

# MỤC LỤC

## PHẦN I ĐẠI SỐ

3

### CHƯƠNG I MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP

5

|   |                                                                     |    |
|---|---------------------------------------------------------------------|----|
| 1 | MỆNH ĐỀ.....                                                        | 5  |
| A | Tóm tắt lý thuyết.....                                              | 5  |
| B | Các dạng toán và ví dụ.....                                         | 7  |
|   | Dạng 1. Xác định mệnh đề. Tính đúng sai của mệnh đề.....            | 7  |
|   | Dạng 2. Xác định mệnh đề đảo, mệnh đề phủ định của một mệnh đề..... | 8  |
|   | Dạng 3. Phát biểu định lý dạng điều kiện cần, điều kiện đủ.....     | 9  |
| C | Bài tập tự luận.....                                                | 9  |
| D | Câu hỏi trắc nghiệm khách quan.....                                 | 18 |
| 2 | TẬP HỢP.....                                                        | 23 |
| A | Tóm tắt lý thuyết.....                                              | 23 |
| B | Các dạng toán và ví dụ.....                                         | 23 |
|   | Dạng 1. Cách biểu diễn tập hợp.....                                 | 23 |
|   | Dạng 2. Tập con - hai tập bằng nhau.....                            | 25 |
| C | Bài tập tự luận.....                                                | 26 |
|   | Dạng 1. Các phép toán trên tập hợp.....                             | 27 |
|   | Dạng 2. Tập con của tập số thực.....                                | 32 |
| D | Câu hỏi trắc nghiệm khách quan.....                                 | 37 |

### CHƯƠNG II HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ HÀM SỐ BẬC HAI

49

|   |                                                   |     |
|---|---------------------------------------------------|-----|
| 1 | HÀM SỐ.....                                       | 49  |
| A | Tóm tắt lý thuyết.....                            | 49  |
| B | Các dạng toán và ví dụ.....                       | 50  |
|   | Dạng 1. Tính giá trị của hàm số tại một điểm..... | 50  |
|   | Dạng 2. Đồ thị hàm số.....                        | 50  |
|   | Dạng 3. Tìm tập xác định của hàm số.....          | 52  |
|   | Dạng 4. Sự biến thiên của hàm số.....             | 57  |
|   | Dạng 5. Hàm số chẵn - Hàm số lẻ.....              | 60  |
| C | Câu hỏi trắc nghiệm khách quan.....               | 64  |
| 2 | HÀM SỐ BẬC NHẤT.....                              | 84  |
| A | Tóm tắt lý thuyết.....                            | 84  |
| B | Các dạng toán và ví dụ.....                       | 85  |
|   | Dạng 1. Xét tính đồng biến, nghịch biến.....      | 85  |
|   | Dạng 2. Đồ thị hàm số $y = ax + b$ .....          | 86  |
|   | Dạng 3. Đồ thị hàm số $y =  ax + b $ .....        | 87  |
| C | Câu hỏi trắc nghiệm khách quan.....               | 88  |
| 3 | HÀM SỐ BẬC HAI.....                               | 97  |
| A | Tóm tắt lý thuyết.....                            | 97  |
| B | Câu hỏi trắc nghiệm khách quan.....               | 100 |

### CHƯƠNG III PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

115

|   |                                                                        |     |
|---|------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1 | <b>ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH</b>                                       | 115 |
| A | Tóm tắt lý thuyết                                                      | 115 |
| B | Phương pháp giải                                                       | 116 |
| C | Bài Tập Tự Luyện                                                       | 117 |
| D | Câu hỏi trắc nghiệm khách quan                                         | 125 |
| 2 | <b>Phương trình quy về phương trình bậc nhất, phương trình bậc hai</b> | 139 |
| A | Các dạng toán thường gặp - Ví dụ - Bài tập rèn luyện                   | 139 |
|   | Dạng 1. Giải và biện luận phương trình bậc nhất một ẩn                 | 139 |
|   | Dạng 2. Giải và biện luận phương trình bậc hai một ẩn                  | 143 |
|   | Dạng 3. Định lí Vi-ét                                                  | 146 |
|   | Dạng 4. Phương trình vô tỷ                                             | 150 |
| B | Câu hỏi trắc nghiệm khách quan                                         | 161 |
| 3 | <b>HỆ PHƯƠNG TRÌNH</b>                                                 | 181 |
| A | Các dạng toán và ví dụ                                                 | 181 |
|   | Dạng 1. Phương pháp thế                                                | 181 |
|   | Dạng 1. Hệ phương trình đối xứng loại 1                                | 183 |
| B | Câu hỏi trắc nghiệm khách quan                                         | 193 |

#### CHƯƠNG IV BẤT ĐẲNG THỨC - BẤT PHƯƠNG TRÌNH

207

|   |                                |     |
|---|--------------------------------|-----|
| 1 | <b>MỆNH ĐỀ</b>                 | 207 |
| A | Tóm tắt lý thuyết              | 207 |
| B | Bài tập tự luận                | 207 |
| C | Câu hỏi trắc nghiệm khách quan | 210 |

### PHẦN II HÌNH HỌC

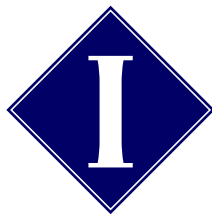
219

#### CHƯƠNG I VEC-TƠ

221

|   |                                                |     |
|---|------------------------------------------------|-----|
| 1 | <b>VEC-TƠ</b>                                  | 221 |
| A | Bài tập tự luận                                | 221 |
| B | Câu hỏi trắc nghiệm khách quan                 | 224 |
| 2 | <b>TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ</b>              | 232 |
| A | Tóm tắt lý thuyết                              | 232 |
| B | Các dạng toán và ví dụ                         | 232 |
|   | Dạng 1. Chứng minh đẳng thức vectơ             | 232 |
|   | Dạng 2. Tính độ dài của vectơ tổng             | 234 |
| C | Bài tập tự luận                                | 234 |
| D | Câu hỏi trắc nghiệm khách quan                 | 240 |
| 3 | <b>TÍCH CỦA VEC-TƠ VỚI MỘT SỐ</b>              | 248 |
| A | Tóm tắt lý thuyết                              | 248 |
| B | Các dạng toán và ví dụ                         | 248 |
|   | Dạng 1. Chứng minh đẳng thức véc-tơ            | 248 |
|   | Dạng 2. Xác định điểm thỏa điều kiện cho trước | 249 |
|   | Dạng 3. Chứng minh ba điểm thẳng hàng          | 249 |
| C | Bài tập tự luận                                | 251 |
| D | Câu hỏi trắc nghiệm khách quan                 | 264 |

PHẦN



---

# ĐẠI SỐ



# MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP

## §1 MỆNH ĐỀ

### A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1 MỆNH ĐỀ

Mệnh đề là một khẳng định hoặc là **đúng** hoặc là **sai** và không thể vừa đúng vừa sai.

📌 Ví dụ 1.

.....

.....

.....

#### 2 MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN

Mệnh đề chứa biến là một câu chứa biến, với mỗi giá trị của biến ta được một mệnh đề.

📌 Ví dụ 1.

.....

.....

.....

#### 3 PHỦ ĐỊNH CỦA MỘT MỆNH ĐỀ

Phủ định của mệnh đề  $P$  ký hiệu là  $\overline{P}$  là một mệnh đề thỏa mãn tính chất

| $P$  | $\overline{P}$ |
|------|----------------|
| Đúng | Sai            |
| Sai  | Đúng           |

📌 Ví dụ 1.

.....

.....

.....

Để phủ định mệnh đề  $P$ , thông thường ta thêm “không phải” hoặc “không” vào những vị trí phù hợp trong mệnh đề  $P$  để có câu tròn ý.

📌 Ví dụ 2.

.....

.....

.....

#### 4 MỆNH ĐỀ KÉO THEO

Mệnh đề “Nếu  $P$  thì  $Q$ ” gọi là mệnh đề kéo theo, ký hiệu  $P \Rightarrow Q$ .

Mệnh đề  $P \Rightarrow Q$  chỉ sai khi  $P$  đúng đồng thời  $Q$  sai.

Tóm tắt:

| $P$  | $Q$  | $P \Rightarrow Q$ |
|------|------|-------------------|
| Đúng | Sai  | Sai               |
| Sai  | Đúng | Đúng              |
| Sai  | Sai  | Đúng              |
| Đúng | Đúng | Đúng              |

##### Ví dụ 1.

☑ Mệnh đề “ $-10 < -1 \Rightarrow (-10)^2 < (-1)^2$ ” là mệnh đề sai.

☑ Mệnh đề “ $\sqrt{3} < 2 \Rightarrow 3 < 4$ ” là mệnh đề đúng.

Định lý trong toán học là mệnh đề **đúng** có dạng  $P \Rightarrow Q$ .

!

☑  $P$ : gọi là giả thiết (hay  $P$  là điều kiện đủ để có  $Q$ ).

☑  $Q$ : gọi là kết luận (hay  $Q$  là điều kiện cần để có  $P$ ).

##### Ví dụ 2.

.....  
 .....  
 .....

#### 5 MỆNH ĐỀ ĐẢO - HAI MỆNH ĐỀ TƯƠNG ĐƯƠNG

Mệnh đề đảo của mệnh đề  $P \Rightarrow Q$  là mệnh đề  $Q \Rightarrow P$ .

!

Mệnh đề đảo của một mệnh đề đúng chưa hẳn là một mệnh đề đúng.

Nếu hai mệnh đề  $P \Rightarrow Q$  và  $Q \Rightarrow P$  đều đúng thì ta nói  $P$  và  $Q$  là hai mệnh đề tương đương.

Ký hiệu  $P \Leftrightarrow Q$ .

Tóm tắt:

| $P$  | $Q$  | $P \Leftrightarrow Q$ |
|------|------|-----------------------|
| Đúng | Đúng | Đúng                  |
| Sai  | Sai  | Đúng                  |
| Sai  | Đúng | Sai                   |
| Đúng | Sai  | Sai                   |

- Cách phát biểu khác:
- +  $P$  khi và chỉ khi  $Q$ .
  - +  $P$  là điều kiện cần và đủ để có  $Q$ .
  - +  $Q$  là điều kiện cần và đủ để có  $P$ .

 Ví dụ 1. Tam giác  $ABC$  cân có một góc  $60^\circ$  là điều kiện cần và đủ để tam giác  $ABC$  đều.

 Ví dụ 2. Tam giác  $ABC$  là tam giác vuông khi và chỉ khi có một góc bằng tổng hai góc còn lại.

##### Ví dụ 3.

.....  
 .....  
 .....

**6 KÝ HIỆU  $\forall, \exists, \exists!$** 

Ký hiệu  $\forall$ : đọc là với mọi; ký hiệu  $\exists$ : đọc là tồn tại; ký hiệu  $\exists!$ : đọc là tồn tại duy nhất.  
 Xét câu “Bình phương của mọi số thực đều lớn hơn hoặc bằng 0” là một mệnh đề.  
 Ta viết:  $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$  hay  $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Ví dụ 1.**

| Câu | Mệnh đề                               | Đọc là                                 | Mệnh đề đúng | Mệnh đề sai |
|-----|---------------------------------------|----------------------------------------|--------------|-------------|
| 1   | $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 > 1$  |                                        |              |             |
| 2   |                                       | Có một số nguyên nhỏ hơn 0             |              |             |
| 3   | $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 = x$  |                                        |              |             |
| 4   |                                       | Có một số tự nhiên $n$ mà $2n + 1 = 0$ |              |             |
| 5   | $\exists! x \in \mathbb{Z} :  x  < 1$ |                                        |              |             |

**7 PHỦ ĐỊNH CỦA MỆNH ĐỀ VỚI MỌI, TỒN TẠI**

Mệnh đề  $P : \forall x \in X, T(x)$  có mệnh đề phủ định là  $\exists x \in X, \overline{T(x)}$ .  
 Mệnh đề  $P : \exists x \in X, T(x)$  có mệnh đề phủ định là  $\forall x \in X, \overline{T(x)}$ .

- ☑ Phủ định của “ $a < b$ ” là “ $a \geq b$ ”.
- ☑ Phủ định của “ $a = b$ ” là “ $a \neq b$ ”.
- ☑ Phủ định của “ $a > b$ ” là “ $a \leq b$ ”.
- ☑ Phủ định của “ $a$  chia hết cho  $b$ ” là “ $a$  không chia hết cho  $b$ ”.

**Ví dụ 1.**  $P : \exists n \in \mathbb{Z}, n < 0$  phủ định của  $P$  là  $\overline{P} : \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$ .

**Ví dụ 2.**

.....  
 .....  
 .....

**B CÁC DẠNG TOÁN VÀ VÍ DỤ****○ Dạng 1. Xác định mệnh đề. Tính đúng sai của mệnh đề**

Căn cứ trên định nghĩa mệnh đề và tính đúng sai của chúng. Lưu ý rằng:

- ☑  $P, \overline{P}$  không cùng tính đúng sai.
- ☑  $P \Rightarrow Q$  chỉ sai khi  $P$  đúng,  $Q$  sai.
- ☑  $P \Leftrightarrow Q$  đúng khi và chỉ khi cả hai mệnh đề  $P$  và  $Q$  đều đúng hay đều sai.
- ☑  $\forall x \in X, P(x)$  đúng khi  $P(x_0)$  đúng với mọi  $x_0 \in X$ .
- ☑  $\exists x \in X, P(x)$  đúng khi có  $x_0 \in X$  sao cho  $P(x_0)$  đúng.

**Ví dụ 1.** Xét xem các phát biểu sau có phải là mệnh đề không? Nếu là mệnh đề thì cho biết đó là mệnh đề đúng hay sai?

- |                                                           |                                                       |
|-----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| ① Số 1 là số nguyên tố.                                   | ② Hà Nội là thủ đô nước nào?                          |
| ③ Phương trình $x^2 + 1 = 0$ vô nghiệm.                   | ④ Hình học là môn học khó thật!                       |
| ⑤ $x + 4$ là một số âm.                                   | ⑥ Nếu $n$ là số chẵn thì $n$ chia hết cho 4.          |
| ⑦ Nếu $n$ chia hết cho 4 thì $n$ là số chẵn.              | ⑧ $n$ là số chẵn nếu và chỉ nếu $n^2$ chia hết cho 4. |
| ⑨ $\exists n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ không là bội của 3. | ⑩ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$ .       |

#### Lời giải.

- a) “Số 1 là số nguyên tố” là một mệnh đề sai vì số nguyên tố là số lớn hơn 1.  
 b) “Hà Nội là thủ đô nước nào?” không phải là mệnh đề đây là câu hỏi.  
 c) “Phương trình  $x^2 + 1 = 0$  vô nghiệm.” là mệnh đề đúng.  
 d) “Hình học là môn học khó thật!” không phải là mệnh đề vì đây là câu cảm thán.  
 e) “ $x + 4$  là một số âm.” là mệnh đề chứa biến.  
 f) “Nếu  $n$  là số chẵn thì  $n$  chia hết cho 4.” là mệnh đề sai vì  $n = 2$  là số chẵn nhưng không chia hết cho 4.  
 g) “Nếu  $n$  chia hết cho 4 thì  $n$  là số chẵn.” là mệnh đề đúng.  
 h) “ $n$  là số chẵn nếu và chỉ nếu  $n^2$  chia hết cho 4.” là mệnh đề đúng.  
 i) “ $\exists n \in \mathbb{N}, n^3 - n$  không là bội của 3.” là mệnh đề sai vì  $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$  chia hết cho 3.  
 j) “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$ .” là mệnh đề đúng vì  $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ .

#### Dạng 2. Xác định mệnh đề đảo, mệnh đề phủ định của một mệnh đề

- ☑ Mệnh đề phủ định của  $P$  là “không phải  $P$ ”.
- ☑ Mệnh đề phủ định của “ $\forall x \in X, P(x)$ ” là “ $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ ”.
- ☑ Mệnh đề phủ định của “ $\exists x \in X, P(x)$ ” là “ $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ ”.
- ☑ Mệnh đề  $Q \Rightarrow P$  là mệnh đề đảo của mệnh đề  $P \Rightarrow Q$ .

**Ví dụ 1.** Tìm mệnh đề đảo của mệnh đề sau và cho biết mệnh đề đảo đúng hay sai: “Nếu hai góc đối đỉnh thì chúng bằng nhau”.

#### Lời giải.

Mệnh đề đã cho có dạng  $P \Rightarrow Q$  trong đó  $P$  là “hai góc đối đỉnh”,  $Q$  là “hai góc bằng nhau”.  
 Vậy mệnh đề đảo là “Nếu hai góc bằng nhau thì chúng đối đỉnh”. Mệnh đề này sai.

**Ví dụ 2.** Tìm mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và cho biết chúng đúng hay sai?

- a)  $P$ : “ $\forall x \in \mathbb{R}, (x - 1)^2 \geq 0$ ”.
- b)  $Q$ : “Có một tam giác không có góc nào lớn hơn  $60^\circ$ ”.

#### Lời giải.

- a) Mệnh đề phủ định của  $P$  là  $\overline{P}$ : “ $\exists x \in \mathbb{R}, (x - 1)^2 < 0$ ”. Đây là mệnh đề sai.
- b) Mệnh đề phủ định của  $Q$  là  $\overline{Q}$ : “Mọi tam giác luôn có một góc lớn hơn  $60^\circ$ ”. Đây là mệnh đề sai vì tam giác đều không có góc lớn hơn  $60^\circ$ .

 **Ví dụ 3.** Phát biểu thành lời và phủ định các mệnh đề sau.

①  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ .

②  $\exists! n \in \mathbb{N}, n^2 + n = 0$ .

 **Lời giải.**

- a) Bình phương của một số thực là số dương.  
Mệnh đề phủ định là “Tồn tại bình phương của một số thực là số không dương”.
- b) Có một số tự nhiên  $n$  mà tích của nó với số liền sau nó bằng 0.  
Mệnh đề phủ định là “Với mọi số tự nhiên  $n$  mà tích của nó với số liền sau nó khác 0”.

 **Dạng 3.** Phát biểu định lý dạng điều kiện cần, điều kiện đủ

- ☑ Một định lý thường có dạng “ $\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)$ ”. Xác định  $P(x), Q(x)$ .
- ☑ Lấy  $x \in X$  sao cho  $P(x)$  đúng, chứng minh  $Q(x)$  đúng.
- ☑  $P(x)$  là điều kiện đủ để có  $Q(x)$  hay  $Q(x)$  là điều kiện cần để có  $P(x)$ .

 **Ví dụ 1.** Sử dụng khái niệm “điều kiện cần”, “điều kiện đủ” phát biểu các định lý sau.

- a) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau.
- b) Nếu  $a + b > 0$  thì ít nhất có một số  $a$  hay  $b$  dương.

 **Lời giải.**

- a) Hai tam giác bằng nhau là điều kiện đủ để chúng có diện tích bằng nhau.  
Hai tam giác có diện tích bằng nhau là điều kiện cần để chúng bằng nhau.
- b)  $a + b > 0$  là điều kiện đủ để ít nhất có một số  $a$  hay  $b$  dương.  
Ít nhất có một số  $a$  hay  $b$  dương là điều kiện cần để  $a + b > 0$ .

