$

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n};$$

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k = C_{21}^k x^{21-k} \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right)^k = (-2)^k C_{21}^k x^{21-3k}.$$

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}.$$

Số hạng không chứa x ứng với $21-3k=0 \Leftrightarrow k=7$.

Vậy hệ số cần tìm là $-2^7 C_{21}^7$.

Ví dụ 2. Tìm hệ số của số hạng chứa x^6 trong khai triển $x^3(1-x)^8$

Hướng dẫn giải

Số hạng tổng quát của khai triển là $x^3 \cdot C_8^k (-x)^k = C_8^k (-1)^k x^{k+3}$.

Số hạng chứa x^6 khi $k+3=6 \Leftrightarrow k=3$.

Vậy hệ số cần tìm là $C_8^3 (-1)^3 = -56$.

Ví dụ 3. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2\sqrt[3]{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^{10}, x > 0$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\left(2\sqrt[3]{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^{10} = \left(2x^{\frac{1}{3}} - 3x^{-\frac{1}{2}}\right)^{10}$.

Số hạng tổng quát trong khai triển là

$$C_{10}^k \left(2x^{\frac{1}{3}}\right)^{10-k} \cdot \left(-3x^{-\frac{1}{2}}\right)^k = (-1)^k \cdot 2^{10-k} \cdot 3^k \cdot x^{\frac{10-k}{3}} \cdot x^{-\frac{k}{2}} = (-1)^k C_{10}^k \cdot 2^{10-k} \cdot 3^k \cdot x^{\frac{20-5k}{6}}.$$

Số hạng không chứa x ứng với $20-5k=0 \Leftrightarrow k=4$

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là

$$(-1)^4 C_{10}^4 \cdot 2^6 \cdot 3^4 = 210 \cdot 64 \cdot 81 = 1088640.$$

Bài toán 2: Tìm hệ số của số hạng trong khai triển $P(x) = (ax^t + bx^p + cx^q)^n$

 **Phương pháp giải**

Ta có khai triển: $P(x) = (ax^t + bx^p + cx^q)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (ax^t)^{n-k} (bx^p + cx^q)^k$

trong đó $(bx^p + cx^q)^k = \sum_{i=0}^k C_k^i (bx^p)^{k-i} (cx^q)^i = \sum_{i=0}^k C_k^i b^{k-i} c^i x^{p(k-i)+qi}$.

Suy ra $P(x) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k C_n^k a^{n-k} x^{t(n-k)} C_k^i b^{k-i} c^i x^{p(k-i)+qi} = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k C_n^k C_k^i a^{n-k} b^{k-i} c^i x^{t(n-k)+p(k-i)+qi}$.

Suy ra số hạng tổng quát của khai triển là $C_n^k C_k^i a^{n-k} b^{k-i} c^i x^{t(n-k)+p(k-i)+qi}$.

Từ số hạng tổng quát của khai triển trên, ta tính được hệ số của x^m .

 **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1. Tìm hệ số của số hạng chứa x^2 trong khai triển $P(x) = (x^2 + x + 1)^{10}$.

Chú ý: Phân biệt giữa hệ số và số hạng.

Với $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{g(k)}$; số

hạng chứa x^α tương ứng

với $g(k) = \alpha$; giải

phương trình ta tìm được

k .

* Nếu $k \in \mathbb{N}; k \leq n$ thì hệ

số phải tìm là a_k . số

hạng phải tìm là $a_k \cdot x^k$.

* Nếu $k \notin \mathbb{N}$ hoặc $k > n$

thì trong khai triển không

có số hạng của x^α , hệ số

phải tìm bằng 0.

Hướng dẫn giải

Với $0 \leq q \leq p \leq 10$ thì số hạng tổng quát của khai triển $P(x) = (x^2 + x + 1)^{10}$ là

$$T_p = C_{10}^p \cdot C_p^q \cdot (x^2)^{10-p} \cdot x^{p-q} \cdot 1^q = C_{10}^p \cdot C_p^q \cdot x^{p-q+20-2p}.$$

Theo đề bài thì $p - q + 20 - 2p = 2 \Leftrightarrow p + q = 18$.

Do $0 \leq q \leq p \leq 10$ nên $(p; q) \in \{(9; 9); (10; 8)\}$.

Vậy hệ số của x^2 trong khai triển $P(x) = (x^2 + x + 1)^{10}$ là $C_{10}^9 \cdot C_9^9 + C_{10}^{10} \cdot C_{10}^8 = 55$.

Ví dụ 2. Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển

$$(1 - 2x + 2015x^{2016} - 2016x^{2017} + 2017x^{2018})^{60}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $(1 - 2x + 2015x^{2016} - 2016x^{2017} + 2017x^{2018})^{60}$

$$= \left[(1 - 2x) + x^{2016} (2015 - 2016x + 2017x^2) \right]^{60}$$

$$= C_{60}^0 (1 - 2x)^{60} + C_{60}^1 (1 - 2x)^{59} \left[x^{2016} (2015 - 2016x + 2017x^2) \right] + \dots + C_{60}^{60} \left[x^{2016} (2015 - 2016x + 2017x^2) \right]^{60}$$

Ta thấy chỉ có số hạng $C_{60}^0 (1 - 2x)^{60}$ chứa x^3 nên hệ số của số hạng chứa x^3 là $C_{60}^0 \cdot C_{60}^3 (-2)^3 = -8C_{60}^3$.

Bài toán 3: Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển nhị thức Niu-tơn

🔗 Phương pháp giải

Ví dụ: Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển đa thức

$$P(x) = (x + 1)^{10}.$$

Hướng dẫn giải

Bước 1: Tính hệ số a_k theo k và n . Giả sử sau khi khai triển ta được đa thức:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

$$\text{Ta có } (x + 1)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot x^k.$$

Ta có hệ số của số hạng tổng quát sau khi khai triển nhị thức $(x + 1)^{10}$ là $a_k = C_{10}^k$.

Suy ra $a_{k-1} = C_{10}^{k-1}, k = 1; 2; 3; \dots; 10$.

Bước 2: Giả sử a_k là hệ số lớn nhất trong các hệ số $a_0, a_1, \dots, a_n$. Khi đó ta có
$$\begin{cases} a_k \geq a_{k+1} \\ a_k \geq a_{k-1} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình với ẩn số k .

Giả sử a_k là hệ số lớn nhất trong các hệ số $a_0, a_1, \dots, a_{10}$. Khi đó ta có
$$\begin{cases} a_k \geq a_{k+1} \\ a_k \geq a_{k-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_{10}^k \geq C_{10}^{k+1} \\ C_{10}^{k-1} \leq C_{10}^k \end{cases} \Leftrightarrow \frac{9}{2} \leq k \leq \frac{11}{2} \Rightarrow k = 5.$$

Từ đây ta có hệ số lớn nhất trong khai triển nhị thức là $a_5 = C_{10}^5 = 252$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển đa thức

$$P(x) = (2x+1)^{13} = a_0x^{13} + a_1x^{12} + \dots + a_{13}$$

Hướng dẫn giải

Ta có hệ số của số hạng tổng quát sau khi khai triển nhị thức $(2x+1)^{13}$ là

$$a_k = C_{13}^k \cdot 2^{13-k} \text{ với } k = 1; 2; 3; \dots; 13$$

Giả sử a_k là hệ số lớn nhất trong các hệ số $a_0, a_1, \dots, a_{13}$.

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} a_k \geq a_{k+1} \\ a_k \geq a_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{13}^k \cdot 2^{13-k} \geq C_{13}^{k+1} \cdot 2^{12-k} \\ C_{13}^{k-1} \cdot 2^{14-k} \leq C_{13}^k \cdot 2^{13-k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \frac{11}{3} \\ k \leq \frac{14}{3} \end{cases} \Rightarrow k = 4.$$

Từ đây ta có hệ số có giá trị lớn nhất trong khai triển nhị thức là

$$a_4 = C_{13}^4 \cdot 2^9 = 366080.$$

Ví dụ 2. Cho khai triển biểu thức $(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})^9$. Tìm số hạng nguyên có giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Số hạng tổng quát trong khai triển là $T_k = C_9^k (\sqrt{3})^{9-k} (\sqrt[3]{2})^k$.

Vì bậc của căn thức là 2 và 3 là hai số nguyên tố nên để T_k là một số nguyên thì

$$\begin{cases} k \in \mathbb{N} \\ 0 \leq k \leq 9 \\ (9-k):2 \\ k:3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=3 \Rightarrow T_3 = C_9^3 (\sqrt{3})^6 (\sqrt[3]{2})^3 = 4536 \\ k=9 \Rightarrow T_9 = C_9^9 (\sqrt{3})^0 (\sqrt[3]{2})^9 = 8. \end{cases}$$

Dễ thấy $4536 > 8$ nên trong khai triển số hạng nguyên có giá trị lớn nhất là $T_3 = 4536$.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Hệ số của x^5 trong khai triển $P(x) = (x+1)^6 + (x+1)^7 + \dots + (x+1)^{12}$ là

- A. 1715. B. 1711. C. 1287. D. 1716.