 **Ví dụ 2.** Sử dụng khái niệm “điều kiện cần”, “điều kiện đủ” phát biểu các định lý sau.

- a) Một số có tổng chia hết cho 9 thì chia hết cho 9 và ngược lại.
- b) Một hình bình hành có các đường chéo vuông góc là một hình thoi và ngược lại.
- c) Phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi biệt thức của nó dương.

 **Lời giải.**

- a) Một số có tổng chia hết cho 9 là điều kiện cần và đủ để số đó chia hết cho 9.
- b) Một hình bình hành có các đường chéo vuông góc là điều kiện cần và đủ để hình đó là một hình thoi.
- c) Phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt là điều kiện cần và đủ để biệt thức của nó dương.

## **BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**Bài 1.** Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là mệnh đề? Phát biểu nào là mệnh đề chứa biến?

- a.  $2009 + 1 > 2020$ .
- b.  $2x + 3 = 0$ .
- c.  $x^2 + 1 > 0$ .
- d. Mọi tam giác đều đều là tam giác cân.

- e. Số  $\pi$  có lớn hơn 3 hay không?
- f. Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng có diện tích bằng nhau.
- g. 3 là một số nguyên tố.

 **Lời giải.**

- ☑ Trong các phát biểu trên, phát biểu a., d., f., g. là mệnh đề
- ☑ Phát biểu b., c. là mệnh đề chứa biến.
- ☑ Phát biểu e. không phải là mệnh đề (câu hỏi)

**Bài 2.** Phát biểu thành lời, xét tính đúng sai và lập mệnh đề phủ định của các mệnh đề dưới đây:

- a.  $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -10$ .                      c.  $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0$ .                      e.  $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 5 > 0$ .
- b.  $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 12 \neq -10$ .                      d.  $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0$ .                      f.  $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 5 > 0$ .

 **Lời giải.**

- a. Có một số thực bình phương của nó bằng  $-10$ . Đây là mệnh đề sai, vì bình phương của một số thực bất kỳ là một số không âm.  
Mệnh đề phủ định là: Mọi số thực, bình phương của nó khác  $-10$ .
- b. Đây là một mệnh đề đúng, vì  $x^2 + x + 12 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{47}{4} \geq \frac{47}{4} \neq -10 \forall x$   
Mệnh đề phủ định là: Có một số thực mà tích của số đó với số đó cộng một bằng  $-22$ .
- c. Đây là mệnh đề sai, vì  $x = 1$  thì  $x^2 = 1 > 0$ . Mệnh đề chứa ký hiệu “với mọi” có 1 phần tử làm cho nó sai thì mệnh đề ấy sai.  
Phủ định của mệnh đề là: Tồn tại một số thực mà bình phương của nó là số dương.
- d. Đây là mệnh đề đúng, vì có phần tử  $x = 0$  làm cho mệnh đề đó đúng.  
Phủ định của mệnh đề là: Mọi số thực, bình phương của nó là số dương.
- e. Đây là mệnh đề đúng. Vì với  $x = 1$  thì  $1^2 + 1 + 5 > 0$  là mệnh đề đúng.  
Phủ định của mệnh đề là: Mọi số thực, tích của số đó với số đó cộng số một thì bé hơn hoặc bằng âm năm.
- f. Đây là mệnh đề đúng. Vì  $x^2 + x + 5 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} \geq \frac{19}{4} > 0 \forall x$   
Phủ định của mệnh đề là: Tồn tại số thực, tích của số đó với số đó cộng số một thì bé hơn hoặc bằng âm năm.

**Bài 3.** Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề, câu nào là mệnh đề chứa biến?

- a.  $10 < 1$ .                      b.  $2 + x > x + 1$ .                      c.  $x - y = 1$ .                      d.  $\sqrt{2}$  là số vô tỉ.

 **Lời giải.**

Câu a. câu d. là mệnh đề.  
Câu b. câu c. là mệnh đề chứa biến.

**Bài 4.** Các câu sau đây, câu nào là mệnh đề, câu nào không phải là mệnh đề? Nếu là mệnh đề hãy cho biết mệnh đề đó đúng hay sai.

- a. Không được đi lối này.      b. Bây giờ là mấy giờ?      c. 7 không là số nguyên tố.      d.  $\sqrt{5}$  là số vô tỉ.

 **Lời giải.**

- a. Không được đi lối này.  
Câu này không phải là mệnh đề vì là câu mệnh lệnh.
- b. Bây giờ là mấy giờ?  
Câu này không phải là mệnh đề vì là câu hỏi.



- |                        |                                   |                                    |
|------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| a. $x + 2 > 3$ .       | e. $x + y > 1$ .                  | i. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ . |
| b. $a + 3 = 3 + a$ .   | f. $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ . | j. $(x - 2)^2 = 1$ .               |
| c. 15 là bội của $x$ . | g. $(a - b)^2 = a^2 - b^2$ .      | k. $x^2 - 5x + 6 = 0$ .            |
| d. $(x - 2)^2 > -1$ .  | h. $x^2 > 0$ .                    | l. $(x + y)z = xz + yz$ .          |

 **Lời giải.**

- |                                                                 |                                                                  |
|-----------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| a. $\exists x \in \mathbb{R} : x + 2 > 3$ .                     | g. $\exists a, b \in \mathbb{R} : (a - b)^2 = a^2 - b^2$ .       |
| b. $\forall a \in \mathbb{R} : a + 3 = 3 + a$ .                 | h. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$ .                        |
| c. $\exists x \in \mathbb{R} : 15 \text{ là bội của } x$ .      | i. $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ . |
| d. $\forall x \in \mathbb{R} : (x - 2)^2 > -1$ .                | j. $\exists x \in \mathbb{R} : (x - 2)^2 = 1$ .                  |
| e. $\exists x, y \in \mathbb{R} : x + y > 1$ .                  | k. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 = 0$ .               |
| f. $\forall a, b \in \mathbb{R} : (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ . | l. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y)z = xz + yz$ .       |

**Bài 9.** Lập mệnh đề phủ định và xét tính đúng sai của chúng.

- |                                                                   |                                                        |
|-------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| a. $\exists x \in \mathbb{Q} : 9x^2 - 3 = 0$ .                    | c. $\forall x \in \mathbb{R} : (x - 1)^2 \neq x - 1$ . |
| b. $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 + 1 \text{ chia hết cho } 8$ . | d. $\forall n \in \mathbb{N} : n > n^2$ .              |

 **Lời giải.**

- a. Phủ định của mệnh đề là:  $\forall x \in \mathbb{Q} : 9x^2 - 3 \neq 0$ .  
Đây là mệnh đề đúng.
- b. Phủ định của mệnh đề là:  $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + 1 \text{ không chia hết cho } 8$ .  
Đây là mệnh đề đúng. Vì  $n = 8k, n = 8k \pm 1, n = 8k \pm 2, n = 8k \pm 3$  và  $n = 8k + 4$  với  $k \in \mathbb{N}$  thì  $n^2 + 1$  đều không chia hết cho 8.
- c. Phủ định của mệnh đề là:  $\exists x \in \mathbb{R} : (x - 1)^2 = x - 1$ .  
Đây là mệnh đề đúng. Vì với  $x = 1$  thì  $(1 - 1)^2 = 1 - 1$  là mệnh đề đúng.
- d. Phủ định của mệnh đề là:  $\exists n \in \mathbb{N} : n \leq n^2$ .  
Đây là mệnh đề đúng. Vì với  $n = 0$  thì  $0 \leq 0^2$  là mệnh đề đúng.

**Bài 10.** Cho số thực  $x$ . Xét các mệnh đề  $P : "x^2 = 1"$  và  $Q : "x = 1"$

- Phát biểu mệnh đề  $P \Rightarrow Q$  và mệnh đề đảo của nó.
- Xét tính đúng sai của hai mệnh đề trên.
- Chỉ ra một giá trị của  $x$  để mệnh đề  $P \Rightarrow Q$  sai.

 **Lời giải.**

- Phát biểu mệnh đề  $P \Rightarrow Q$ : Nếu bình phương của một số bằng 1 thì số đó bằng 1.  
Phát biểu mệnh đề  $Q \Rightarrow P$ : Nếu một số bằng 1 thì bình phương số đó bằng 1.
- Mệnh đề  $P \Rightarrow Q$  là mệnh đề sai.  
Mệnh đề  $Q \Rightarrow P$  là mệnh đề đúng.
- Với  $x = -1$  thì mệnh đề  $P \Rightarrow Q$  sai.

**Bài 11.** Phát biểu mệnh đề  $P \Leftrightarrow Q$  bằng hai cách và xét tính đúng sai của nó

- $P : "Tứ giác ABCD \text{ là hình thoi}"$  và  $Q : "Tứ giác ABCD \text{ là hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau}"$ .

b.  $P$ : “Bất phương trình  $\sqrt{x^2 - 3x} > 1$  có nghiệm” và  $Q$ : “ $\sqrt{(-1)^2 - 3(-1)} > 1$ ”.

 **Lời giải.**

- a. “Tứ giác  $ABCD$  là hình thoi khi và chỉ khi nó là hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau”.  
 “Tứ giác  $ABCD$  là hình thoi nếu và chỉ nếu nó là hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau”.  
 Đây là mệnh đề đúng.
- b. “Bất phương trình  $\sqrt{x^2 - 3x} > 1$  có nghiệm khi và chỉ khi  $\sqrt{(-1)^2 - 3(-1)} > 1$ ”.  
 “Bất phương trình  $\sqrt{x^2 - 3x} > 1$  có nghiệm nếu và chỉ nếu  $\sqrt{(-1)^2 - 3(-1)} > 1$ ”.  
 Đây là mệnh đề sai. Vì với  $x = 3$  thì mệnh đề sai.

**Bài 12.** Lập mệnh đề kéo theo và mệnh đề tương đương của hai mệnh đề sau đây và cho biết tính đúng, sai của chúng. Biết:

$P$ : “Điểm  $M$  nằm trên phân giác của góc  $Oxy$ ”.

$Q$ : “Điểm  $M$  cách đều hai cạnh  $Ox, Oy$ ”.

 **Lời giải.**

- ☑ Mệnh đề  $P \Rightarrow Q$  là: “Nếu một điểm bất kỳ nằm trên đường phân giác của góc  $Oxy$  thì nó cách đều hai cạnh  $Ox$  và  $Oy$ ”. Đây là mệnh đề đúng.
- ☑ Mệnh đề  $P \Leftrightarrow Q$  là: “Mọi điểm nằm trên đường phân giác của góc  $Oxy$  khi và chỉ khi chúng cách đều hai cạnh  $Ox$  và  $Oy$ ”. Đây là mệnh đề đúng.

**Bài 13.** Dùng các ký hiệu  $\forall$  hoặc  $\exists$  để viết các mệnh đề sau:

- a. Có một số nguyên không chia hết cho chính nó.
- b. Mọi số thực cộng với số 0 bằng chính nó.
- c. Có một số hữu tỉ nhỏ hơn nghịch đảo của nó.

 **Lời giải.**

- a.  $\exists x \in \mathbb{Z} : x \nmid x$ .
- b.  $\forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = x$ .
- c.  $\exists x \in \mathbb{Q} : x < \frac{1}{x}$ .

**Bài 14.** Sử dụng khái niệm “điều kiện cần” hoặc “điều kiện đủ” phát biểu các mệnh đề sau:

- a. Hai tam giác bằng nhau có diện tích bằng nhau.
- b. Số tự nhiên có chữ số tận cùng là chữ số 5 thì nó chia hết cho 5.
- c. Nếu  $a = b$  thì  $a^2 = b^2$ .
- d. Nếu  $a + b > 0$  thì trong hai số  $a$  và  $b$  lớn hơn 0.

 **Lời giải.**

- a. Hai tam giác bằng nhau là điều kiện đủ để hai tam giác đó có diện tích bằng nhau.  
 Hai tam giác bằng nhau là điều kiện cần để chúng bằng nhau.
- b. Số tự nhiên có chữ số tận cùng là chữ số 5 là điều kiện đủ để nó chia hết cho 5.  
 Số tự nhiên chia hết cho 5 là điều kiện cần để nó có tận cùng là chữ số 5
- c. Bình phương của hai số bằng nhau là điều kiện cần để hai số đó bằng nhau.  
 Hai số bằng nhau là điều kiện đủ để bình phương của chúng bằng nhau.
- d. Hai số  $a$  và  $b$  lớn hơn 0 là điều kiện đủ để tổng của chúng lớn hơn 0.  
 Tổng của hai số lớn hơn 0 là điều kiện cần để hai số đó đều lớn hơn 0.

**Bài 15.** Phát biểu một “điều kiện đủ”

- Đề tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.
- Đề tứ giác  $ABCD$  là hình chữ nhật.

 **Lời giải.**

- Đề tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành, điều kiện đủ là tứ giác  $ABCD$  có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.
- Đề tứ giác  $ABCD$  là hình chữ nhật, điều kiện đủ là hình bình hành  $ABCD$  có một góc vuông.

**Bài 16.** Xác định tính đúng - sai của các mệnh đề sau:

- $\forall x \in \mathbb{R} : x > -2 \Rightarrow x^2 > 4.$
- $\forall x \in \mathbb{R} : x > 2 \Rightarrow x^2 > 4.$
- $\forall m, n \in \mathbb{N} : m \text{ và } n \text{ là các số lẻ} \Leftrightarrow m^2 + n^2 \text{ là số chẵn}.$
- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 4 \Rightarrow x > 2.$

 **Lời giải.**

- $\forall x \in \mathbb{R} : x > -2 \Rightarrow x^2 > 4.$   
Đây là mệnh đề sai, vì  $x = -1$  thì “ $-1 > -2 \Rightarrow (-1)^2 > 4$ ” là mệnh đề sai.
- $\forall x \in \mathbb{R} : x > 2 \Rightarrow x^2 > 4.$   
Đây là mệnh đề đúng, vì với mọi số thực lớn hơn 2 thì bình phương của nó luôn lớn hơn 4.
- $\forall m, n \in \mathbb{N} : m \text{ và } n \text{ là các số lẻ} \Leftrightarrow m^2 + n^2 \text{ là số chẵn}.$   
Đây là mệnh đề sai, vì “ $m = 2k + 1, n = 2l + 1$  với  $k, l \in \mathbb{N}$  thì  $m^2 + n^2$  là số chẵn” là đúng. Tuy nhiên “ $m^2 + n^2$  là số chẵn thì  $m, n$  là số lẻ” là sai. Do đó mệnh đề tương đương này sai.
- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 4 \Rightarrow x > 2.$   
Đây là mệnh đề sai, vì  $x = -3$  thì “ $(-3)^2 > 4 \Rightarrow -3 > 2$ ” là mệnh đề sai.

**Bài 17.** Xét tính đúng- sai của các mệnh đề sau

- $\exists a \in \mathbb{Q}, a^2 = 2.$
- $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$  không chia hết cho 3.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x > y \Leftrightarrow x^3 > y^3.$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y \geq 2\sqrt{xy}.$

 **Lời giải.**

- Sai.
- Đúng.
- Đúng.
- Sai.

**Bài 18.** Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và cho biết tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó.

- $A : “6 \text{ là số nguyên tố}”.$
- $B : “(\sqrt{3} - 1)^2 \text{ là số nguyên}”;$
- $C : “\exists n \in \mathbb{N}, n(n + 1) \text{ là số chính phương}”;$
- $D : “\forall n \in \mathbb{N}, 2n + 1 \text{ là số lẻ}”.$

 **Lời giải.**

- ①  $\bar{A}$  : “6 là hợp số”- Đúng.
- ②  $\bar{B}$  : “ $(\sqrt{3} - 1)^2$  không phải là số nguyên ”- Đúng;
- ③  $\bar{C}$  : “ $\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)$  không phải là số chính phương ”- Sai;
- ④  $\bar{D}$  : “ $\exists n \in \mathbb{N}, 2n+1$  là số chẵn ”- Sai.

**Bài 19.** Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và cho biết tính đúng sai của mệnh đề đó.

$A$  : “ $\exists x \in \mathbb{N}, n^2 + 3$  chia hết cho 4 ” và  $B$  : “ $\exists x \in \mathbb{N}, x$  chia hết cho  $x+1$  ”.

 **Lời giải.**

- ①  $\bar{A}$  : “ $\forall x \in \mathbb{N}, n^2 + 3$  không chia hết cho 4 ”- Sai.
- ②  $\bar{B}$  : “ $\forall x \in \mathbb{N}, x$  không chia hết cho  $x+1$  ”- Sai.

**Bài 20.** Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và cho biết tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó.

- ①  $\bar{A}$  : “Phương trình  $x^4 - 2x^2 + 2 = 0$  có nghiệm”;
- ②  $\bar{B}$  : “Bất phương trình  $x^{2013} > 2030$  vô nghiệm ”;
- ③  $\bar{C}$  : “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^4 - x^2 + 1 = (x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)$  ”;
- ④  $\bar{D}$  : “ $\exists q \in \mathbb{Q}, 2q^2 - 1 = 0$  ”.

 **Lời giải.**

- ①  $A$  : “Phương trình  $x^4 - 2x^2 + 2 = 0$  vô nghiệm”- Đúng;
- ②  $B$  : “Bất phương trình  $x^{2013} > 2030$  có nghiệm ”- Đúng;
- ③  $C$  : “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^4 - x^2 + 1 \neq (x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)$  ”- Sai ;
- ④  $D$  : “ $\forall q \in \mathbb{Q}, 2q^2 - 1 \neq 0$  ”- Đúng.

**Bài 21.** Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và cho biết tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó.

- ①  $A$  : “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 - x^2 + 1 > 0$  ”;
- ②  $B$  : “Tồn tại số thực  $a$  sao cho  $a + \frac{1}{a} \leq 2$  ”.

 **Lời giải.**

- ①  $\bar{A}$  : “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^3 - x^2 + 1 \leq 0$  ”- Đúng;
- ②  $\bar{B}$  : “Với mọi số thực  $a$  sao cho  $a + \frac{1}{a} > 2$  ”- Sai.

**Bài 22.** Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau và nêu mệnh đề phủ định của nó

- ①  $P(x)$  : “ $\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 = 3$  ”.
- ②  $P(n)$  : “ $\forall n \in \mathbb{N}^* : 2^n + 3$  là một số nguyên tố ”.
- ③  $P(x)$  : “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 4x + 5 > 0$  ”.
- ④  $P(x)$  : “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^4 - x^2 + 2x + 2 \geq 0$  ”.

 **Lời giải.**

- ① Sai và  $\overline{P(x)}$  : “ $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 \neq 3$  ”.
- ② Sai và  $\overline{P(n)}$  : “ $\exists n \in \mathbb{N}^* : 2^n + 3$  là một hợp số ”.

- ③ Đúng và  $\overline{P(x)}$  : " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 4x + 5 \leq 0$ ".
- ④ Đúng và  $\overline{P(x)}$  : " $\exists x \in \mathbb{R}, x^4 - x^2 + 2x + 2 < 0$ ".

**Bài 23.** Hãy phát biểu mệnh đề kéo theo  $P \Rightarrow Q$ ,  $\overline{Q} \Rightarrow P$  và xét đúng sai của mệnh đề này.

- ① Cho tứ giác  $ABCD$  và hai mệnh đề  $P$  : "Tổng hai góc đối của tứ giác lồi bằng  $180^\circ$ " và  $Q$  : "Tứ giác nội tiếp được đường tròn".
- ②  $P$  : " $\sqrt{2} - \sqrt{3} > -1$ " và  $Q$  : " $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 > (-1)^2$ ".