Câu 2: Trong khai triển $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$, hệ số của x^3 với $x > 0$ là

- A. 60. B. 80. C. 160. D. 240.

Câu 3: Hệ số của x^7 trong khai triển $(3-2x)^{15}$ là

- A. $C_{15}^7 \cdot 3^8 \cdot 2^7$. B. $-C_{15}^7 \cdot 3^7 \cdot 2^8$. C. $-C_{15}^7 \cdot 3^8 \cdot 2^7$. D. $C_{15}^7 \cdot 3^7 \cdot 2^8$.

Câu 4: Hệ số của x^5 trong triển khai thành đa thức $(2x-3)^8$ là

A. $C_8^5 \cdot 2^5 \cdot 3^3$.

B. $-C_8^3 \cdot 2^5 \cdot 3^3$.

C. $-C_8^3 \cdot 2^3 \cdot 3^5$.

D. $C_8^5 \cdot 2^2 \cdot 3^6$.

Câu 5: Trong khai triển biểu thức $(x-y)^{20}$, hệ số của số hạng chứa $x^{12}y^8$ là

A. 77520.

B. -125970.

C. 125970.

D. -77520.

Câu 6: Hệ số của x^5 trong khai triển $x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$ là

A. 61204.

B. 3160.

C. 3320.

D. 61268.

Câu 7: Hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển $P(x) = (3x^2 + x + 1)^{10}$ là

A. 1695.

B. 1485.

C. 405.

D. 360.

Câu 8: Khai triển $(\sqrt{5} - \sqrt[4]{7})^{124}$. Có bao nhiêu số hạng hữu tỉ trong khai triển trên?

A. 30.

B. 31.

C. 32.

D. 33.

1 – A	2 – A	3 – C	4 – B	5 – C	6 – C	7 – A	8 – C		
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	--	--

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

Xét khai triển $(x+1)^6$ thấy ngay số hạng chứa x^5 có hệ số là C_6^1 .

Tương tự các khai triển còn lại ta lần lượt có hệ số của x^5 là $C_7^2, C_8^3, \dots, C_{12}^7$.

Do đó hệ số cần tìm là $C_6^1 + C_7^2 + \dots + C_{12}^7 = 1715$.

Câu 2.

Số hạng tổng quát của khai triển: $T_{k+1} = C_6^k x^{6-k} \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k = C_6^k 2^k x^{6-\frac{3}{2}k}$.

Số hạng chứa x^3 ứng với $6 - \frac{3}{2}k = 3 \Leftrightarrow k = 2$.

Vậy hệ số của x^3 là $C_6^2 \cdot 2^2 = 60$.

Câu 3.

Công thức số hạng tổng quát của khai triển nhị thức Niu-tơn $(3-2x)^{15}$ là

$$T_{k+1} = C_{15}^k \cdot 3^{15-k} \cdot (-2x)^k = (-1)^k C_{15}^k 3^{15-k} 2^k x^k$$

Để số hạng chứa x^7 thì $k = 7$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^7 là $-C_{15}^7 3^8 2^7$.

Câu 4.

Ta có khai triển $(2x-3)^8 = \sum_{k=0}^8 C_8^k \cdot 2^{8-k} \cdot x^{8-k} \cdot (-3)^k$

Số hạng chứa x^5 ứng với $8-k = 5 \Leftrightarrow k = 3$.

Hệ số cần tìm là $C_8^3 \cdot 2^{8-3} \cdot (-3)^3 = -C_8^3 \cdot 2^5 \cdot 3^3$.

Câu 5.

Ta có khai triển $(x-y)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k x^{20-k} y^k \cdot (-1)^k$.

Ứng với số hạng chứa $x^{12}y^8$ thì $\begin{cases} 20-k=12 \\ k=8 \end{cases} \Leftrightarrow k=8$.

Vậy hệ số của số hạng chứa $x^{12}y^8$ là $(-1)^8 \cdot C_{20}^8 = 125970$.

Câu 6.

Hệ số của x^5 trong khai triển $x(1-2x)^5$ là $(-2)^4 \cdot C_5^4$.