 **Lời giải.**

- ①  $P \Rightarrow Q$  : "Nếu tổng hai góc đối của tứ giác lồi bằng  $180^\circ$  thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn" - Đúng.  
 $\overline{Q} \Rightarrow P$  : "Nếu tứ giác không nội tiếp được đường tròn thì tổng hai góc đối của tứ giác lồi bằng  $180^\circ$ " - Sai.
- ②  $P \Rightarrow Q$  : "Nếu  $\sqrt{2} - \sqrt{3} > -1$  thì  $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 > (-1)^2$ " - Sai.  
 $\overline{Q} \Rightarrow P$  : "Nếu  $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 \leq (-1)^2$  thì  $\sqrt{2} - \sqrt{3} > -1$ " - Đúng.

**Bài 24.** Sử dụng khái niệm "điều kiện cần" để phát biểu các định lý sau

- ① Nếu một số tự nhiên chia hết cho 15 thì nó chia hết cho 5.
- ② Nếu  $a = b$  thì  $a^2 = b^2$ .
- ③ Trong mặt phẳng, nếu hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng ấy song song với nhau.

 **Lời giải.**

- ① Điều kiện cần để một số tự nhiên chia hết cho 15 là nó chia hết cho 5.
- ② Điều kiện cần để  $a = b$  là  $a^2 = b^2$ .
- ③ Trong mặt phẳng, điều kiện cần để hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba là hai đường thẳng ấy song song với nhau.

**Bài 25.** Dùng khái niệm "điều kiện cần" để phát biểu các định lý sau

- ① Nếu  $MA \perp MB$  thì  $M$  thuộc đường tròn đường kính  $AB$ .
- ②  $a \neq 0$  hoặc  $b \neq 0$  là điều kiện đủ để  $a^2 + b^2 > 0$ .

 **Lời giải.**

- ① Điều kiện cần để  $MA \perp MB$  là  $M$  thuộc đường tròn đường kính  $AB$ .
- ② Điều kiện cần để  $a^2 + b^2 > 0$  là  $a \neq 0$  hoặc  $b \neq 0$ .

**Bài 26.** Sử dụng khái niệm "điều kiện đủ" để phát biểu các định lý sau

- ① Nếu  $a$  và  $b$  là hai số hữu tỉ thì tổng  $a + b$  là số hữu tỉ.
- ② Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau.
- ③ Nếu một số tự nhiên có chữ số tận cùng là chữ số 5 thì nó chia hết cho 5.

 **Lời giải.**

- ①  $a$  và  $b$  là hai số hữu tỉ là điều kiện đủ để có tổng  $a + b$  là số hữu tỉ.
- ② Hai tam giác bằng nhau là điều kiện đủ để chúng có diện tích bằng nhau.
- ③ Một số tự nhiên có chữ số tận cùng là chữ số 5 là điều kiện đủ để nó chia hết cho 5.

**Bài 27.** Cho định lí “Cho số tự nhiên  $n$ , nếu  $n^5$  chia hết cho 5 thì  $n$  chia hết cho 5”. Định lí này được viết dưới dạng  $P \Rightarrow Q$ .

- ① Hãy xác định các mệnh đề  $P$  và  $Q$ .
- ② Phát biểu định lí trên bằng cách dùng thuật ngữ “điều kiện cần”.
- ③ Phát biểu định lí trên bằng cách dùng thuật ngữ “điều kiện đủ”.
- ④ Hãy phát biểu định lí đảo (nếu có) của định lí trên rồi dùng các thuật ngữ “điều kiện cần và đủ” phát biểu gộp cả hai định lí thuận và đảo.

🔗 **Lời giải.**

- ①  $P : n^5$  chia hết cho 5 và  $Q : n$  chia hết cho 5.
- ② Cho số tự nhiên  $n$ , điều kiện cần để có  $n^5$  chia hết cho 5 là  $n$  chia hết cho 5
- ③ Cho số tự nhiên  $n$ ,  $n^5$  chia hết cho 5 là  $n$  chia hết cho 5
- ④ Định lí đảo: “Cho số tự nhiên  $n$ , nếu  $n$  chia hết cho 5 thì  $n^5$  chia hết cho 5.  
Cho số tự nhiên  $n$ , điều kiện cần và đủ để  $n^5$  chia hết cho 5 là  $n$  chia hết cho 5.

**Bài 28.** Sử dụng thuật ngữ “điều kiện cần”, “điều kiện đủ” để phát biểu định lí sau

- ① Nếu một tứ giác là hình vuông thì nó có bốn cạnh bằng nhau. Có định lí đảo của định lí trên không, vì sao?
- ② Nếu một tứ giác là hình thoi thì nó có hai đường chéo vuông góc. Có định lí đảo của định lí trên không, vì sao?

🔗 **Lời giải.**

- ① Điều kiện cần để một tứ giác là hình vuông là nó có bốn cạnh bằng nhau.  
Điều kiện đủ để tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là tứ giác đó là hình vuông.  
Không tồn tại định lí đảo của định lí đã cho. Vì mệnh đề đảo của mệnh đề trên là một mệnh đề sai.
- ② Điều kiện cần để một tứ giác là hình thoi là nó có hai đường chéo vuông góc.  
Điều kiện đủ để một tứ giác có hai đường chéo vuông góc là tứ giác đó là hình thoi.  
Không tồn tại định lí đảo của định lí đã cho. Vì mệnh đề đảo của mệnh đề trên là một mệnh đề sai.

**Bài 29.** Phát biểu các mệnh đề sau với thuật ngữ “điều kiện cần”, “điều kiện đủ”

- ① Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau.
- ② Nếu số nguyên dương chia hết cho 6 thì chia hết cho 3.
- ③ Nếu hình thang có hai đường chéo bằng nhau thì nó là hình thang cân.
- ④ Nếu tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và  $AH$  là đường cao thì  $AB^2 = BC \cdot BH$ .

🔗 **Lời giải.**

- ① Điều kiện cần để hai tam giác bằng nhau là chúng có diện tích bằng nhau.  
Điều kiện đủ để hai tam giác có diện tích bằng nhau là hai tam giác bằng nhau.
- ② Điều kiện cần để số nguyên dương chia hết cho 6 là chia hết cho 3.  
Điều kiện đủ để số nguyên dương chia hết cho 3 là nó chia hết cho 6.
- ③ Điều kiện cần hình thang có hai đường chéo bằng nhau là nó là hình thang cân.  
Điều kiện đủ để hình thang là hình thang cân là hình thang có hai đường chéo bằng nhau.
- ④ Điều kiện cần để tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và  $AH$  là đường cao là  $AB^2 = BC \cdot BH$ .  
Điều kiện đủ để tam giác  $ABC$  có  $AB^2 = BC \cdot BH$  là tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và  $AH$  là đường cao.

**Bài 30.** Sử dụng thuật ngữ “điều kiện cần và đủ” để phát biểu các định lí sau

- ① Một tứ giác nội tiếp được trong một đường tròn khi và chỉ khi tổng hai góc đối diện của nó bằng  $180^\circ$ .

- ② Tam giác cân khi và chỉ khi có trung tuyến bằng nhau.

**Lời giải.**

- ① Điều kiện cần và đủ để một tứ giác nội tiếp được trong một đường tròn là tổng hai góc đối diện của nó bằng  $180^\circ$ .
- ② Điều kiện cần và đủ để tam giác cân là có trung tuyến bằng nhau.

**Bài 31.** Dùng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" để phát biểu định lý sau

- ① Một tam giác là tam giác cân nếu và chỉ nếu nó có hai góc bằng nhau.
- ② Tứ giác là hình bình hành khi và chỉ khi tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

**Lời giải.**

- ① Điều kiện cần và đủ để một tam giác là tam giác cân là nó có hai góc bằng nhau.
- ② Điều kiện cần và đủ để tứ giác là hình bình hành là tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

**Bài 32.** Dùng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" để phát biểu định lý sau

- ① Tam giác  $ABC$  vuông khi và chỉ khi  $AB^2 + AC^2 = BC^2$ .
- ② Tứ giác là hình chữ nhật khi và chỉ khi nó có ba góc vuông.
- ③ Tứ giác là nội tiếp được trong đường tròn khi và chỉ khi nó có hai góc đối bù nhau.
- ④ Một số chia hết cho 2 khi và chỉ khi nó có chữ số tận cùng là số chẵn.

**Lời giải.**

- ① Điều kiện cần và đủ để tam giác  $ABC$  vuông là  $AB^2 + AC^2 = BC^2$ .
- ② Điều kiện cần và đủ để tứ giác là hình chữ nhật là nó có ba góc vuông.
- ③ Điều kiện cần và đủ để tứ giác là nội tiếp được trong đường tròn là nó có hai góc đối bù nhau.
- ④ Điều kiện cần và đủ để một số chia hết cho 2 là nó có chữ số tận cùng là số chẵn.

## D CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

**Câu 1.** Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

- Ⓐ Số  $\pi$  có phải là số nguyên không?
- Ⓑ Số 4 là một số nguyên tố.
- Ⓒ Tam giác đều có 3 góc bằng nhau và bằng  $60^\circ$  phải không?
- Ⓓ  $a^2 + b^2 = c^2$ .

**Lời giải.**

"Số 4 là một số nguyên tố" là một mệnh đề.

Chọn đáp án Ⓑ

**Câu 2.** Mệnh đề nào dưới đây sai?

- Ⓐ 10 chia hết cho 2.
- Ⓑ 2 là một ước số của 10.
- Ⓒ 2 chia hết cho 10.
- Ⓓ 2 và 10 là hai số chẵn.

**Lời giải.**

"2 chia hết cho 10" là mệnh đề sai vì 2 chia hết 10.

Chọn đáp án Ⓒ

**Câu 3.** Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

- Ⓐ 15 là số nguyên tố.
- Ⓑ  $a = b + c$ .
- Ⓒ  $x^2 + x = 0$ .
- Ⓓ  $2n + 1$  chia hết cho 3.

**Lời giải.**

"15 là số nguyên tố" là mệnh đề.

Chọn đáp án Ⓐ

**Câu 4.** Mệnh đề phủ định của mệnh đề “14 là hợp số” là mệnh đề

- (A) 14 là số nguyên tố. (B) 14 chia hết cho 2.  
(C) 14 không phải là hợp số. (D) 14 chia hết cho 7.

**Lời giải.**

Mệnh đề phủ định của mệnh đề “14 là hợp số” là mệnh đề “14 không phải là hợp số”.

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 5.** Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề sai?

- (A) 20 chia hết cho 5. (B) 5 chia hết cho 20. (C) 20 là bội số của 5. (D) 5 chia hết 20.

**Lời giải.**

“5 chia hết cho 20” là mệnh đề sai vì “5 chia hết 20”.

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 6.** Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A)  $5 + 4 < 10$ . (B)  $5 + 4 > 10$ . (C)  $\sqrt{2} - 1 < 0$ . (D)  $5 + 4 \geq 10$ .

**Lời giải.**

Mệnh đề đúng là “ $5 + 4 < 10$ ”.

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 7.** Trong các câu sau, câu nào **không phải** là mệnh đề?

- (A)  $5 + 2 = 8$ . (B)  $-2 \leq 0$ . (C)  $4 - \sqrt{17} > 0$ . (D)  $5 + x = 2$ .

**Lời giải.**

“ $5 + x = 2$ ” không phải là mệnh đề.

**Chọn đáp án (D).**

**Câu 8.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- (A) Nếu “33 là hợp số” thì “15 chia hết cho 25”. (B) Nếu “7 là số nguyên tố” thì “8 là bội số của 3”.  
(C) Nếu “20 là hợp số” thì “24 chia hết cho 6”. (D) Nếu “ $3 + 9 = 12$ ” thì “ $4 > 7$ ”.

**Lời giải.**

Mệnh đề  $A \Rightarrow B$  chỉ sai khi  $A$  đúng và  $B$  sai. Do đó phương án: Nếu “20 là hợp số” thì “24 chia hết cho 6” là mệnh đề đúng.

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 9.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có mệnh đề đảo đúng?

- (A) Nếu  $a$  và  $b$  chia hết cho  $c$  thì  $a + b$  chia hết cho  $c$ .  
(B) Nếu hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.  
(C) Nếu  $a$  chia hết cho 3 thì  $a$  chia hết cho 9.  
(D) Nếu một số tận cùng bằng 0 thì số đó chia hết cho 5.

**Lời giải.**

Mệnh đề: “Nếu  $a$  chia hết cho 3 thì  $a$  chia hết cho 9” có mệnh đề đảo là “Nếu  $a$  chia hết cho 9 thì  $a$  chia hết cho 3” đúng.

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 10.** Trong các mệnh đề tương đương sau đây, mệnh đề nào sai?

- (A)  $n$  là số nguyên lẻ khi và chỉ khi  $n^2$  là số lẻ.  
(B)  $n$  chia hết cho 3 khi và chỉ khi tổng các chữ số của  $n$  chia hết cho 3.  
(C)  $ABCD$  là hình chữ nhật khi và chỉ khi  $AC = BD$ .  
(D)  $ABC$  là tam giác đều khi và chỉ khi  $AB = AC$  và  $\hat{A} = 60^\circ$ .

**Lời giải.**

Mệnh đề “ $ABCD$  là hình chữ nhật khi và chỉ khi  $AC = BD$ ” sai vì khi  $AC = BD$  thì  $ABCD$  chưa phải là hình chữ nhật.

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 11.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- (A)  $-\pi < -2 \Leftrightarrow \pi^2 < 4$ . (B)  $\pi < 4 \Leftrightarrow \pi^2 < 16$ .  
(C)  $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow 2\sqrt{23} < 2 \cdot 5$ . (D)  $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow (-2)\sqrt{23} > (-2) \cdot 5$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\pi^2 < 4 \Leftrightarrow |\pi| < 2 \Leftrightarrow -2 < \pi < 2$ .

Vậy phương án  $-\pi < -2 \Leftrightarrow \pi^2 < 4$  sai.

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 12.** Xét câu  $P(n)$ : “ $n$  chia hết cho 12”. Với giá trị nào của  $n$  thì  $P(n)$  là mệnh đề đúng?

- (A) 48. (B) 4. (C) 3. (D) 88.

**Lời giải.**

Vì  $48 \div 12 = 4$  nên khi  $n = 48$  thì  $P(n)$ : “ $n$  chia hết cho 12” là mệnh đề đúng.

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 13.** Với giá trị nào của biến số  $x$  sau đây thì mệnh đề chứa biến  $P(x)$ : “ $x^2 - 3x + 2 = 0$ ” trở thành một mệnh đề đúng?

- (A) 0. (B) 1. (C) -1. (D) -2.

**Lời giải.**

Vì  $x = 1$  thì  $P(1) = 0$  nên khi  $x = 1$  thì mệnh đề chứa biến  $P(x)$ : “ $x^2 - 3x + 2 = 0$ ” trở thành một mệnh đề đúng.

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 14.** Mệnh đề chứa biến: “ $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ ” đúng với giá trị nào của  $x$ ?

- (A)  $x = 0$ ;  $x = 2$ . (B)  $x = 0$ ;  $x = 3$ . (C)  $x = 0$ ;  $x = 2$ ;  $x = 3$ . (D)  $x = 0$ ;  $x = 1$ ;  $x = 2$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 2x = 0 &\Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy mệnh đề chứa biến: “ $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ ” đúng khi  $x = 0$ ;  $x = 1$ ;  $x = 2$ .

**Chọn đáp án (D).**

**Câu 15.** Cho mệnh đề  $P$ : “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 \neq 0$ ”,  $Q$ : “ $\exists n \in \mathbb{Z}, n = n^2$ ”. Xét tính đúng, sai của hai mệnh đề  $P, Q$ .

- (A)  $P$  đúng và  $Q$  sai. (B)  $P$  sai và  $Q$  đúng. (C)  $P, Q$  đều đúng. (D)  $P, Q$  đều sai.

**Lời giải.**

Khi  $x = 1$  thì  $x^2 - 1 = 0$ , do đó mệnh đề  $P$  sai.

Khi  $n = 1$  thì  $n = n^2$ , do đó mệnh đề  $Q$  đúng.

Vậy  $P$  sai và  $Q$  đúng.

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 16.** Với số thực  $x$  bất kì, mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A)  $\forall x, x^2 \leq 16 \Leftrightarrow x \leq \pm 4$ . (B)  $\forall x, x^2 \leq 16 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$ .  
(C)  $\forall x, x^2 \leq 16 \Leftrightarrow x \leq -4, x \geq 4$ . (D)  $\forall x, x^2 \leq 16 \Leftrightarrow -4 < x < 4$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\forall x, x^2 \leq 16 \Leftrightarrow |x| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$ .

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 17.** Với số thực  $x$  bất kì, mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A)  $\forall x, x^2 > 5 \Rightarrow x > \sqrt{5}$  hoặc  $x < -\sqrt{5}$ . (B)  $\forall x, x^2 > 5 \Rightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$ .  
(C)  $\forall x, x^2 > 5 \Rightarrow x > \pm\sqrt{5}$ . (D)  $\forall x, x^2 > 5 \Rightarrow x \geq \sqrt{5}$  hoặc  $x \leq -\sqrt{5}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\forall x, x^2 > 5 \Rightarrow x > \sqrt{5}$  hoặc  $x < -\sqrt{5}$ .

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 18.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- (A)  $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x^2$ . (B)  $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 3 \Leftrightarrow x < 3$ .  
(C)  $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$  chia hết cho 3. (D)  $\exists a \in \mathbb{Q}, a^2 = 2$ .

**Lời giải.**

☑ Mệnh đề  $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 3 \Leftrightarrow x < 3$  sai vì  $-4 < 3$  nhưng  $|-4| > 3$ .

☑ Mệnh đề  $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$  chia hết cho 3 sai, vì chẳng hạn chọn  $n = 1 \in \mathbb{N}$  thì 2 không chia hết cho 3.

☑ Xét mệnh đề  $\exists a \in \mathbb{Q}, a^2 = 2$ . Ta có

$$a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Do đó mệnh đề này sai.

Vậy mệnh đề đúng là  $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x^2$ .

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 19.** Với giá trị nào của  $x$  mệnh đề chứa biến  $P(x)$ : " $2x^2 - 1 < 0$ " là mệnh đề đúng?

- (A) 0. (B) 5. (C) 1. (D)  $\sqrt{2}$ .

**Lời giải.**

Với  $x = 0$  thì  $P(x) = -1 < 0$ , khi đó mệnh đề  $P(x)$  đúng

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 20.** Cho mệnh đề  $P(x)$ : " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$ ". Phủ định của mệnh đề  $P(x)$  là

- (A)  $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$ . (B)  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$ .  
(C)  $\forall x \notin \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$ . (D)  $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$ .

**Lời giải.**

Phủ định của mệnh đề  $P(x)$  là  $\overline{P(x)}$ :  $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$ .

**Chọn đáp án (D).**

**Câu 21.** Trong các câu sau, câu nào đúng?

- (A) Phủ định của mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{Q}, 4x^2 - 1 = 0$ " là mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{Q}, 4x^2 - 1 > 0$ ".  
(B) Phủ định của mệnh đề " $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$  chia hết cho 4" là mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$  không chia hết cho 4".  
(C) Phủ định của mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R}, (x - 1)^2 \neq x - 1$ " là mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R}, (x - 1)^2 = x - 1$ ".  
(D) Phủ định của mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > n$ " là mệnh đề " $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 < n$ ".