Hệ số của x^5 trong khai triển $x^2(1+3x)^{10}$ là $3^3 \cdot C_{10}^3$.

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển $x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$ là $(-2)^4 \cdot C_5^4 + 3^3 \cdot C_{10}^3 = 3320$.

Câu 7.

Với $0 \leq q \leq p \leq 10$ thì số hạng tổng quát của khai triển $P(x) = (3x^2 + x + 1)^{10}$ là

$$T_p = C_{10}^p \cdot C_p^q \cdot (3x^2)^{10-p} \cdot x^{p-q} \cdot 1^q = C_{10}^p \cdot C_p^q \cdot 3^{10-p} \cdot x^{p-q+20-2p}.$$

Theo đề bài ta có $p-q+20-2p=4 \Leftrightarrow p+q=16$.

Do $0 \leq q \leq p \leq 10$ nên $(p; q) \in \{(8; 8); (9; 7); (10; 6)\}$.

Vậy hệ số của x^4 trong khai triển $P(x) = (3x^2 + x + 1)^{10}$ là

$$C_{10}^8 \cdot C_8^8 \cdot 3^{10-8} + C_{10}^9 \cdot C_9^7 \cdot 3^{10-9} + C_{10}^{10} \cdot C_{10}^6 \cdot 3^{10-10} = 1695.$$

Câu 8.

Ta có $(\sqrt{5} - \sqrt[4]{7})^{124} = \sum_{k=0}^{124} C_{124}^k \cdot (-1)^k \cdot 5^{\frac{124-k}{2}} \cdot 7^{\frac{k}{4}}$

Số hạng hữu tỉ trong khai triển tương ứng với $\begin{cases} \frac{124-k}{2} \in \mathbb{Z} \\ \frac{k}{4} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow k \in \{0; 4; 8; 12; \dots; 124\}$.

Vậy số các giá trị k là $\frac{124-0}{4} + 1 = 32$.

Dạng 2: Xác định điều kiện của số hạng thỏa mãn yêu cầu cho trước**🔧 Phương pháp giải**

- Xác định số hạng tổng quát của khai triển $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ (số hạng thứ $k+1$).
- Kết hợp với yêu cầu bài toán, ta thiết lập một phương trình biến k .
- Giải phương trình để tìm kết quả.

🔧 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho x là số thực dương. Khai triển Niu-tơn của biểu thức $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{12}$ ta có hệ số của một số hạng chứa x^m bằng 495. Tìm tất cả các giá trị m .

Hướng dẫn giải

Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là

$$C_{12}^k (x^2)^{12-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k = C_{12}^k \cdot x^{24-2k} \cdot x^{-k} = C_{12}^k \cdot x^{24-3k}.$$

$$\text{Hệ số của số hạng } x^m \text{ là 495 nên } C_{12}^k = 495 \Leftrightarrow \frac{12!}{k!(12-k)!} = 495 \Leftrightarrow \begin{cases} k=4 \\ k=8. \end{cases}$$

Khi đó $m = 24 - 3k$ sẽ có 2 giá trị là $m = 0$ và $m = 12$.

Ví dụ 2. Tìm số nguyên dương bé nhất n sao cho trong khai triển $(1+x)^n$ có hai hệ số liên tiếp có tỉ số là $\frac{7}{15}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^k x^k + C_n^{k+1} x^{k+1} + \dots + C_n^n x^n$.

$$\frac{C_n^k}{C_n^{k+1}} = \frac{7}{15} \Leftrightarrow \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(k+1)!(n-k-1)!}{n!} = \frac{7}{15} \Leftrightarrow \frac{k+1}{n-k} = \frac{7}{15}.$$

$$\Rightarrow 15(k+1) = 7(n-k) \Leftrightarrow 7n = 15 + 22k \Leftrightarrow 7n = 7(3k+2) + k + 1.$$

Vì $k; n \in \mathbb{N}$ nên ta có $k+1:7 \Rightarrow k_{\min} = 6 \Rightarrow n_{\min} = 21$.

 Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Tìm tất cả các số a sao cho trong khai triển của $(1+ax)(1+x)^4$ có chứa số hạng $22x^3$.

- A. $a = 5$. B. $a = -3$. C. $a = 3$. D. $a = 2$.

Câu 2: Biết rằng hệ số của x^{n-2} trong khai triển $\left(x - \frac{1}{4}\right)^n$ bằng 31. Tìm n .

- A. $n = 32$. B. $n = 30$. C. $n = 31$. D. $n = 33$.

Câu 3: Xét khai triển $(1+3x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ với $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$. Giả sử $a_1 = 27$, khi đó a_2 bằng

- A. 1053. B. 243. C. 324. D. 351.

Câu 4: Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^n$ biết $A_n^2 - C_n^2 = 105$ là

- A. -3003. B. -5005. C. 5005. D. 3003.

Câu 5: Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $A_n^2 = C_n^2 + C_n^1 + 4n + 6$. Hệ số của số hạng chứa x^9 của khai triển biểu thức $P(x) = \left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^n, x \neq 0$ bằng

A. 18564.

B. 64152.

C. 192456.

D. 194265.

Câu 6: Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $5C_n^{n-1} = C_n^3$. Số hạng chứa x^5 trong khai triển nhị thức Niu-

ton $P = \left(\frac{nx^2}{14} - \frac{1}{x} \right)^n$ với $x \neq 0$ là

A. $-\frac{35}{16}$.

B. $-\frac{16}{35}$.

C. $-\frac{35}{16}x^5$.

D. $-\frac{16}{35}x^5$.

Câu 7: Số hạng không chứa x trong khai triển của $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4} \right)^n$ với $x > 0$ nếu biết rằng $C_n^2 - C_n^1 = 44$ là

A. 165.

B. 238.

C. 485.

D. 525.

1 – C	2 – A	3 – C	4 – D	5 – C	6 – C	7 – A			
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	--	--	--

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

Ta có $(1+ax)(1+x)^4 = (1+x)^4 + ax(1+x)^4$.

Xét khai triển $(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$.

Suy ra số hạng chứa x^3 là $4x^3$.

Xét khai triển $ax(x+1)^4 = ax(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) = ax^5 + 4ax^4 + 6ax^3 + 4ax^2 + ax$.

Suy ra số hạng chứa x^3 là $6ax^3$.

Suy ra số hạng chứa x^3 trong cả khai triển là $(6a+4)x^3$.

Theo đề ra, ta có $6a+4 = 22 \Leftrightarrow a = 3$.

Câu 2.

Áp dụng công thức nhị thức Niu-ton, ta có $\left(x - \frac{1}{4} \right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} \left(-\frac{1}{4} \right)^k$.

Hệ số của x^{n-2} nên ta có $x^{n-2} = x^{n-k} \Leftrightarrow k = 2$.

Ta có $C_n^2 \left(-\frac{1}{4} \right)^2 = 31 \Leftrightarrow C_n^2 = 492 \Leftrightarrow n = 32$.

Vậy $n = 32$.

Câu 3.

Ta có: $(1+3x)^n = \sum_{k=1}^n C_n^k (3x)^k = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$.

Theo giả thiết: $a_1 = 27 \Leftrightarrow C_n^1 3^1 = 27 \Leftrightarrow C_n^1 = 9 \Leftrightarrow n = 9$.

Suy ra $a_2 = C_9^2 3^2 = 324$.

Câu 4.

Ta có: $A_n^2 - C_n^2 = 105 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} - \frac{n!}{2!(n-2)!} = 105$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}n(n-1) = 105 \Leftrightarrow n^2 - n - 210 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 15 \\ n = -14 \end{cases} \Rightarrow n = 15.$$

Suy ra số hạng tổng quát trong khai triển là $T_{k+1} = C_{15}^k \cdot (x^2)^{15-k} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^k = C_{15}^k \cdot (-1)^k \cdot x^{30-3k}$.

Số hạng không chứa x ứng với $30 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 10$.

Vậy hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển là $C_{15}^{10} \cdot (-1)^{10} = 3003$.

Câu 5.

Với $n \geq 2$, ta có:

$$A_n^2 = C_n^2 + C_n^1 + 4n + 6 \Leftrightarrow n(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} + n + 4n + 6$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 11n - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -1 \\ n = 12 \end{cases} \Rightarrow n = 12.$$

Với $n = 12$ ta có khai triển: $P(x) = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot (x^2)^{12-k} \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot 3^k \cdot x^{24-3k}$.

Số hạng chứa x^9 ứng với $24 - 3k = 9 \Leftrightarrow k = 5$.

Vậy hệ số cần tìm là $3^5 C_{12}^5 = 192456$.

Câu 6.