**Lời giải.**

- ☑ Phủ định của mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{Q}, 4x^2 - 1 = 0$ " là mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{Q}, 4x^2 - 1 \neq 0$ ".  
☑ Phủ định của mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R}, (x - 1)^2 \neq x - 1$ " là mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R}, (x - 1)^2 = x - 1$ ".  
☑ Phủ định của mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > n$ " là mệnh đề " $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 \leq n$ ".

Vậy phủ định của mệnh đề " $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$  chia hết cho 4" là mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$  không chia hết cho 4" là khẳng định đúng.

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 22.** Mệnh đề phủ định của mệnh đề  $P(x)$ : " $x^2 + 3x + 1 > 0$  với mọi  $x$ " là

- (A) Tồn tại  $x$  sao cho  $x^2 + 3x + 1 > 0$ . (B) Tồn tại  $x$  sao cho  $x^2 + 3x + 1 \leq 0$ .  
(C) Tồn tại  $x$  sao cho  $x^2 + 3x + 1 = 0$ . (D) Tồn tại  $x$  sao cho  $x^2 + 3x + 1 < 0$ .

**Lời giải.**

Mệnh đề phủ định của mệnh đề  $P(x)$  là "Tồn tại  $x$  sao cho  $x^2 + 3x + 1 \leq 0$ ".

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 23.** Mệnh đề phủ định của mệnh đề  $P(x)$ : " $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 + 2x + 5$  là số nguyên tố" là

- (A)  $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 + 2x + 5$  không là số nguyên tố. (B)  $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 + 2x + 5$  không là số nguyên tố.  
(C)  $\forall x \notin \mathbb{R}: x^2 + 2x + 5$  không là số nguyên tố. (D)  $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 + 2x + 5$  là số thực.

**Lời giải.**

Mệnh đề phủ định của mệnh đề  $P(x)$  là  $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 + 2x + 5$  không là số nguyên tố.

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 24.** Mệnh đề phủ định của mệnh đề  $P(x)$ : " $\exists x \in \mathbb{R}: 5x - 3x^2 = 1$ " là

- (A)  $\exists x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 = 1$ . (B)  $\forall x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 = 1$ . (C)  $\forall x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 \neq 1$ . (D)  $\exists x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 \geq 1$ .

**Lời giải.**

Mệnh đề phủ định của mệnh đề  $P(x)$  là  $\forall x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 \neq 1$ .

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 25.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào không phải là định lý?

- (A)  $\forall x \in \mathbb{N}, x^2$  chia hết cho 3  $\Rightarrow x$  chia hết cho 3. (B)  $\forall x \in \mathbb{N}, x^2$  chia hết cho 6  $\Rightarrow x$  chia hết cho 3.  
(C)  $\forall x \in \mathbb{N}, x^2$  chia hết cho 9  $\Rightarrow x$  chia hết cho 9. (D)  $\forall x \in \mathbb{Z}, x$  chia hết cho 4 và 6  $\Rightarrow x$  chia hết cho 12.

**Lời giải.**

Xét mệnh đề  $\forall x \in \mathbb{N}, x^2$  chia hết cho 9  $\Rightarrow x$  chia hết cho 9, với  $x = 3$  thì  $x^2 = 3^2 = 9$  chia hết cho 9, nhưng 3 không chia hết cho 9.

Do đó mệnh đề  $\forall x \in \mathbb{N}, x^2$  chia hết cho 9  $\Rightarrow x$  chia hết cho 9 không phải là định lý.

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 26.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là định lý?

- (A)  $\forall x \in \mathbb{R}, x > -2 \Rightarrow x^2 > 4$ . (B)  $\forall x \in \mathbb{R}, x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$ .  
(C)  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$ . (D) Nếu  $a + b$  chia hết cho 3 thì  $a, b$  đều chia hết cho 3.

**Lời giải.**

- ☑ Xét mệnh đề  $\forall x \in \mathbb{R}, x > -2 \Rightarrow x^2 > 4$ : Với  $x = 1 > -2$  nhưng  $(-1)^2 = 1 < 4$ . Do đó mệnh đề này sai.
- ☑ Xét mệnh đề  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$ , ta có  $x^2 > 4 \Rightarrow |x| > 2 \Rightarrow x < -\sqrt{2}$  hoặc  $x > \sqrt{2}$ . Do đó mệnh đề này sai.
- ☑ Xét mệnh đề “Nếu  $a + b$  chia hết cho 3 thì  $a, b$  đều chia hết cho 3”, ta chọn  $a = 5, b = 1$  thì  $a + b = 6$  chia hết cho 3 nhưng  $a$  và  $b$  đều không chia hết cho 3. Do đó mệnh đề này sai.

Vậy mệnh đề  $\forall x \in \mathbb{R}, x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$  là định lí.

🔗 Chọn đáp án **B** .....

## §2 TẬP HỢP

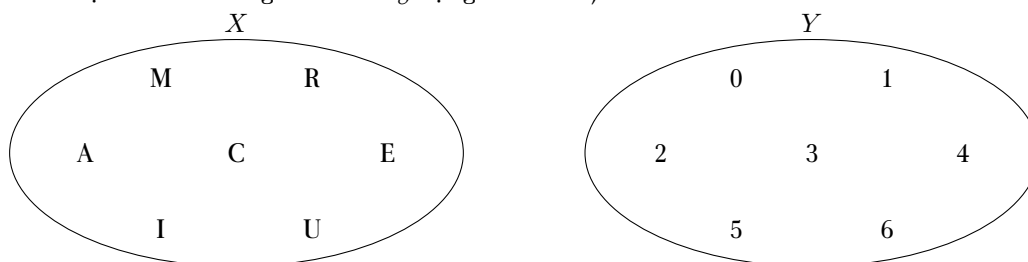
### A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

**Tập hợp** (hay còn gọi là **1 tập**) là một khái niệm nguyên thủy, không định nghĩa. Ta hiểu khái niệm tập hợp qua các ví dụ sau

#### Ví dụ 1.

- ☑  $X$  là **tập hợp** các chữ cái của chữ **MARIE CURIE**.
- ☑  $Y$  là **tập hợp** các số tự nhiên nhỏ hơn 7.

Hai tập hợp  $X$  và  $Y$  trong ví dụ trên được minh hoạ bởi một đường cong khép kín mà ta gọi là **Biểu đồ Venn**. (Do nhà toán học Jonh Venn người Anh xây dựng năm 1881)



Mỗi tập hợp gồm các **phần tử** cùng có chung một hay một vài tính chất nào đó.

Phần tử  $a$  của tập hợp  $X$  được kí hiệu  $a \in X$ , còn được gọi là  $a$  thuộc tập hợp  $X$ .

Phần tử  $b$  không của tập hợp  $X$  được kí hiệu  $b \notin X$ , còn được gọi là  $b$  **không thuộc**  $X$ .

Trong lí thuyết tập hợp, người ta thừa nhận tập hợp không chứa một phần tử nào cả, tập hợp đó được gọi là **tập hợp rỗng** và kí hiệu là  $\emptyset$ .

#### Ví dụ 2. Tập hợp các nghiệm thực của phương trình $x^2 + 1 = 0$ là tập hợp rỗng.

### B CÁC DẠNG TOÁN VÀ VÍ DỤ

#### Dạng 1. Cách biểu diễn tập hợp

##### Cách 1. Liệt kê các phần tử của tập hợp.

Có thể xác định một tập hợp bằng cách liệt kê các phần tử của chúng ở giữa dấu  $\{ \}$ .

**Ví dụ:**

$X = \{0; 5; 10; 15\}$  là tập hợp các số tự nhiên nhỏ hơn 17 và chia hết cho 5.

$Y = \{1; 2\}$  là tập hợp các nghiệm của phương trình  $x^2 - 3x + 2 = 0$ .

$Z = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots, 99\}$  là tập hợp 100 số tự nhiên đầu tiên.

##### Cách 2. Nêu tính chất đặc trưng của các phần tử trong tập hợp.

Không phải mọi tập hợp đều liệt kê rành mạch được các phần tử theo thứ tự nào đó. Chẳng hạn, **tập hợp các số tự từ 1 đến 2** là không liệt kê được. (Số thực đứng sau 1 là số nào? Không biết được). Khi đó, chúng có thể được mô tả bằng các tính chất đặc trưng ở giữa dấu  $\{ \}$ , mà nhờ chúng ta có thể xác định một đối tượng nào đó có thuộc tập hợp này hay không

**Ví dụ:**

$A$  là tập hợp các số thực từ 1 đến 2 được mô tả  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$ .

#### Chú ý 1.

!

- ☑  $\mathbb{N}$  là tập hợp các số tự nhiên.
- ☑  $\mathbb{Q}$  là tập hợp các số hữu tỉ.
- ☑  $\mathbb{Z}$  là tập hợp các số nguyên.
- ☑  $\mathbb{R}$  là tập hợp các số thực.

**! Chú ý 2.** Tập hợp  $\{\emptyset\}$  là tập hợp không rỗng.

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid (2x + 4)(2x^2 - 5x) = 0\}.$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 4 < x^2 \leq 25\}.$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2n^2 - n - 3 \text{ với } n \in$$

**✿ Ví dụ 1.**  $\mathbb{N}, n < 3\}$ .

$$D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 5 < |x| \leq 6\}.$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| = 1\}.$$

**🔗 Lời giải.**

$$\textcircled{✓} \text{ Ta có } (2x + 4)(2x^2 - 5x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}; \text{ do đó } A = \{0\}.$$

$$\textcircled{✓} B = \{3; 4; 5\}.$$

$$\textcircled{✓} n \text{ là số tự nhiên và } n < 3 \text{ nên } n = 0, n = 1, n = 2, \text{ do đó } C = \{-3; -2; 3\}.$$

$$\textcircled{✓} D = \{-6; 6\}.$$

$$\textcircled{✓} |x - 1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}, \text{ do đó } E = \{0; 2\}.$$

**✿ Ví dụ 2.** Xác định các tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng của các phần tử của nó  
 $A = \{0; 2; 4; 6; 8\}.$   $B = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}.$

**🔗 Lời giải.**

$$A = \{x \mid x = 2n \text{ với } n \in \mathbb{N}, n < 5\}.$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 = 0\}.$$

### Bài tập rèn luyện

**Bài 1.** Xác định các tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của nó.

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 15 \text{ và } x \text{ là số chẵn}\}.$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3x^2 - 10x + 3 = 0\}.$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid (x^2 - 3)(x^2 - 5x + 6) = 0\}.$$

$$D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 - 8)(4x - 5) = 0\}.$$

$$E = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 1 = 0\}.$$

$$F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 4\}.$$

$$G = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 4x = 0 \text{ và } x < 1\}.$$

$$H = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2n^2 - 3, x \in \mathbb{N} \text{ và } x < 10\}.$$

**🔗 Lời giải.**

$$\textcircled{✓} A = \{4; 6; 8; 10; 12; 14\}.$$

$$\textcircled{✓} 3x^2 - 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}, \text{ do đó } B = \{3\}.$$

$$\textcircled{✓} (x^2 - 3)(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}, \text{ do đó } C = \{2; 3\}.$$

$$\textcircled{✓} (x^2 - 8)(4x - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2\sqrt{2} \\ x = \frac{5}{4} \end{cases}, \text{ do đó } E = \emptyset.$$

$$\textcircled{✓} 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ nên } E = \emptyset.$$

$$\textcircled{✓} F = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$$

$$\textcircled{v} x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}, \text{ do đó } G = \{0; -2\}.$$

$$\textcircled{v} x < 10 \Leftrightarrow 2n^2 - 3 < 10 \Leftrightarrow n = 0; n = 1; n = 2. \text{ Khi đó } H = \{-3; -1; 5\}.$$

**Bài 2.** Xác định các tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng của các phần tử của nó

$$A = \{1; 3; 5; 7; 9\}.$$

$$B = \{0; 1; 4; 9; 16; 25\}.$$

$$C = \{1; 7; -3; 6\}.$$

$$D = \{-3; -2; -1; 1; 2; 3\}.$$

$$E = \emptyset.$$

$$F = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{5}{8}; \frac{7}{16}; \frac{9}{32} \right\}.$$

**Lời giải.**

$$\textcircled{v} A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2n + 1 \text{ với } n \in \mathbb{N}, n < 5\}.$$

$$\textcircled{v} B = \{x \in \mathbb{R} \mid x = n^2 \text{ với } n \in \mathbb{N}, n \leq 5\}.$$

$$\textcircled{v} C = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 8x + 7)(x^2 - 3x - 18) = 0\}.$$

$$\textcircled{v} D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < |x| \leq 3\}.$$

$$\textcircled{v} E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}.$$

$$\textcircled{v} F = \{x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{2n-1}{2^n} \text{ với } n \in \mathbb{N}^*, n < 5\}.$$

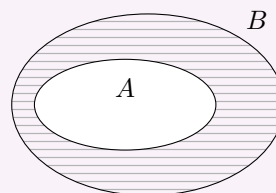
## ○ Dạng 2. Tập con - hai tập bằng nhau

Tập  $A$  được gọi là tập con của tập  $B$  nếu mọi phần tử của  $A$  đều là phần tử của  $B$  và kí hiệu  $A \subset B$ .

$$\text{! } A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Các cách gọi:

- $\textcircled{v}$   $A$  là tập con của tập  $B$ .
- $\textcircled{v}$  Tập  $A$  bị chứa trong tập  $B$ .
- $\textcircled{v}$  Tập  $B$  chứa tập  $A$  và được kí hiệu  $B \supset A$ .

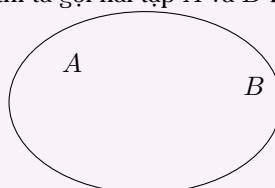


Chú ý 1

- $\text{! } \textcircled{v}$  Nếu  $A \subset B$  và  $B \subset C$  thì  $A \subset C$  (Tính bắc cầu).
- $\textcircled{v}$  Với mọi tập  $A$  ta đều có  $A \subset A$ .
- $\textcircled{v}$  Với mọi tập  $A$  ta đều có  $\emptyset \subset A$ .

**! Chú ý 2.**  $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

Cho hai tập hợp  $A$  và  $B$ . Nếu  $A \subset B$  và  $B \subset A$  thì ta gọi hai tập  $A$  và  $B$  bằng nhau, kí hiệu  $A = B$ .



$$A = B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

## C BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Xác định các tập hợp con của tập hợp  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 2)(x - x) = 0\}$

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } (x^2 - 2)(x^2 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Như vậy  $A = \{\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 0; 1\}$

Do đó các tập con của tập  $A$  là  $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{\sqrt{2}\}, \{-\sqrt{2}\}, \{0; 1\}, \{0; \sqrt{2}\}, \{0; -\sqrt{2}\}, \{1; \sqrt{2}\}, \{1; -\sqrt{2}\}, \{\sqrt{2}; -\sqrt{2}\}, \{0; 1; \sqrt{2}\}, \{0; 1; -\sqrt{2}\}, \{1; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\}, \{\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 0; 1\}$ .

**Bài 2.** Cho các tập hợp  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - x = 0\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 1\}$ ,  $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 10 < 0\}$ ,  $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 = x\}$ . Tập nào là con tập nào? Các tập nào bằng nhau?

**Lời giải.**

Ta có  $A = \{0; 1; -1\}$ ,  $B = \{-1; 0; 1\}$ ;  $C = \emptyset$ ;  $D = \{0; 1\}$ .

Như vậy  $A = B$  và  $C \subset D \subset A = B$ .

**Bài 3.** Tìm tất cả các tập hợp  $X$  sao cho  $\{1; 3\} \subset X$  và  $X \subset \{1; 2; 3; 4; 5\}$ .

**Lời giải.**

Yêu cầu bài toán cho ta các tập  $X$  như sau:

$X = \{1; 3\}$ ,  $X = \{1; 2; 3\}$ ,  $X = \{1; 3; 4\}$ ,  $X = \{1; 3; 5\}$ ,  $X = \{1; 2; 3; 4\}$ ,  $X = \{1; 2; 3; 5\}$ ,  $X = \{1; 3; 4; 5\}$ ,  $X = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ .

**Bài 4.** Tìm tất cả các tập hợp  $X$  sao cho  $X \subset \{-3; -2; 0; 1; 3\}$  và  $X \subset \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ .

**Lời giải.**

Yêu cầu bài toán cho ta các tập  $X$  như sau:

$X = \emptyset$ ,  $X = \{0\}$ ,  $X = \{1\}$ ,  $X = \{3\}$ ,  $X = \{1; 3\}$ ,  $X = \{0; 1\}$ ,  $X = \{0; 3\}$ ,  $X = \{0; 1; 3\}$ .

**Bài 5.** Cho các tập hợp  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - x = 0\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 - x)(x^2 - 3x + 2) = 0\}$ ,  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 10 = 0\}$ ,  $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 5\}$ . Tập nào là con tập nào? Các tập nào bằng nhau?

**Lời giải.**

Ta có  $A = \{0; 1; -1\}$ ,  $B = \{0; 1; 2\}$ ,  $C = \emptyset$ ,  $D = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ .

Như vậy  $A, B, C$  là các tập con của  $D$ . Không có hai tập nào bằng nhau.

**Bài 6.** Cho ba tập hợp  $A = \{1; 2; -1\}$ ,  $B = \{2; -1\}$ ,  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$

Tập nào là con tập nào? Các tập nào bằng nhau?

**Lời giải.**

$C = \{-1; 1\}$ . Do đó các tập  $B, C$  là tập con của tập  $A$ .

**Bài 7.** Tìm tất cả các tập con của tập  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 6\}$  mà có hai phần tử.

**Lời giải.**

Ta có  $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ . Do đó các tập con có hai phần tử của tập hợp  $A$  là  $\{0; 1\}, \{0; 2\}, \{0; 3\}, \{0; 4\}, \{0; 5\}, \{1; 2\}, \{1; 3\}, \{1; 4\}, \{1; 5\}, \{2; 3\}, \{2; 4\}, \{2; 5\}, \{3; 4\}, \{3; 5\}, \{4; 5\}$ .

**Bài 8.** Tìm tất cả các tập con của tập  $X = \{a; b; c; d\}$  thoả

- Có trên hai phần tử
- Có đúng hai phần tử
- Có ít hơn hai phần tử
- Không có phần tử  $c$

**Lời giải.**

- Các tập hợp con có trên hai phần tử là  $\{a; b; c\}, \{a; b; d\}, \{b; c; d\}, \{a; b; c; d\}$ .
- Các tập con có đúng hai phần tử là  $\{a; b\}, \{a; c\}, \{a; d\}, \{b; c\}, \{b; d\}, \{c; d\}$ .
- Các tập hợp con có ít hơn hai phần tử là  $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$ .
- Các tập hợp con Không có phần tử  $c$  là  $\{a\}, \{b\}, \{d\}, \{a; b\}, \{a; d\}, \{b; d\}, \{a; b; d\}$ .