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

$$\text{Ta có } 5C_n^{n-1} = C_n^3 \Leftrightarrow \frac{5 \cdot n!}{1! \cdot (n-1)!} = \frac{n!}{3! \cdot (n-3)!} \Leftrightarrow \frac{5}{(n-3)!(n-2)(n-1)} = \frac{1}{6 \cdot (n-3)!}$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 28 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 7 \\ n = -4 \end{cases} \Rightarrow n = 7.$$

Với $n = 7$, ta có $P = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}\right)^7$.

Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là $T_{k+1} = \frac{(-1)^k}{2^{7-k}} \cdot C_7^k \cdot x^{14-3k}$.

Số hạng chứa x^5 ứng với $14 - 3k = 5 \Leftrightarrow k = 3$.

Vậy số hạng chứa x^5 trong khai triển là $\frac{(-1)^3}{2^4} C_7^3 x^5 = -\frac{35}{16} x^5$.

Câu 7.

$$\text{Với } n \geq 2 \text{ ta có: } C_n^2 - C_n^1 = 44 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 44 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 11 \\ n = -8 \end{cases} \Rightarrow n = 11.$$

Với $n = 11$ ta có khai triển: $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^{11} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k \cdot (x\sqrt{x})^{11-k} \cdot \left(\frac{1}{x^4}\right)^k = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k \cdot x^{\frac{33-11k}{2}}$,

Số hạng không chứa x ứng với $\frac{33-11k}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 3$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển đã cho là $C_{11}^3 = 165$.

Dạng 3: Tính tổng dựa vào nhị thức Niu-ơn

Phương pháp giải

Các dạng khai triển nhị thức Niu-ơn thường gặp:

$$(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \dots + C_n^k x^{n-k} + \dots + C_n^{n-1} x + C_n^n.$$

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^k x^k + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n.$$

$$(x-1)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} - \dots + (-1)^k C_n^k x^{n-k} + \dots + C_n^{n-1} x(-1)^{n-1} + C_n^n (-1)^n.$$

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n.$$

$$0^n = (1-1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n$$

Một số kết quả thường sử dụng:

$$C_n^k = C_n^{n-k};$$

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}, n > 1;$$

$$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1};$$

$$\frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{k+1};$$

$$(k-1)kC_n^k = (n-1)nC_{n-1}^{k-1};$$

$$k^2 C_n^k = (n-1)nC_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1};$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n;$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0;$$

$$\sum_{k=0}^n C_{2n}^{2k} = \sum_{k=0}^n C_{2n}^{2k-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n C_{2n}^k;$$

$$\sum_{k=0}^n C_n^k a^k = (1+a)^n;$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tính tổng $S = C_{2020}^0 + C_{2020}^2 + C_{2020}^4 + \dots + C_{2020}^{2020}$.

Hướng dẫn giải

Xét khai triển $(1+x)^n = C_n^0 + x.C_n^1 + x^2.C_n^2 + \dots + x^n.C_n^n$ (*)

Thay $x = 1; n = 2020$ vào (*), ta được: $2^{2020} = C_{2020}^0 + C_{2020}^1 + C_{2020}^2 + \dots + C_{2020}^{2020}$ (1).

Thay $x = -1; n = 2020$ vào (*), ta được $0 = C_{2020}^0 - C_{2020}^1 + C_{2020}^2 - \dots + C_{2020}^{2020}$ (2).

Cộng theo vế (1) và (2) ta được: $2S = 2^{2020} \Rightarrow S = 2^{2019}$.

Ví dụ 2. Cho khai triển nhị thức Niu-tơn của $(2-3x)^{2n}$, biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển trên.

Hướng dẫn giải

Ta có khai triển $(1+x)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 x + C_{2n+1}^2 x^2 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1}$. (*)

Thay $x=1$ vào (*) ta được $2^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}$. (1)

Thay $x=-1$ vào (*) ta được $0 = C_{2n+1}^0 - C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 - \dots - C_{2n+1}^{2n+1}$. (2)

Trừ vế theo vế (1) cho (2), ta được $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 2^{2n}$.

Từ giả thiết ta có: $1024 = 2^{2n} \Leftrightarrow n = 5$.

Suy ra $(2-3x)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot (-3)^k \cdot 2^{10-k} \cdot x^k$.

Hệ số của x^7 trong khai triển là $C_{10}^7 \cdot (-3)^7 \cdot 2^3 = -8 \cdot 3^7 \cdot C_{10}^7$.

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1: Đặt $S = C_{2017}^1 + C_{2017}^2 + \dots + C_{2017}^{2017}$. Khi đó giá trị S là

- A. 2^{2018} . B. 2^{2017} . C. $2^{2017} - 1$. D. 2^{2016} .