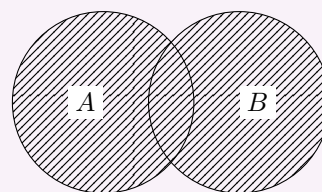
## Dạng 1. Các phép toán trên tập hợp

### ① Phép hợp

**Hợp** của hai tập hợp  $A$  và  $B$  là một tập hợp gồm tất cả các phần tử thuộc  $A$  hoặc thuộc  $B$ .

Kí hiệu  $A \cup B$ .

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ hoặc } x \in B.$$



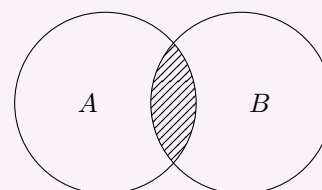
$A \cup B$  là phần gạch chéo

### ② Phép giao

**Giao** của hai tập hợp  $A$  và  $B$  là một tập hợp gồm tất cả các phần tử thuộc cả  $A$  và  $B$ .

Kí hiệu  $A \cap B$ .

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ và } x \in B.$$



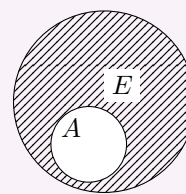
$A \cap B$  là phần gạch chéo

### ③ Phép lấy bù

Cho  $A$  là tập con của tập  $E$ . **Phần bù** của  $A$  trong  $E$  là một tập hợp gồm tất cả các phần tử của  $E$  mà không là phần tử của  $A$ .

Kí hiệu  $C_E A$ .

$$A \subset E, x \in C_E A \Leftrightarrow x \in E \text{ và } x \notin A.$$



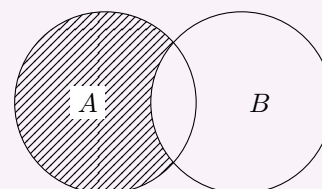
$C_E A$  là phần gạch chéo

### ④ Phép hiệu

**Hiệu** của hai tập hợp  $A$  và  $B$  là một tập hợp gồm tất cả các phần tử thuộc  $A$  nhưng không thuộc  $B$ .

Kí hiệu  $A \setminus B$ .

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ và } x \notin B.$$



$A \setminus B$  là phần gạch chéo



Nếu  $A \subset B$  thì  $A \setminus B = C_A B$ .

**Ví dụ 1.** Cho hai tập hợp  $A$  và  $B$ . Tìm các tập hợp  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$  và  $B \setminus A$  với  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x < 7\}$  và  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x < 5\}$ .

### Lời giải.

Ta có  $A = \{3; 4; 5; 6\}$  và  $B = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ . Do đó

☑  $A \cup B = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$

☑  $A \cap B = \{3; 4\}.$

☑  $A \setminus B = \{5; 6\}.$

☑  $B \setminus A = \{-1; 0; 1; 2\}.$

**Ví dụ 2.** Cho hai tập hợp  $A$  và  $B$ . Tìm các tập hợp  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$  và  $B \setminus A$  với  $A = \{-1; 2; 3; 7\}$  và  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-2)(x-3) = 0\}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $A = \{-1; 2; 3; 7\}$  và  $B = \{2; 3\}$ . Do đó

☉  $A \cup B = \{-1; 2; 3; 7\}$ .

☉  $A \cap B = \{2; 3\}$ .

☉  $A \setminus B = \{-1; 7\}$ .

☉  $B \setminus A = \emptyset$ .

**Bài tập tự rèn luyện**

**Bài 1.** Cho hai tập hợp  $A = \{0; 1; 3; 5\}$  và  $B = \{-1; 0; 2; 3\}$ . Chứng minh  $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $A \cup B = \{-1; 0; 1; 2; 3; 5\}$  và  $A \cap B = \{0; 3\}$  nên  $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{-1; 1; 2; 5\}$ .

Mặt khác,  $A \setminus B = \{1; 5\}$  và  $B \setminus A = \{-1; 2\}$  nên  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{-1; 1; 2; 5\}$ .

Vậy  $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  (điều phải chứng minh).

**Bài 2.** Cho hai tập hợp  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^3 - 8)(2x^2 - x - 3) = 0\}$  và  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2|x| - 5 \leq 0\}$ . Tìm tập hợp  $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$(x^3 - 8)(2x^2 - x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 8 = 0 \\ 2x^2 - x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Cho nên  $A = \left\{-1; \frac{3}{2}; 2\right\}$ .

Mặt khác

$$2|x| - 5 \leq 0 \Leftrightarrow 2|x| \leq 5 \Leftrightarrow |x| \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}.$$

Cho nên  $B = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ .

Khi đó  $A \cup B = \left\{-2; -1; 0; 1; \frac{3}{2}; 2\right\}$  và  $A \cap B = \{-1; 2\}$ . Do đó  $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \left\{-2; 0; 1; \frac{3}{2}\right\}$ .

**Bài 3.** Cho ba tập hợp  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid (x-5)(x^2+1) < 0\}$  và  $C = \left\{k \in \mathbb{N} \mid \frac{2k+12}{k^2+k} \text{ là số nguyên}\right\}$ .

Tìm tập hợp  $A \cap B \cap C$ .

**Lời giải.**

Ta có  $A = \{2; 3; 4; \dots\}$ .

Vì  $x^2 + 1 > 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$  nên

$$(x-5)(x^2+1) < 0 \Leftrightarrow x-5 < 0 \Leftrightarrow x < 5.$$

Suy ra  $B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ .

Vì vậy  $A \cap B = \{2; 3; 4\}$ .

Mặt khác, giả sử  $k \in A \cap B \cap C$  thì  $k \in A$ ,  $k \in B$  và  $k \in C$ . Do đó, ta thử  $k = 2$ ,  $k = 3$ ,  $k = 4$  vào biểu thức  $\frac{2k+12}{k^2+k}$ .

☉ Với  $k = 2$  ta được  $\frac{2 \cdot 2 + 12}{2^2 + 2} = \frac{8}{3}$  không nguyên.

☉ Với  $k = 3$  ta được  $\frac{2 \cdot 3 + 12}{3^2 + 3} = \frac{3}{2}$  không nguyên.

☉ Với  $k = 4$  ta được  $\frac{2 \cdot 4 + 12}{4^2 + 4} = 1$  nguyên.

Vậy  $A \cap B \cap C = \{4\}$ .

**Bài 4.** Tìm tất cả các tập  $X$  thỏa mãn  $\{1; 3\} \cup X = \{0; 1; 2; 3\}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\{0; 1; 2; 3\} \setminus \{1; 3\} = \{0; 2\}$  cho nên tất cả các tập  $X$  cần tìm là  $\{0; 2\}$ ,  $\{0; 1; 2\}$ ,  $\{0; 2; 3\}$ ,  $\{0; 1; 2; 3\}$ .

**Bài 5.** Xác định hai tập hợp  $A$  và  $B$  biết rằng  $A \setminus B = \{1; 5; 7; 8\}$ ,  $B \setminus A = \{2; 10\}$  và  $A \cap B = \{3; 6; 9\}$ .

**Lời giải.**

Vì  $A \setminus B = \{1; 5; 7; 8\}$  nên  $\{1; 5; 7; 8\} \subset A$  và  $1 \notin B$ ,  $5 \notin B$ ,  $7 \notin B$ ,  $8 \notin B$ . (1)

Vì  $B \setminus A = \{2; 10\}$  nên  $2 \notin A$ ,  $10 \notin A$  và  $\{2; 10\} \subset B$ . (2)

Vì  $A \cap B = \{3; 6; 9\}$  nên  $\{3; 6; 9\} \subset A$  và  $\{3; 6; 9\} \subset B$ . (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra  $A = \{1; 3; 5; 6; 7; 8; 9\}$ ,  $B = \{2; 3; 6; 9; 10\}$ .

**Bài 6.** Cho tập hợp  $A = \{1; 3; 6\}$ . Tìm tất cả các tập  $X$  thỏa mãn  $A \cup X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$  và  $A \cap X = \{3\}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \setminus A = \{2; 4; 5\}$ .

Vì  $A \cap X = \{3\}$  nên  $3 \in X$ .

Vậy tất cả các tập  $X$  cần tìm là  $\{2; 3; 4; 5\}$ ,  $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ ,  $\{2; 3; 4; 5; 6\}$ ,  $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ .

### Bài đọc thêm

**Ví dụ 1.** Câu lạc bộ ngoại ngữ của trường Marie Curie có 30 học sinh nói được tiếng Anh, 25 học sinh nói được tiếng Pháp, trong đó có 12 học sinh nói được cả hai thứ tiếng Anh và Pháp. Hỏi câu lạc bộ ngoại ngữ có bao nhiêu học sinh, trong đó có bao nhiêu học sinh chỉ nói được tiếng Anh, bao nhiêu học sinh chỉ nói được tiếng Pháp?

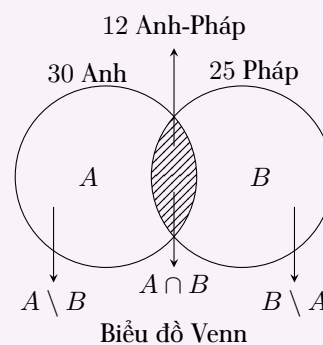
**Lời giải.**

Gọi  $A$  là tập hợp “các học sinh nói được tiếng Anh” thì số phần tử của  $A$  là 30.

Gọi  $B$  là tập hợp “các học sinh nói được tiếng Pháp” thì số phần tử của  $B$  là 25.

Dựa vào đồ Venn ta có

- ☑  $A \cap B$  là tập hợp các học sinh nói được cả hai thứ tiếng Anh và Pháp. Suy ra  $A \cap B$  có 12 phần tử.
- ☑  $A \setminus B$  là tập hợp các học sinh chỉ nói được tiếng Anh. Suy ra  $A \setminus B$  có  $30 - 12 = 18$  phần tử (là số học sinh chỉ nói được tiếng Anh).
- ☑  $B \setminus A$  là tập hợp các học sinh chỉ nói được tiếng Pháp. Suy ra  $B \setminus A$  có  $25 - 12 = 13$  phần tử (là số học sinh chỉ nói được tiếng Pháp).
- ☑  $A \cup B$  là tập hợp các học sinh trong câu lạc bộ.  
Ta có  $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ .  
Suy ra  $A \cup B$  có  $18 + 12 + 13 = 43$  phần tử (là số học sinh trong câu lạc bộ).



**Ví dụ 2.** Lớp 10X có 30 học sinh trong đó có 25 học sinh nói được tiếng Anh và 18 học sinh nói được tiếng Pháp. Hỏi có bao nhiêu học sinh nói được cả hai thứ tiếng Anh và Pháp?

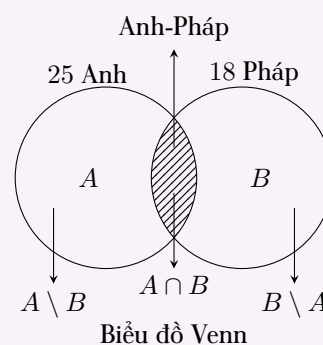
**Lời giải.**

Gọi  $A$  là tập hợp “các học sinh nói được tiếng Anh” thì số phần tử của  $A$  là 25.

Gọi  $B$  là tập hợp “các học sinh nói được tiếng Pháp” thì số phần tử của  $B$  là 18.

Dựa vào đồ Venn ta có

- ☑  $A \cup B$  là tập hợp các học sinh lớp 10X. Suy ra  $A \cup B$  có 30 phần tử.
- ☑  $A \setminus B$  là tập hợp các học sinh chỉ nói được tiếng Anh.  
Ta có  $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$ .  
Suy ra  $A \setminus B$  có  $30 - 18 = 12$  phần tử (là số học sinh chỉ nói được tiếng Anh).
- ☑  $B \setminus A$  là tập hợp các học sinh chỉ nói được tiếng Pháp.  
Ta có  $B \setminus A = (A \cup B) \setminus A$ .  
Suy ra  $B \setminus A$  có  $30 - 25 = 5$  phần tử (là số học sinh chỉ nói được tiếng Pháp).



- ☉  $A \cap B$  là tập hợp các học sinh nói được cả hai thứ tiếng Anh và Pháp.  
 Ta có  $A \cap B = (A \cup B) \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$ .  
 Suy ra  $A \cap B$  có  $30 - (12 + 5) = 13$  phần tử (là số học sinh nói được cả hai thứ tiếng Anh và Pháp).

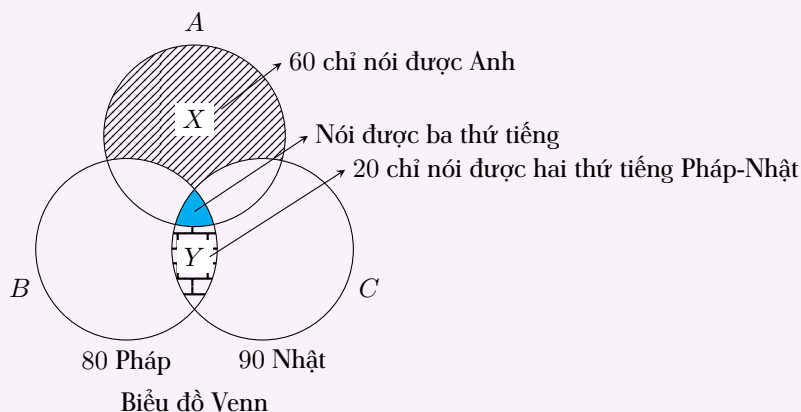
**Ví dụ 3.** Có 200 học sinh trường Marie Curie tham gia câu lạc bộ ngoại ngữ của nhà trường, trong đó có 60 học sinh chỉ nói được tiếng Anh, 80 học sinh nói được tiếng Pháp và 90 học sinh nói được tiếng Nhật. Hỏi có bao nhiêu học sinh nói được ba thứ tiếng Anh, Pháp và Nhật? Biết trong 200 học sinh đó có 20 học sinh chỉ nói được hai thứ tiếng Pháp và Nhật.

**Lời giải.**

Gọi  $A$  là tập hợp “các học sinh nói được tiếng Anh”.

Gọi  $B$  là tập hợp “các học sinh nói được tiếng Pháp” thì số phần tử của  $B$  là 80.

Gọi  $C$  là tập hợp “các học sinh nói được tiếng Nhật” thì số phần tử của  $C$  là 90.



Dựa vào biểu đồ Ven ta có

- ☉ Đặt  $\Omega = A \cup B \cup C$  là tập hợp các học sinh trong câu lạc bộ ngoại ngữ của nhà trường.  
 Suy ra  $\Omega$  có 200 phần tử.
- ☉ Đặt  $X = A \setminus (B \cup C)$  là tập hợp các học sinh chỉ nói được tiếng Anh.  
 Suy ra  $X$  có 60 phần tử.
- ☉ Đặt  $Y = (B \cap C) \setminus A$  là tập hợp các học sinh chỉ nói được hai thứ tiếng Pháp và Nhật.  
 Suy ra  $Y$  có 20 phần tử.
- ☉ Ta có  $B \cup C = \Omega \setminus X$ .  
 Suy ra  $B \cup C$  có  $200 - 60 = 140$  phần tử.  
 Ta có  $|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|$ . Suy ra  $B \cap C$  có  $(80 + 90) - 140 = 30$  phần tử.
- ☉ Ta có  $A \cap B \cap C = (B \cap C) \setminus Y$  là tập hợp các học sinh nói được ba thứ tiếng.  
 Suy ra  $A \cap B \cap C$  có  $30 - 20 = 10$  phần tử.

Vậy số học sinh nói được ba thứ tiếng Anh, Pháp, Nhật là 10 học sinh.

**Ví dụ 4.** Có 100 học sinh trường Marie Curie tham gia câu lạc bộ ngoại ngữ của nhà trường, mỗi học sinh nói được một hoặc hai trong ba thứ tiếng Anh, Pháp, Nhật. Có 39 học sinh chỉ nói được tiếng Anh, 35 học sinh nói được tiếng Pháp và 8 học sinh nói được cả tiếng Anh và Nhật. Hỏi có bao nhiêu học sinh chỉ nói được tiếng Nhật?

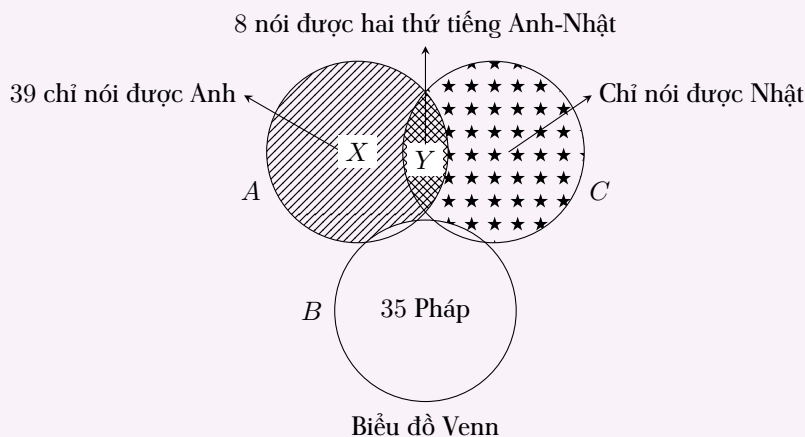
**Lời giải.**

Gọi  $A$  là tập hợp “các học sinh nói được tiếng Anh”.

Gọi  $B$  là tập hợp “các học sinh nói được tiếng Pháp” thì số phần tử của  $B$  là 35.

Gọi  $C$  là tập hợp “các học sinh nói được tiếng Nhật”.

Vì mỗi học sinh nói được một hoặc hai trong ba thứ tiếng nên  $A \cap B \cap C = \emptyset$ .



Dựa vào biểu đồ Venn ta có

- ☑ Đặt  $\Omega = A \cup B \cup C$  là tập hợp các học sinh trong câu lạc bộ ngoại ngữ của nhà trường.  
Suy ra  $\Omega$  có 100 phần tử.
- ☑ Đặt  $X = A \setminus (B \cup C)$  là tập hợp các học sinh chỉ nói được tiếng Anh.  
Suy ra  $X$  có 39 phần tử.
- ☑ Đặt  $Y = A \cap C$  là tập hợp các học sinh nói được cả hai thứ tiếng Anh và Nhật.  
Suy ra  $Y$  có 8 phần tử.
- ☑ Ta có  $B \cup C = \Omega \setminus X$ .  
Suy ra  $B \cup C$  có  $100 - 39 = 61$  phần tử.  
Ta có  $C \setminus B = (C \cup B) \setminus B$ . Suy ra  $C \setminus B$  có  $61 - 35 = 26$  phần tử.
- ☑ Ta có  $(C \setminus B) \setminus Y$  là tập hợp các học sinh chỉ nói được tiếng Nhật.  
Suy ra  $(C \setminus B) \setminus Y$  có  $26 - 8 = 18$  phần tử.

Vậy số học sinh chỉ nói được tiếng Nhật là 18 học sinh.

## Dạng 2. Tập con của tập số thực

| Tên gọi     | Kí hiệu              | Tập hợp                                     | Biểu diễn trên trục số<br>(Phần không bị gạch chéo) |
|-------------|----------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| Tập số thực | $(-\infty; +\infty)$ | $\mathbb{R}$                                |                                                     |
| Đoạn        | $[a; b]$             | $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ |                                                     |
| Khoảng      | $(a; b)$             | $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$       |                                                     |
| Nửa khoảng  | $[a; b)$             | $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$    |                                                     |
| Nửa khoảng  | $(a; b]$             | $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$    |                                                     |
| Nửa khoảng  | $(-\infty; a]$       | $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$        |                                                     |
| Nửa khoảng  | $[a; +\infty)$       | $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$        |                                                     |
| Khoảng      | $(-\infty; a)$       | $\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$           |                                                     |
| Khoảng      | $(a; +\infty)$       | $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$           |                                                     |

**Vi dụ 1.** Các tập sau là các đoạn, khoảng, nửa khoảng nào? Vẽ hình.

①  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x < 7\}$ .

②  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 5x + 1 \geq 8\}$ .

**Lời giải.**

① Ta có  $A = (-6; 7)$ . Biểu diễn



② Ta có

$$5x + 1 \geq 8 \Leftrightarrow 5x \geq 7 \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{5}.$$

Vậy  $B = \left[ \frac{7}{5}; +\infty \right)$ . Biểu diễn



**Ví dụ 2.** Các mệnh đề sau là đúng hay sai? Giải thích.

①  $\{-4; 2\} \subset [-4; 2]$ .

②  $[1; +\infty) = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$ .

**Lời giải.**

① Mệnh đề đúng. Thật vậy, vì  $-4 \in [-4; 2]$  và  $2 \in [-4; 2]$  nên  $\{-4; 2\} \subset [-4; 2]$ .

② Mệnh đề sai. Thật vậy, vì  $1,5 \in [1; +\infty)$  nhưng  $1,5 \notin \{1; 2; 3; 4; \dots\}$  nên hai tập hợp đã cho không bằng nhau.

**Ví dụ 3.** Xác định các tập hợp sau và biểu diễn trên trục số.

①  $(-2; 7) \cap (3; +\infty)$ .

②  $(-3; 4) \cup \{-3; 4\}$ .

**Lời giải.**

① Ta có  $(-2; 7) \cap (3; +\infty) = (3; 7)$ . Biểu diễn



② Ta có  $(-3; 4) \cup \{-3; 4\} = [-3; 4]$ . Biểu diễn



**Ví dụ 4.** Xác định các tập hợp  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$  và biểu diễn bằng trục số trong các trường hợp sau.

①  $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ ,  $B = \{-3; -2; -1; 0; 1\}$ .

②  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$ .

③  $A = (-1; 2018)$ ,  $B = [-2019; 9]$ .

④  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2018\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ .

**Lời giải.**

① Ta có

☑  $A \cap B = \{1\}$ .

☑  $A \cup B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ .

☑  $A \setminus B = \{2; 3; 4; 5\}$ .

☑  $B \setminus A = \{-3; -2; -1; 0\}$ .

② Ta có  $A = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$  và  $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ .

☑  $A \cap B = \{0; 1; 2; 3\}$ .

☑  $A \cup B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$

☑  $A \setminus B = \{-3; -2; -1\}.$

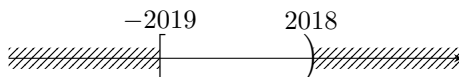
☑  $B \setminus A = \{4; 5; 6\}.$

③ Ta có

☑  $A \cap B = (-1; 9].$  Biểu diễn



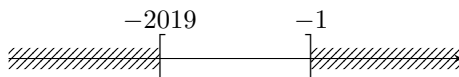
☑  $A \cup B = [-2019; 2018].$  Biểu diễn



☑  $A \setminus B = (9; 2018].$  Biểu diễn



☑  $B \setminus A = [-2019; -1].$  Biểu diễn

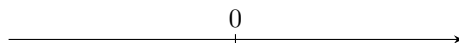


④ Ta có  $A = (-\infty; 2018]$  và  $B = (0; +\infty).$

☑  $A \cap B = (0; 2018].$  Biểu diễn



☑  $A \cup B = (-\infty; +\infty).$  Biểu diễn



☑  $A \setminus B = (-\infty; 0].$  Biểu diễn



☑  $B \setminus A = (2018; +\infty).$  Biểu diễn



**Ví dụ 5.** Cho tập hợp  $M = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}.$

- ① Tìm tất cả tập hợp con có 1 phần tử của tập  $M$ .
- ② Tìm tất cả tập hợp con có 2 phần tử của tập  $M$ .
- ③ Tập  $M$  có tất cả bao nhiêu tập hợp con?
- ④ Tập  $M$  có tất cả bao nhiêu tập hợp con có ít nhất 1 phần tử?
- ⑤ Tập  $M$  có tất cả bao nhiêu tập hợp con khác  $M$ ?

**Lời giải.**

- ① Tất cả tập con có 1 phần tử của  $M$  là  $\{-2\}, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}.$

- ② Tất cả tập con có 2 phần tử của  $M$  là  $\{-2; -1\}, \{-2; 0\}, \{-2; 1\}, \{-2; 2\}, \{-2; 3\}, \{-2; 4\}, \{-2; 5\}, \{-1; 0\}, \{-1; 1\}, \{-1; 2\}, \{-1; 3\}, \{-1; 4\}, \{-1; 5\}, \{0; 1\}, \{0; 2\}, \{0; 3\}, \{0; 4\}, \{0; 5\}, \{1; 2\}, \{1; 3\}, \{1; 4\}, \{1; 5\}, \{2; 3\}, \{2; 4\}, \{2; 5\}, \{3; 4\}, \{3; 5\}, \{4; 5\}$ .
- ③ Tập hợp  $M$  có 8 phần tử. Số tập hợp con của  $M$  là  $2^8 = 256$ .
- ④ Tập con không có phần tử của  $M$  là  $\emptyset$ .  
Số tập hợp con có ít nhất 1 phần tử của  $M$  là  $2^8 - 1 = 255$ .
- ⑤ Số tập hợp con khác  $M$  là  $2^8 - 1 = 255$ .

### Bài tập tự rèn luyện

**Bài 1.** Các tập hợp sau là các đoạn, khoảng, nửa khoảng nào? Vẽ hình.

- ①  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x + 1 \leq 3\}$ .                      ②  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < 3x - 2 \leq 2\}$ .
- ③  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < 2x + 3 < 4\}$ .                      ④  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq 2x < 3\}$ .
- ⑤  $E = \{x \in \mathbb{R} \mid 5x - 3 \leq 0\}$ .                      ⑥  $H = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 7 > 4\}$ .

### Lời giải.

- ① Ta có

$$-2 \leq x + 1 \leq 3 \Leftrightarrow -2 - 1 \leq x \leq 3 - 1 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 2.$$

Vậy  $A = [-3; 2]$ . Biểu diễn



- ② Ta có

$$-3 < 3x - 2 \leq 2 \Leftrightarrow -3 + 2 < 3x \leq 2 + 2 \Leftrightarrow -1 < 3x \leq 4 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x \leq \frac{4}{3}.$$

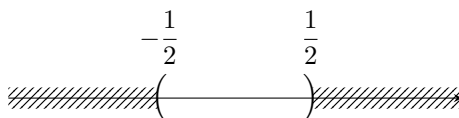
Vậy  $B = \left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right]$ . Biểu diễn



- ③ Ta có

$$2 < 2x + 3 < 4 \Leftrightarrow 2 - 3 < 2x < 4 - 3 \Leftrightarrow -1 < 2x < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

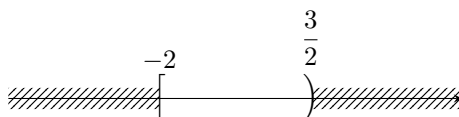
Vậy  $C = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ . Biểu diễn



- ④ Ta có

$$-4 \leq 2x < 3 \Leftrightarrow -2 \leq x < \frac{3}{2}.$$

Vậy  $D = \left[-2; \frac{3}{2}\right)$ . Biểu diễn



⑤ Ta có

$$5x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow 5x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{5}.$$

Vậy  $E = \left(-\infty; \frac{3}{5}\right]$ . Biểu diễn



⑥ Ta có

$$2x - 7 > 4 \Leftrightarrow 2x > 4 + 7 \Leftrightarrow 2x > 11 \Leftrightarrow x > \frac{11}{2}.$$

Vậy  $H = \left(\frac{11}{2}; +\infty\right)$ . Biểu diễn



**Bài 2.** Các mệnh đề sau là đúng hay sai? Giải thích.

①  $(-1; 3) = \{-1; 0; 1; 2; 3\}.$

②  $(-2; 2] = [-2; 2).$

③  $\mathbb{N} \subset [0; +\infty).$

④  $\{-3; 1\} \setminus (-3; 1) = \{-3; 1\}.$

**Lời giải.**

- ① Mệnh đề sai. Thật vậy, vì  $-1 \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}$  nhưng  $-1 \notin (-1; 3]$  nên hai tập hợp đã cho không bằng nhau.  
 ② Mệnh đề sai. Thật vậy, vì  $-2 \in [-2; 2)$  nhưng  $-2 \notin (-2; 2]$  nên hai tập hợp đã cho không bằng nhau.  
 ③ Mệnh đề đúng. Thật vậy, vì  $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$  và tất cả các phần tử của  $\mathbb{N}$  đều thuộc tập  $[0; +\infty)$  nên  $\mathbb{N} \subset [0; +\infty).$   
 ④ Mệnh đề đúng. Thật vậy, vì  $-3 \notin (-3; 1)$  và  $1 \notin (-3; 1)$  nên  $\{-3; 1\} \setminus (-3; 1) = \{-3; 1\}.$

**Bài 3.** Xác định các tập hợp sau và biểu diễn trên trục số.

①  $[-3; 1) \cup (0; 4].$

②  $(-1; 2] \cup [-2; 1).$

**Lời giải.**

① Ta có  $[-3; 1) \cup (0; 4] = [-3; 4].$  Biểu diễn



② Ta có  $(-1; 2] \cup [-2; 1) = [-2; 2].$  Biểu diễn



**Bài 4.** Xác định các tập hợp sau và biểu diễn trên trục số.

①  $(-8; 4] \cap [-1; 4].$

②  $(-\infty; 3) \cap [-2; 6).$

③  $[-3; 5] \setminus (-2; 7).$

④  $[-2; +\infty) \setminus (-4; 5].$

**Lời giải.**

- ① Ta có  $(-8; 4] \cap [-1; 4] = [-1; 4]$ . Biểu diễn



- ② Ta có  $(-\infty; 3) \cap [-2; 6] = [-2; 3)$ . Biểu diễn



- ③ Ta có  $[-3; 5] \setminus (-2; 7) = [-3; -2]$ . Biểu diễn



- ④ Ta có  $[-2; +\infty) \setminus (-4; 5] = (5; +\infty)$ . Biểu diễn



**Bài 5.** Cho hai tập  $A = [4; 7]$  và  $B = (m; 9)$ . Tìm số thực  $m$  sao cho

- ①  $A \cap B = \emptyset$ .                      ②  $A \subset B$ .                      ③  $A \setminus B = \emptyset$ .

**Lời giải.**

- ①  $A \cap B = \emptyset$  khi  $m \geq 7$ .  
 ②  $A \subset B$  khi  $m < 4$ .  
 ③  $A \setminus B = \emptyset$  khi  $A \subset B$ , tức là  $m < 4$ .

**D CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN**

**Câu 1.** Khẳng định nào sau đây là đúng?

- Ⓐ  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ .                      Ⓑ  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{N}$ .                      Ⓒ  $\mathbb{R} \subset \mathbb{Q}$ .                      Ⓓ  $\mathbb{R} \subset \mathbb{Z}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

🔍 Chọn đáp án Ⓐ.

**Câu 2.** Cho  $A$  là tập hợp các hình thoi,  $B$  là tập hợp các hình chữ nhật và  $C$  là tập hợp các hình vuông. Khi đó

- Ⓐ  $A \cap B = C$ .                      Ⓑ  $A \cup B = C$ .                      Ⓒ  $A \setminus B = C$ .                      Ⓓ  $B \setminus A = C$ .

**Lời giải.**

Ta thấy hình vuông là hình chữ nhật. Hình vuông cũng là hình thoi. Vậy  $A \cap B = C$ .

🔍 Chọn đáp án Ⓐ.

**Câu 3.** Cách viết nào sau đây không đúng?

- Ⓐ  $1 \in \mathbb{N}$ .                      Ⓑ  $1 \in \mathbb{N}$ .                      Ⓒ  $\{1\} \subset \mathbb{N}$ .                      Ⓓ  $1 \in \mathbb{N}^*$ .

**Lời giải.**

Số 1 là một phần tử của tập số tự nhiên, do đó cách viết  $1 \in \mathbb{N}$  không đúng.

🔍 Chọn đáp án Ⓐ.

**Câu 4.** Có bao nhiêu cách cho một tập hợp?

- Ⓐ 1.                      Ⓑ 2.                      Ⓒ 3.                      Ⓓ 4.

**Lời giải.**

Có hai cách xác định một tập hợp

- ☑ Liệt kê các phần tử của nó;
- ☑ Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó.

🔍 Chọn đáp án (B).....

**Câu 5.** Có bao nhiêu phép toán trên tập hợp?

- (A) 5. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

🔍 Lời giải.

Các phép toán trên tập hợp gồm

- ☑ Giao của hai tập hợp;
- ☑ Hợp của hai tập hợp;
- ☑ Hiệu và phần bù của hai tập hợp.

🔍 Chọn đáp án (C).....

**Câu 6.** Cách viết nào sau đây thể hiện tập hợp  $A$  bằng  $B$ ?

- (A)  $A = B$ . (B)  $A \neq B$ . (C)  $A < B$ . (D)  $A \subset B$ .

🔍 Lời giải.

Khi  $A \subset B$  và  $B \subset A$  ta nói tập hợp  $A$  bằng tập hợp  $B$  và viết là  $A = B$ .

🔍 Chọn đáp án (A).....

**Câu 7.** Số tập con của tập  $A = \{1; 2; 3\}$  là

- (A) 8. (B) 6. (C) 5. (D) 7.

🔍 Lời giải.

Số tập con của tập gồm  $n$  phần tử là  $2^n$ . Tập  $A$  có 3 phần tử, do đó có  $2^3 = 8$  tập con.

🔍 Chọn đáp án (A).....

**Câu 8.** Viết tập  $M = \{x \in \mathbb{N} \text{ sao cho } \sqrt{x} \text{ là ước của } 8\}$  dạng liệt kê các phần tử là

- (A)  $M = \{1; 4; 16; 64\}$ . (B)  $M = \{0; 1; 4; 16; 64\}$ . (C)  $M = \{1; 2; 4; 8\}$ . (D)  $M = \{0; 1; 2; 4; 8\}$ .

🔍 Lời giải.

Ước tự nhiên của 8 là 1; 2; 4; 8. Do đó

- ☑  $\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$ ;
- ☑  $\sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$ ;
- ☑  $\sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$ ;
- ☑  $\sqrt{x} = 8 \Rightarrow x = 64$ ;

🔍 Chọn đáp án (A).....

**Câu 9.** Xác định tập hợp  $M = \{1; 3; 9; 27; 81\}$  bằng cách nêu tính chất đặc trưng của tập hợp

- (A)  $M = \{n \in \mathbb{N} \text{ sao cho } 1 \leq n \leq 8\}$ . (B)  $M = \{x \text{ sao cho } x = 3^k; k \in \mathbb{N}; 0 \leq k \leq 4\}$ .  
(C)  $M = \{n \in \mathbb{N} \text{ sao cho } n = 3^k\}$ . (D)  $M = \{\text{Có 5 số lẻ}\}$ .

🔍 Lời giải.

Ta có  $M = \{x \text{ sao cho } x = 3^k; k \in \mathbb{N}; 0 \leq k \leq 4\} = \{1; 3; 9; 27; 81\}$ .

🔍 Chọn đáp án (B).....

**Câu 10.** Cho tập  $M = \{a; b; c; d; e\}$ . Hãy chọn câu trả lời đúng trong các câu sau

- (A)  $M$  có 32 tập hợp con. (B)  $M$  có 25 tập hợp con.  
(C)  $M$  có 120 tập hợp con. (D)  $M$  có 5 tập hợp con.

🔍 Lời giải.

Số tập con của tập gồm  $n$  phần tử là  $2^n$ . Tập  $M$  có 5 phần tử, do đó  $M$  có  $2^5 = 32$  tập con.

🔍 Chọn đáp án (A).....

**Câu 11.** Cho ba tập hợp  $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \vdots 5\}$ ,  $P = \{n \in \mathbb{N} \mid n \vdots 10\}$ ,  $Q = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x + 5 = 0\}$ . Hãy chọn khẳng định đúng?

- (A)  $Q \subset P \subset M$ . (B)  $Q \subset M \subset P$ . (C)  $M \subset Q \subset P$ . (D)  $M \subset P \subset Q$ .

🔍 Lời giải.

Ta có  $M = \{5; 10; 15; \dots\}$ ,  $P = \{10; 20; 30; \dots\}$ ,  $Q = \emptyset$ . Do đó  $Q \subset P \subset M$ .

🔍 Chọn đáp án (A).....

**Câu 12.** Cho biết  $x$  là một phần tử của tập hợp  $A$ . Xét các mệnh đề sau

$$(I) : x \in A; (II) : \{x\} \in A; (III) : x \subset A; (IV) : \{x\} \subset A$$

Hỏi trong các mệnh đề trên, mệnh đề nào đúng?

- ☐ (A)  $(I)$  và  $(IV)$ . ☐ (B)  $(I)$  và  $(III)$ . ☐ (C)  $(I)$  và  $(II)$ . ☐ (D)  $(II)$  và  $(IV)$ .

**Lời giải.**

Cho  $x$  là một phần tử của tập hợp  $A$ . Khi đó  $x \in A$  và  $\{x\} \subset A$ .

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 13.** Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp  $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0\}$ .

- ☐ (A)  $X = \{0\}$ . ☐ (B)  $X = 0$ . ☐ (C)  $X = \{\emptyset\}$ . ☐ (D)  $X = \emptyset$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $x^2 + x + 1 = 0$  vô nghiệm trên  $\mathbb{R}$ . Vậy  $X = \emptyset$ .

**Chọn đáp án (D).**

**Câu 14.** Cho tập  $X = \{2; 3; 4\}$ . Hỏi tập hợp  $X$  có bao nhiêu tập hợp con?

- ☐ (A) 7. ☐ (B) 6. ☐ (C) 5. ☐ (D) 8.

**Lời giải.**

Số tập con của tập gồm  $n$  phần tử là  $2^n$ . Tập  $A$  có 3 phần tử, do đó có  $2^3 = 8$  tập con.

**Chọn đáp án (D).**

**Câu 15.** Tính số các tập con có 2 phần tử của  $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ .

- ☐ (A) 15. ☐ (B) 16. ☐ (C) 18. ☐ (D) 22.

**Lời giải.**

Số tập con có  $k$  phần tử của tập  $X$  gồm  $n$  phần tử là  $C_n^k$ . Do đó số các tập con có 2 phần tử của  $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$  là  $C_6^2 = 15$ .

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 16.** Tìm các phần tử của tập  $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x + 3 = 0\}$ .

- ☐ (A)  $X = \{1\}$ . ☐ (B)  $X = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ . ☐ (C)  $X = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$ . ☐ (D)  $X = \{0\}$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $2x^2 - 5x + 3 = 0$  có hai nghiệm trên  $\mathbb{R}$  là 1 và  $\frac{3}{2}$ . Vậy  $X = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$ .