Câu 2: Tính tổng $S = C_{10}^0 + 2.C_{10}^1 + 2^2.C_{10}^2 + \dots + 2^{10}.C_{10}^{10}$.

- A. $S = 2^{10}$. B. $S = 4^{10}$. C. $S = 3^{10}$. D. $S = 3^{11}$.

Câu 3: Cho $S = C_{15}^8 + C_{15}^9 + C_{15}^{10} + \dots + C_{15}^{15}$. Tính S .

- A. $S = 2^{15}$. B. $S = 2^{14}$. C. $S = 2^{13}$. D. $S = 2^{12}$.

Câu 4: Cho $A = C_n^0 + 5C_n^1 + 5^2 C_n^2 + \dots + 5^n C_n^n$. Khi đó

- A. $A = 7^n$. B. $A = 5^n$. C. $A = 6^n$. D. $A = 4^n$.

Câu 5: Cho khai triển $(1+x+x^2)^{1009} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2018} x^{2018}$. Khi đó $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2018}$ bằng

- A. 3^{1009} . B. 3^{1008} . C. 3^{2018} . D. 3^{2016} .

Câu 6: Giá trị của tổng $S = C_{2017}^0 + \frac{1}{2} C_{2017}^1 + \frac{1}{3} C_{2017}^2 + \dots + \frac{1}{2018} C_{2017}^{2017}$ bằng

- A. $\frac{2^{2017} - 1}{2017}$. B. $\frac{2^{2018} - 1}{2018}$. C. $\frac{2^{2018} - 1}{2017}$. D. $\frac{2^{2017} - 1}{2018}$.

Câu 7: Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 2048$. Hệ số của x^{10} trong khai triển $(x+2)^n$ là

- A. 11264. B. 22. C. 220. D. 24.

Câu 8: Cho khai triển $(x-2)^{80} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{80} x^{80}$.

Tổng $S = 1.a_1 + 2.a_2 + 3.a_3 + \dots + 80.a_{80}$ là

- A. -70. B. 80. C. 70. D. -80.

Câu 9: Hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức Niu-ơn của $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^n$, biết

$$C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1 \text{ là}$$

A. 210.

B. 213.

C. 414.

D. 213.

Câu 10: Đặt $S = C_{2018}^0 - C_{2018}^1 + C_{2018}^2 - C_{2018}^3 + \dots + C_{2018}^{2018}$. Khi đó:

A. $S = 0$.

B. $S = 2^{2018} - 1$.

C. $S = -1$.

D. $S = 2^{2018} + 1$.

1 – C	2 – C	3 – B	4 – C	5 – A	6 – B	7 – B	8 – D	9 – A	10 – A
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	--------

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

Ta có khai triển $(1+x)^{2017} = C_{2017}^0 + C_{2017}^1 x + C_{2017}^2 x^2 + \dots + C_{2017}^k x^k + \dots + C_{2017}^{2017} x^{2017}$.

Thay $x=1$ ta được $2^{2017} = C_{2017}^0 + C_{2017}^1 + C_{2017}^2 + \dots + C_{2017}^k + \dots + C_{2017}^{2017}$.

Suy ra $2^{2017} = 1 + S \Rightarrow S = 2^{2017} - 1$.

Ghi chú: Trong trắc nghiệm ta khai triển $(1+1)^{2017}$ thì được

$$2^{2017} = C_{2017}^0 + C_{2017}^1 + C_{2017}^2 + \dots + C_{2017}^k + \dots + C_{2017}^{2017}. \text{ Suy ra } S = 2^{2017} - 1.$$

Câu 2.

Xét khai triển nhị thức $(x+2)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{10-k} 2^k = C_{10}^0 x^{10} + 2C_{10}^1 x^9 + 2^2 C_{10}^2 x^8 + \dots + 2^{10} C_{10}^{10}$.

Cho $x=1$, ta được $3^{10} = (1+2)^{10} = C_{10}^0 + 2C_{10}^1 + 2^2 C_{10}^2 x^8 + \dots + 2^{10} C_{10}^{10}$.

Câu 3.

Sử dụng đẳng thức $C_n^k = C_n^{n-k}$ ta được:

$$S = C_{15}^8 + C_{15}^9 + C_{15}^{10} + \dots + C_{15}^{15} = C_{15}^7 + C_{15}^6 + C_{15}^5 + \dots + C_{15}^0.$$

$$\Rightarrow 2S = (C_{15}^8 + C_{15}^9 + C_{15}^{10} + \dots + C_{15}^{15}) + (C_{15}^7 + C_{15}^6 + C_{15}^5 + \dots + C_{15}^0) = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k = 2^{15}$$

$$\Rightarrow S = 2^{14}.$$

$$\text{Vậy } S = (C_{15}^8 + C_{15}^9 + C_{15}^{10} + \dots + C_{15}^{15}) = 2^{14}.$$

Câu 4.

Xét khai triển $(a+b)^n = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \dots + C_n^n a^n b^0$.

Với $a=5, b=1$ ta có: $(5+1)^n = C_n^0 5^0 1^n + C_n^1 5^1 1^{n-1} + \dots + C_n^n 5^n 1^0 = C_n^0 + 5C_n^1 + \dots + 5^n C_n^n = A$, hay

$$A = 6^n.$$

Câu 5.

Xét khai triển $(1+x+x^2)^{1009} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2018}x^{2018}$. (1)

Thay $x=1$ vào (1) ta được: $a_0 + a_1 + \dots + a_{2018} = (1+1+1)^{1009} = 3^{1009}$.

Câu 6.

Xét số hạng tổng quát $\frac{1}{k+1}C_{2017}^k$, ta có:

$$\frac{1}{k+1}C_{2017}^k = \frac{1}{1+k} \cdot \frac{2017!}{k!(2017-k)!} = \frac{1}{2018} \cdot \frac{2018!}{(k+1)!(2017-k)!} = \frac{1}{2018}C_{2018}^{k+1}. \text{ Vậy } \frac{1}{k+1}C_{2017}^k = \frac{1}{2018}C_{2018}^{k+1}.$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2018} [C_{2018}^0 + C_{2018}^1 + C_{2018}^2 + \dots + C_{2018}^{2018}] - \frac{C_{2018}^0}{2018} = \frac{1}{2018}2^{2018} - \frac{1}{2018} = \frac{2^{2018}-1}{2018}.$$

Câu 7.

Ta có $(3-1)^n = 3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n$

$$\Leftrightarrow 2^n = 2048 \Leftrightarrow 2^n = 2^{11} \Leftrightarrow n = 11.$$

Xét khai triển $(x+2)^{11} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k x^{11-k} \cdot 2^k$

Tìm hệ số của x^{10} tương ứng với tìm $k \in \mathbb{N} (k \leq 11)$ thỏa mãn $11-k=10 \Leftrightarrow k=1$.

Vậy hệ số của x^{10} trong khai triển $(x+2)^{11}$ là $C_{11}^1 \cdot 2 = 22$.

Câu 8.

Xét khai triển: $(x-2)^{80} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{80}x^{80}$. (1)

Lấy đạo hàm theo biến x hai vế của (1) ta được:

$$80(x-2)^{79} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + 80a_{80}x^{79}. (2)$$

Thay $x=1$ vào (2) ta được: $S = 80(1-2)^{79} = -80$.

Câu 9.

Do $C_{2n+1}^k = C_{2n+1}^{2n+1-k} \forall k = 0, 1, 2, \dots, 2n+1$ nên

$$C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{n+1} + C_{2n+1}^{n+2} + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}.$$

Mặt khác: $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 2^{2n+1} - 1$.

$$\text{Suy ra } 2(C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n) = 2^{2n+1}$$

$$\Leftrightarrow C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{2n} - C_{2n+1}^0 = 2^{2n} - 1$$

$$\Leftrightarrow 2^{2n} - 1 = 2^{20} - 1 \Leftrightarrow n = 10$$

$$\text{Khi đó: } \left(\frac{1}{x^4} + x^7 \right)^{10} = (x^{-4} + x^7)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (x^{-4})^{10-k} \cdot x^{7k} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot x^{11k-40}.$$

Hệ số chứa x^{26} ứng với giá trị k : $11k - 40 = 26 \Rightarrow k = 6$.

Vậy hệ số chứa x^{26} là $C_{10}^6 = 210$.

Câu 10.

Xét khai triển $(1+x)^n = C_n^0 + x.C_n^1 + x^2.C_n^2 + \dots + x^n.C_n^n$ (*).

Thay $x = -1; n = 2018$ vào (*), ta được $0 = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 + C_{2018}^2 + \dots + C_{2018}^{2018}$.

Vậy $S = 0$.