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 17.** Hỏi tập hợp nào là tập rỗng trong các tập hợp sau?

- ☐ (A)  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 6x^2 - 7x + 1 = 0\}$ . ☐ (B)  $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 4x + 2 = 0\}$ .  
☐ (C)  $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 1\}$ . ☐ (D)  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$ .

**Lời giải.**

Ta có

- ☑ Phương trình  $6x^2 - 7x + 1 = 0$  có hai nghiệm  $x = 1 \in \mathbb{Z}$  và  $x = \frac{1}{6} \in \mathbb{Q}$ , do đó tập  $A \neq \emptyset$ .
- ☑ Phương trình  $x^2 - 4x + 2 = 0$  có hai nghiệm  $x = 2 + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  và  $x = 2 - \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ , do đó tập  $B = \emptyset$ .
- ☑ Ta có  $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ , vì  $x \in \mathbb{Z}$ , suy ra  $C = \{0\}$ , do đó tập  $C \neq \emptyset$ .
- ☑ Phương trình  $x^2 - 4x + 3 = 0$  có hai nghiệm  $x = 1 \in \mathbb{R}$  và  $x = 3 \in \mathbb{R}$ , do đó tập  $D \neq \emptyset$ .

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 18.** Cho  $A$  là tập tất cả các nghiệm của phương trình  $x^2 - 7x + 6 = 0$ ,  $B$  là tập hợp các số nguyên có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 4. Hỏi kết quả nào sau đây là đúng?

- ☐ (A)  $B \setminus A = \emptyset$ . ☐ (B)  $A \cap B = A \cup B$ . ☐ (C)  $A \setminus B = \{6\}$ . ☐ (D)  $A \cup B = A$ .

**Lời giải.**

Ta có phương trình  $x^2 - 7x + 6 = 0$  có hai nghiệm  $x = 1$  và  $x = 6$ , suy ra  $A = \{1; 6\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 4\} = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ . Khi đó

- ☑  $B \setminus A = \{-3; -2; -1; 0; 2; 3\}$ , do đó  $B \setminus A \neq \emptyset$ ;
- ☑  $A \cap B = \{1\}$ ,  $A \cup B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 6\}$ , do đó  $A \cap B \neq A \cup B$ ;
- ☑  $A \setminus B = \{6\}$ ;

☑  $A \cup B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 6\} \neq A$ .

🐞 Chọn đáp án **C**.

**Câu 19.** Cho tập hợp  $A = \{1; 2; 3\}$ . Tập hợp nào sau đây không phải là tập con của tập  $A$ ?

- (A)  $\{12; 3\}$ . (B)  $\emptyset$ . (C)  $A$ . (D)  $\{1; 2; 3\}$ .

🔗 **Lời giải.**

Tập hợp không phải là tập con của  $A$  là  $\{12; 3\}$  vì  $12 \notin A$ .

🐞 Chọn đáp án **A**.

**Câu 20.** Cho tập hợp  $X = \{0; 1; 2\}$ . Tập  $X$  có bao nhiêu tập con?

- (A) 8. (B) 6. (C) 3. (D) 5.

🔗 **Lời giải.**

Tập  $X$  có 3 phần tử, do đó nó có  $2^3 = 8$  tập con.

🐞 Chọn đáp án **A**.

**Câu 21.** Cho tập hợp  $X = \{0; 1; 2; a; b\}$ . Tập  $X$  có bao nhiêu phần tử?

- (A) 5. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

🔗 **Lời giải.**

Tập  $X$  có 5 phần tử.

🐞 Chọn đáp án **A**.

**Câu 22.** Cho tập hợp  $A = \{1; 2; 3; 5; 7\}$ ,  $B = \{2; 4; 5; 6; 8\}$ . Tập hợp  $A \cap B$  là

- (A)  $\{5\}$ . (B)  $\{2\}$ . (C)  $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ . (D)  $\{2; 5\}$ .

🔗 **Lời giải.**

Ta có  $A \cap B = \{2; 5\}$ .

🐞 Chọn đáp án **D**.

**Câu 23.** Cho tập hợp  $A = \{1; 2; 3; 5; 7\}$ ,  $B = \{2; 4; 5; 6; 8\}$ . Tập hợp  $A \setminus B$  là

- (A)  $\{4; 6; 8\}$ . (B)  $\{1; 3; 7\}$ . (C)  $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ . (D)  $\{2; 5\}$ .

🔗 **Lời giải.**

Tập hợp  $A \setminus B = \{1; 3; 7\}$ .

🐞 Chọn đáp án **B**.

**Câu 24.** Cho  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 \neq 0\}$ . Tập hợp  $A$  viết lại dạng liệt kê là

- (A)  $\mathbb{R}$ . (B)  $\{-2; 2\}$ . (C)  $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ . (D)  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

🔗 **Lời giải.**

Ta có  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ .

🐞 Chọn đáp án **C**.

**Câu 25.** Cho  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4 > 0\}$ . Tập hợp  $A$  viết lại dạng liệt kê là

- (A)  $\emptyset$ . (B)  $[2; +\infty)$ . (C)  $\mathbb{R}$ . (D)  $[-2; +\infty)$ .

🔗 **Lời giải.**

Ta có  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4 > 0\} = \mathbb{R}$ .

🐞 Chọn đáp án **C**.

**Câu 26.** Cho tập  $A = \{-2; 1; 2; 3; 4\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4 = 0\}$ . Mệnh đề nào sai?

- (A)  $A \cap B = \{2\}$ . (B)  $A \cup B = \{2; -2\}$ . (C)  $A \setminus B = \{1; 3; 4\}$ . (D)  $A \cup B = B$ .

🔗 **Lời giải.**

Ta có  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4 = 0\} = \{2\}$ , do đó  $A \cap B = \{2\}$ .

🐞 Chọn đáp án **A**.

**Câu 27.** Cho tập hợp  $A = \{1; 2; 3; 4; x; y\}$ . Xét các mệnh đề sau đây

$$(I) : "3 \in A"; (II) : \{3; 4\} \in A; (III) : \{x; 3; y\} \in A.$$

Phát biểu nào sau đây đúng?

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

🔗 **Lời giải.**

Ta có  $(I) : "3 \in A"$  là mệnh đề đúng.

🐞 Chọn đáp án **A**.

**Câu 28.** Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau

☐ (A)  $\mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$ .

☐ (B)  $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ .

☐ (C)  $\mathbb{Q} \cap \mathbb{N}^* = \mathbb{N}^*$ .

☐ (D)  $\mathbb{Q} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{N}^*$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ . Do đó

☒  $\mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$  đúng;

☒  $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$  đúng;

☒  $\mathbb{Q} \cap \mathbb{N}^* = \mathbb{N}^*$  đúng;

☒  $\mathbb{Q} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{N}^*$  sai.

**Chọn đáp án (D)**

**Câu 29.** Chọn kết quả sai trong các kết quả sau

☐ (A)  $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$ .

☐ (B)  $A \cup B = A \Leftrightarrow A \subset B$ .

☐ (C)  $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ .

☐ (D)  $B \setminus A = B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ .

**Lời giải.**

Ta có  $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$ .

**Chọn đáp án (B)**

**Câu 30.** Cho các mệnh đề sau. Chọn khẳng định đúng.

(I) :  $\{2; 1; 3\} = \{1; 2; 3\}$ ; (II) :  $\emptyset \subset \emptyset$ ; (III) :  $\emptyset \in \{\emptyset\}$ .

☐ (A) Chỉ (I) đúng.

☐ (B) Chỉ (I) và (II) đúng.

☐ (C) Chỉ (I) và (III) đúng.

☐ (D) Cả (I), (II) và (III) đều đúng.

**Lời giải.**

Ta có cả (I), (II) và (III) đều đúng.

**Chọn đáp án (D)**

**Câu 31.** Cho  $X = \{7; 2; 8; 4; 9; 12\}$ ;  $Y = \{1; 3; 7; 4\}$ . Tập hợp nào sau đây bằng  $X \cap Y$ ?

☐ (A)  $\{1; 2; 3; 4; 8; 9; 7; 12\}$ .

☐ (B)  $\{2; 8; 9; 12\}$ .

☐ (C)  $\{4; 7\}$ .

☐ (D)  $\{1; 3\}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $X \cap Y = \{4; 7\}$ .

**Chọn đáp án (C)**

**Câu 32.** Cho hai tập hợp  $A = \{2; 4; 6; 9\}$  và  $B = \{1; 2; 3; 4\}$ . Tập hợp  $A \setminus B$  bằng tập nào sau đây?

☐ (A)  $\{1; 2; 3; 5\}$ .

☐ (B)  $\{1; 3; 6; 9\}$ .

☐ (C)  $\{6; 9\}$ .

☐ (D)  $\emptyset$ .

**Lời giải.**

Ta có  $A \setminus B = \{6; 9\}$ .

**Chọn đáp án (C)**

**Câu 33.** Cho hai tập hợp  $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$  và  $B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$ . Tập hợp  $A \setminus B$  bằng

☐ (A)  $\{0\}$ .

☐ (B)  $\{0; 1\}$ .

☐ (C)  $\{1; 2\}$ .

☐ (D)  $\{1; 5\}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $A \setminus B = \{0; 1\}$ .

**Chọn đáp án (B)**

**Câu 34.** Cho hai tập hợp  $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$  và  $B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$ . Tập hợp  $B \setminus A$  bằng

☐ (A)  $\{5\}$ .

☐ (B)  $\{0; 1\}$ .

☐ (C)  $\{2; 3; 4\}$ .

☐ (D)  $\{5; 6\}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $B \setminus A = \{5; 6\}$ .

**Chọn đáp án (D)**

**Câu 35.** Cho hai tập hợp  $A = \{1; 5\}$  và  $B = \{1; 3; 5\}$ . Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau

☐ (A)  $A \cap B = \{1\}$ .

☐ (B)  $A \cap B = \{1; 3\}$ .

☐ (C)  $A \cap B = \{1; 5\}$ .

☐ (D)  $A \cap B = \{1; 3; 5\}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $A \cap B = \{1; 5\}$ .

**Chọn đáp án (C)**

**Câu 36.** Cho  $A = \{1; 2; 3\}$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- ☐ (A)  $\emptyset \subset A$ .     
 ☐ (B)  $1 \in A$ .     
 ☐ (C)  $\{1; 2\} \subset A$ .     
 ☐ (D)  $2 = A$ .

 **Lời giải.**

Ta có  $2 = A$  là khẳng định sai.

 **Chọn đáp án (D)**

**Câu 37.** Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai?

- ☐ (A)  $A \in A$ .     
 ☐ (B)  $\emptyset \subset A$ .     
 ☐ (C)  $A \subset A$ .     
 ☐ (D)  $A \neq \{A\}$ .

 **Lời giải.**

Ta có  $A \in A$  là mệnh đề sai.

 **Chọn đáp án (A)**

**Câu 38.** Cho tập hợp  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0\}$ . Các phần tử của tập hợp  $A$  là

- ☐ (A)  $A = 0$ .     
 ☐ (B)  $A = \{0\}$ .     
 ☐ (C)  $A = \emptyset$ .     
 ☐ (D)  $A = \{\emptyset\}$ .

 **Lời giải.**

Xét phương trình  $x^2 + x + 1 = 0$ . Ta có  $\Delta = -3 < 0$ . Do đó phương trình  $x^2 + x + 1 = 0$  vô nghiệm.

Vậy  $A = \emptyset$ .

 **Chọn đáp án (C)**

**Câu 39.** Cho tập hợp  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 1)(x^2 + 2) = 0\}$ . Các phần tử của tập  $A$  là

- ☐ (A)  $A = \{-1; 1\}$ .     
 ☐ (B)  $A = \{-1; 1; \sqrt{2}\}$ .     
 ☐ (C)  $A = \{-1\}$ .     
 ☐ (D)  $A = \{1\}$ .

 **Lời giải.**

Xét phương trình  $(x^2 - 1)(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 + 2 = 0 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm}) \Leftrightarrow x = \pm 1$ .

Vậy  $A = \{-1; 1\}$ .

 **Chọn đáp án (A)**

**Câu 40.** Các phần tử của tập hợp  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x + 3 = 0\}$  là

- ☐ (A)  $A = \{0\}$ .     
 ☐ (B)  $A = \{1\}$ .     
 ☐ (C)  $A = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ .     
 ☐ (D)  $A = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$ .

 **Lời giải.**

Xét phương trình  $2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ (nhận)}.$

Vậy  $A = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$ .

 **Chọn đáp án (D)**

**Câu 41.** Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập rỗng?

- ☐ (A)  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4 = 0\}$ .     
 ☐ (B)  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 3 = 0\}$ .  
☐ (C)  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5 = 0\}$ .     
 ☐ (D)  $D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 + x - 12 = 0\}$ .

 **Lời giải.**

Tập hợp  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 3 = 0\}$  là tập rỗng vì phương trình  $x^2 + 2x + 3 = 0$  vô nghiệm trên tập số thực  $\mathbb{R}$ .

 **Chọn đáp án (B)**

**Câu 42.** Trong các tập hợp sau, tập hợp nào khác rỗng?

- ☐ (A)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0\}$ .     
 ☐ (B)  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 2 = 0\}$ .  
☐ (C)  $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^3 - 3)(x^2 + 1) = 0\}$ .     
 ☐ (D)  $D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x(x^2 + 3) = 0\}$ .

 **Lời giải.**

Xét tập hợp  $D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x(x^2 + 3) = 0\}$ .

Ta xét phương trình  $x(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (nhận).

Vậy  $D \neq \emptyset$ .

 **Chọn đáp án (D)**

**Câu 43.** Trong các tập sau, tập hợp nào có đúng một tập hợp con?

- ☐ (A)  $\emptyset$ .     
 ☐ (B)  $\{a\}$ .     
 ☐ (C)  $\{\emptyset\}$ .     
 ☐ (D)  $\{a, \emptyset\}$ .

 **Lời giải.**

Tập rỗng có duy nhất một tập hợp con là  $\emptyset$ .

 **Chọn đáp án (A)**

**Câu 44.** Trong các tập sau đây, tập hợp nào có đúng hai tập hợp con?

- ☐ (A)  $\{x; y\}$ .     
 ☐ (B)  $\{x\}$ .     
 ☐ (C)  $\{\emptyset; x\}$ .     
 ☐ (D)  $\{\emptyset; x; y\}$ .

 **Lời giải.**

Tập hợp  $\{x\}$  có đúng hai tập hợp con là  $\emptyset$  và  $\{x\}$ .

🔍 Chọn đáp án **A**.

**Câu 45.** Cho tập hợp  $A = \{2; 5\}$ . Tập hợp  $A$  có tất cả bao nhiêu phần tử?

**A** 1.

**B** 2.

**C** 3.

**D** 4.

🔍 Lời giải.

Tập hợp  $A$  có hai phần tử.

🔍 Chọn đáp án **B**.

**Câu 46.** Cho tập hợp  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 4 = 0\}$ . Chọn kết quả đúng?

**A**  $B = \{2; 4\}$ .

**B**  $B = \{-2; 4\}$ .

**C**  $B = \{-4; 4\}$ .

**D**  $B = \{-2; 2\}$ .

🔍 Lời giải.

Xét phương trình  $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$  (nhận).

Vậy  $B = \{-2; 2\}$ .

🔍 Chọn đáp án **D**.

**Câu 47.** Cho hai tập hợp  $A = \{0; 2; 3; 5\}$  và  $B = \{2; 7\}$ . Khi đó  $A \cap B$  bằng

**A**  $A \cap B = \{2; 5\}$ .

**B**  $A \cap B = \{2\}$ .

**C**  $A \cap B = \emptyset$ .

**D**  $A \cap B = \{0; 2; 3; 5; 7\}$ .

🔍 Lời giải.

$A \cap B = \{2\}$ .

🔍 Chọn đáp án **B**.

**Câu 48.** Cho  $A$  là tập hợp các hình thoi,  $B$  là tập hợp các hình chữ nhật và  $C$  là tập hợp các hình vuông. Khi đó

**A**  $A \cap B = C$ .

**B**  $A \cup B = C$ .

**C**  $A \setminus B = C$ .

**D**  $B \setminus A = C$ .

🔍 Lời giải.

Ta có  $A \cup B = C$ .

🔍 Chọn đáp án **B**.

**Câu 49.** Cách viết nào sau đây không đúng?

**A**  $1 \subset \mathbb{N}$ .

**B**  $1 \in \mathbb{N}$ .

**C**  $\{1\} \subset \mathbb{N}$ .

**D**  $1 \in \mathbb{N}^*$ .

🔍 Lời giải.

Cách viết  $1 \subset \mathbb{N}$  không đúng.

🔍 Chọn đáp án **A**.

**Câu 50.** Hỏi tập hợp nào là tập hợp rỗng, trong các tập hợp sau?

**A**  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 6x^2 - 7x + 1 = 0\}$ .

**B**  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 1\}$ .

**C**  $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 4x + 2 = 0\}$ .

**D**  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$ .

🔍 Lời giải.

Xét tập hợp  $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 4x + 2 = 0\}$ .

Ta có phương trình  $x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \\ x = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$  (loại vì  $x \in \mathbb{Q}$ ).

Vậy  $C = \emptyset$ .

🔍 Chọn đáp án **C**.

**Câu 51.** Cho tập hợp  $X = \{0; 1; 2\}$ . Tập hợp  $X$  có bao nhiêu tập con?

**A** 8.

**B** 3.

**C** 6.

**D** 5.

🔍 Lời giải.

Tập hợp  $X$  có  $2^3 = 8$  tập con.

🔍 Chọn đáp án **A**.

**Câu 52.** Tập hợp  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x-2)(x^3+4x) = 0\}$  có bao nhiêu phần tử?

**A** 1.

**B** 2.

**C** 3.

**D** 4.

🔍 Lời giải.

Xét phương trình  $(x-1)(x-2)(x^3+4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$  (nhận).

Vậy tập  $A$  có hai phần tử.

🔍 Chọn đáp án **B**.

**Câu 53.** Cho tập hợp  $X = \{0; 1; 2; a; b\}$ . Số phần tử của tập  $X$  là

**A** 5.

**B** 4.

**C** 3.

**D** 2.

🔍 Lời giải.

Tập  $X$  có năm phần tử.

Chọn đáp án (A).....

**Câu 54.** Lớp 10A có 45 học sinh trong đó có 15 học sinh được xếp loại học lực giỏi, 20 học sinh được xếp loại hạnh kiểm tốt, 10 em vừa xếp loại học lực giỏi, vừa có hạnh kiểm tốt. Hỏi có bao nhiêu học sinh xếp loại học lực giỏi hoặc có hạnh kiểm tốt?

(A) 25.

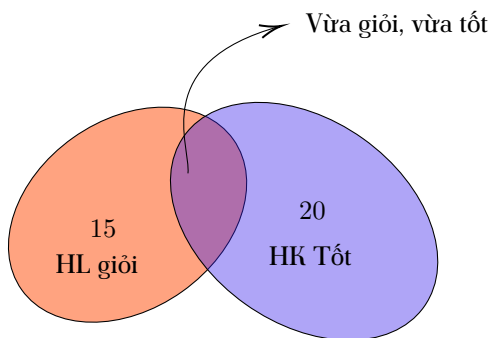
(B) 10.

(C) 45.

(D) 35.

Lời giải.

Số học sinh xếp loại học sinh giỏi hoặc hạnh kiểm tốt là  $15 + 20 - 10 = 25$ .



Chọn đáp án (A).....

**Câu 55.** Một lớp có 45 học sinh. Mỗi em đều đăng ký chơi ít nhất một trong hai môn bóng đá và bóng chuyền. Có 35 em đăng ký môn bóng đá, 15 em đăng ký môn bóng chuyền. Hỏi có bao nhiêu em đăng ký chơi cả 2 môn?

(A) 5.

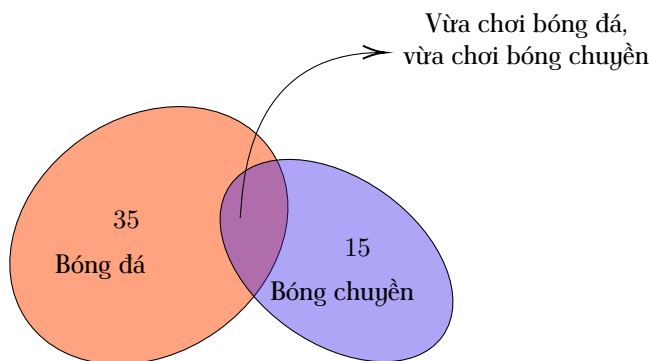
(B) 10.

(C) 45.

(D) 35.

Lời giải.

Số học sinh chơi cả hai môn là  $35 + 15 - 45 = 5$ .



Chọn đáp án (A).....

**Câu 56.** Cho  $A = \{1; 2; 3; 5; 7\}$ ,  $B = \{2; 4; 5; 6\}$ . Tập hợp  $A \setminus B$  là

(A)  $\{1; 3; 7\}$ .

(B)  $\{2; 5\}$ .

(C)  $\{4; 6; 8\}$ .

(D)  $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ .

Lời giải.

Những phần tử thuộc  $A$  mà không thuộc  $B$  là 1; 3; 7.

Vậy  $A \setminus B = \{1; 3; 7\}$ .

Chọn đáp án (A).....

**Câu 57.** Cho  $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 4 \neq 0\}$ . Tập hợp  $A$  viết lại dạng liệt kê là

(A)  $\mathbb{R} \setminus \{2; -2\}$ .

(B)  $\{2; -2\}$ .

(C)  $\mathbb{R}$ .

(D)  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

Lời giải.

Ta có  $x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 4 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$ .

Vậy  $A = \mathbb{R} \setminus \{2; -2\}$ .

Chọn đáp án (A).....

**Câu 58.** Cho  $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 4 > 0\}$ . Tập hợp  $A$  viết lại dạng liệt kê là

(A)  $\mathbb{R}$ .

(B)  $\emptyset$ .

(C)  $[-2; +\infty)$ .

(D)  $[2; +\infty)$ .

Lời giải.

Vì  $x^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 > -4$  (luôn đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$ )

🔍 Chọn đáp án **A**.

**Câu 59.** Lớp 10A có 40 học sinh trong đó có 10 bạn giỏi Toán, 15 bạn giỏi Lý, và 22 bạn không giỏi môn học nào trong hai môn Toán, Lý. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu bạn học sinh vừa giỏi Toán, vừa giỏi Lý?

**A** 7.

**B** 25.

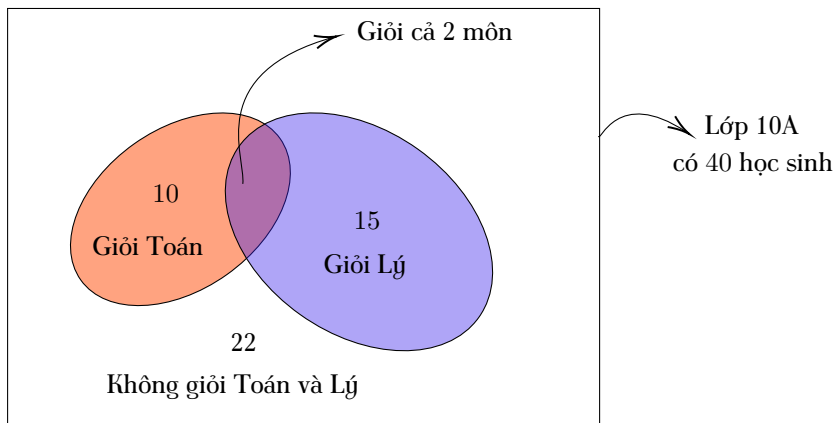
**C** 10.

**D** 18.

🔍 Lời giải.

Số học sinh giỏi một trong hai môn Toán và Lý là  $40 - 22 = 18$ .

Số học sinh vừa giỏi Toán vừa giỏi Lý là  $10 + 15 - 18 = 7$ .



🔍 Chọn đáp án **A**.

**Câu 60.** Một lớp học có 25 học sinh học khá các môn tự nhiên, 24 học sinh học khá các môn xã hội 10 học sinh học khá cả môn tự nhiên lẫn môn xã hội, đặc biệt vẫn còn 3 học sinh chưa học khá cả hai nhóm môn ấy. Hỏi lớp có bao nhiêu học sinh chỉ khá đúng một nhóm môn (tự nhiên hoặc xã hội).

**A** 39.

**B** 26.

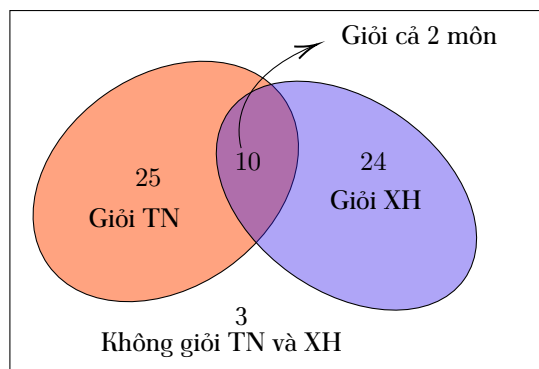
**C** 29.

**D** 36.

🔍 Lời giải.

Số học sinh học khá môn tự nhiên hoặc môn xã hội là  $25 + 24 - 10 = 39$ .

Số học sinh chỉ khá đúng một nhóm môn (tự nhiên hoặc xã hội) là  $39 - 10 = 29$ .



🔍 Chọn đáp án **C**.

**Câu 61.** Cho tập  $A = -2; 1; 2; 3; 4$ ;  $B = x \in \mathbb{N} : x^2 - 4 = 0$ . Mệnh đề nào đúng?

**A**  $A \cap B = \{2\}$ .

**B**  $A \cap B = \{-2; 2\}$ .

**C**  $A \setminus \{1; 3; 4\}$ .

**D**  $A \cup B = B$ .

🔍 Lời giải.

Lấy  $x \in B$ , ta có  $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 & (\text{nhận}) \\ x = -2 & (\text{loại}) \end{cases}$ . Do đó  $B = \{2\}$ . Vậy  $A \cap B = \{2\}$ . Suy ra A đúng.

B sai vì  $A \cap B = \{2\}$ .

C sai vì  $A \setminus \{-2; 1; 3; 4\}$ .

D sai vì  $A \cup B = A$ .

🔍 Chọn đáp án **A**.

**Câu 62.** Số tập con của tập hợp có  $n$  ( $n \geq 1; n \in \mathbb{N}$ ) phần tử là

**A**  $2^n$ .

**B**  $2^{n+1}$ .

**C**  $2^{n-1}$ .

**D**  $2^{n+2}$ .

🔍 Lời giải.

🔍 Chọn đáp án (A).....

**Câu 63.** Cho hai tập  $A = \{x \in \mathbb{Z} : (x+3)(x^2-3) = 0\}$ ;  $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2+6=0\}$  khi đó

- (A)  $B \setminus A = B$ . (B)  $A \subset B$ . (C)  $A \setminus B = B$ . (D)  $A \cap B = A$ .

🔍 Lời giải.

Lấy  $x \in A$  ta có,  $(x+3)(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ x^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 & (\text{nhận}) \\ x=\pm\sqrt{3} & (\text{loại}) \end{cases}$ . Vậy  $A = \{-3\}$ .

Lấy  $x \in B$  ta có,  $x^2+6=0 \Leftrightarrow x^2=-6$  (vô lý). Vậy  $B = \emptyset$ .

Khi đó, A đúng vì  $B \setminus A = \emptyset \setminus A = \emptyset = B$ .

B sai vì  $B \subset A$ .

C sai vì  $A \setminus B = A$ .

D sai vì  $A \cap B = B$ .

🔍 Chọn đáp án (A).....

**Câu 64.** Cho hai tập  $A = [-1; 3]$ ;  $B = [a; a+3]$ . Với giá trị nào của  $a$  thì  $A \cap B = \emptyset$ ?

- (A)  $\begin{cases} a \geq 3 \\ a < -4 \end{cases}$ . (B)  $\begin{cases} a > 3 \\ a < -4 \end{cases}$ . (C)  $\begin{cases} a \geq 3 \\ a \leq -4 \end{cases}$ . (D)  $\begin{cases} a > 3 \\ a \leq -4 \end{cases}$ .

🔍 Lời giải.

Ta có  $A \cap B = \emptyset$  nên  $\begin{cases} a \geq 3 \\ a+3 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 3 \\ a < -4 \end{cases}$ .

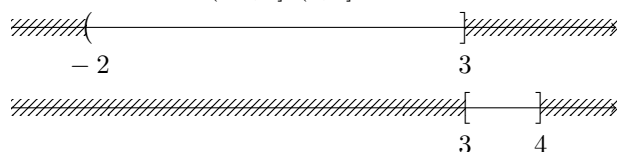
🔍 Chọn đáp án (A).....

**Câu 65.** Tập hợp  $(-2; 3] \cap (3; 4]$  là tập hợp nào sau đây?

- (A)  $\emptyset$ . (B)  $\{3\}$ . (C)  $\{-2; 3\}$ . (D)  $\{3; 4\}$ .

🔍 Lời giải.

Trên trục số ta có  $(-2; 3]$ ,  $(3; 4]$  được biểu diễn như sau



Do đó  $(-2; 3] \cap (3; 4] = \emptyset$ .

🔍 Chọn đáp án (A).....

**Câu 66.** Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- (A)  $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ . (B)  $B = (A \cap B) \cap (A \setminus B)$ .  
(C)  $B = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ . (D)  $A = (A \cap B) \cap (A \setminus B)$ .

🔍 Lời giải.

Ta có  $(A \cap B) \cup (A \setminus B)$

🔍 Chọn đáp án (A).....

**Câu 67.** Cho 3 tập hợp.  $A = [-3; 5]$ ;  $B = [-4; 1]$ ; và  $C = (-4; -3]$ . Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- (A)  $A \cap B = [-3; 1]$ . (B)  $(A \cup B) \cup C = [-4; 5]$ .  
(C)  $C_B C = [-3; 1]$ . (D)  $B \setminus A = [-4; -3]$ .

🔍 Lời giải.

A đúng vì  $A \cap B = [-3; 1]$ .

B sai vì  $(A \cup B) \cup C = [-4; 5]$ .

C sai vì  $C_B C = C \setminus B = (-3; 1]$ .

D sai vì  $B \setminus A = [-4; -3)$ .

🔍 Chọn đáp án (A).....

**Câu 68.** Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- (A)  $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ . (B)  $B \cap (B \setminus A) = \emptyset$ . (C)  $A \cup (B \setminus A) = \emptyset$ . (D)  $A \cup (B \setminus A) = B$ .

🔍 Lời giải.

B sai vì  $B \cap (B \setminus A) = B$ . C,D sai vì  $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$ .

🔍 Chọn đáp án (A).....

**Câu 69.** Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập rỗng?

- (A)  $M = \{x \in \mathbb{N} | 2x - 1 = 0\}$ . (B)  $M = \{x \in \mathbb{Q} | 3x + 2 = 0\}$ .  
(C)  $M = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 6x + 9 = 0\}$ . (D)  $M = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 = 0\}$ .

🔍 Lời giải.

Đáp án A có  $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ . Do đó  $M = \emptyset$ .

Đáp án B có  $3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ . Do đó  $M = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ .

Đáp án C có  $x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \in \mathbb{R}$ . Do đó  $M = \{3\}$ .

Đáp án D có  $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \mathbb{Z}$ . Do đó  $M = \{0\}$ .

🔍 Chọn đáp án **A**.

**Câu 70.** Cho tập hợp  $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 3x + 4 = 0\}$ , khẳng định nào sau đây đúng?

**(A)** Tập hợp  $A$  có 1 phần tử.

**(B)** Tập hợp  $A$  có 2 phần tử.

**(C)** Tập hợp  $A = \emptyset$ .

**(D)** Tập hợp  $A$  có vô số phần tử.

🔍 Lời giải.

Ta có  $x^2 + 3x + 4 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Vậy phương trình  $x^2 + 3x + 4 = 0$  vô nghiệm. Do đó  $A = \emptyset$ .

🔍 Chọn đáp án **C**.

**Câu 71.** Lớp 10A có 45 học sinh trong đó có 15 học sinh được xếp loại học lực giỏi, 20 học sinh được xếp loại hạnh kiểm tốt, 10 em vừa xếp loại học lực giỏi, vừa có hạnh kiểm tốt. Hỏi có bao nhiêu học sinh xếp loại học lực giỏi hoặc có hạnh kiểm tốt?

**(A)** 25.

**(B)** 10.

**(C)** 45.

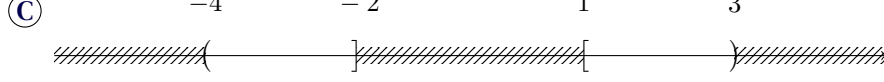
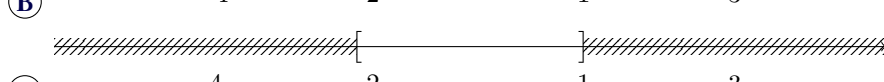
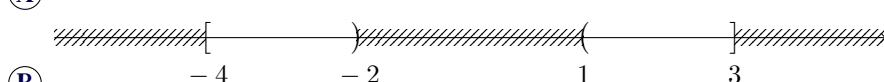
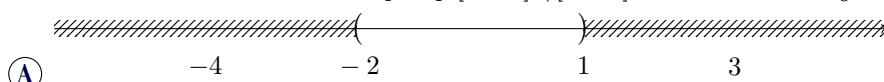
**(D)** 35.

🔍 Lời giải.

Số học sinh xếp loại học sinh giỏi hoặc hạnh kiểm tốt là  $15 + 20 - 10 = 25$ .

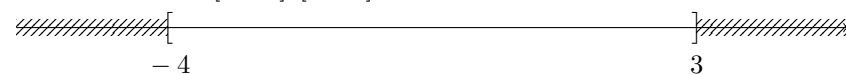
🔍 Chọn đáp án **A**.

**Câu 72.** Biểu diễn trên trục số các tập hợp  $[-4; 3] \setminus [-2; 1]$  là hình nào sau đây?

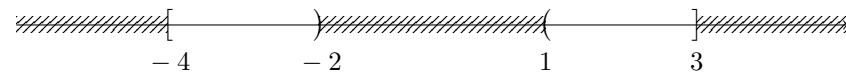


🔍 Lời giải.

Trên trục số ta có  $[-4; 3]$ ,  $[-2; 1]$  được biểu diễn như sau

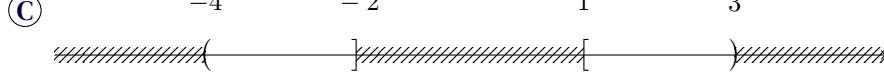
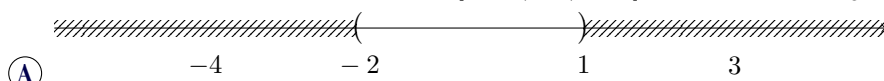


Do đó  $[-4; 3] \setminus [-2; 1]$  được biểu diễn trên trục số là



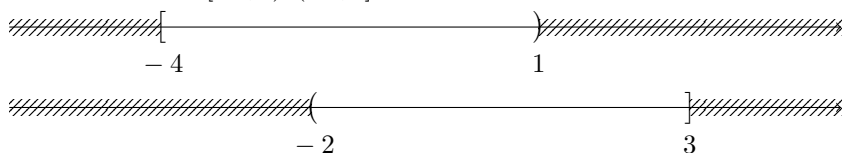
🔍 Chọn đáp án **B**.

**Câu 73.** Biểu diễn trên trục số các tập hợp  $[-4; 1] \cap (-2; 3]$  là hình nào sau đây?

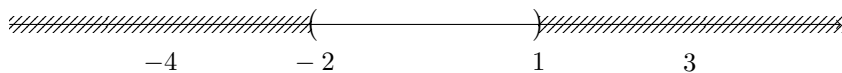


 **Lời giải.**

Trên trục số ta có  $[-4; 1)$ ,  $(-2; 3]$  được biểu diễn như sau

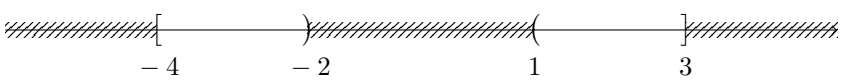


Do đó  $[-4; 1) \cap (-2; 3]$  được biểu diễn trên trục số là



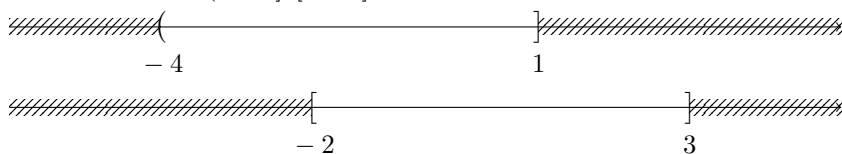
 Chọn đáp án **(A)**.

**Câu 74.** Biểu diễn trên trục số các tập hợp  $(-4; 1] \cap [-2; 3]$  là hình nào sau đây?

- (A) 
- (B) 
- (C) 
- (D) 

 **Lời giải.**

Trên trục số ta có  $(-4; 1]$ ,  $[-2; 3]$  được biểu diễn như sau



Do đó  $(-4; 1] \cap [-2; 3]$  được biểu diễn trên trục số là



 Chọn đáp án **(C)**.

# HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ HÀM SỐ BẬC HAI

## §1 HÀM SỐ

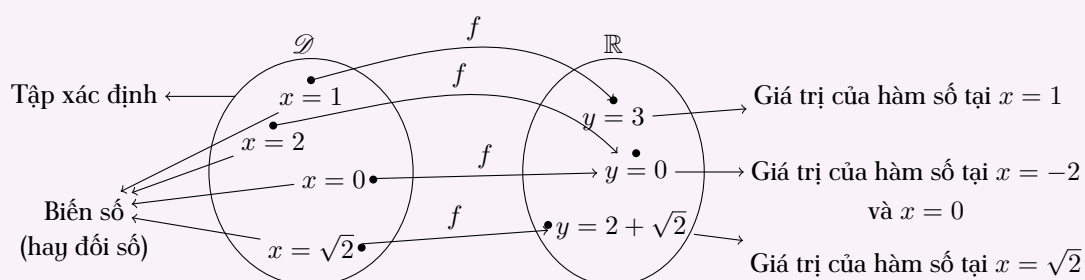
### A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### ĐẠI CƯƠNG VỀ HÀM SỐ

Ở lớp dưới ta đã làm quen với khái niệm hàm số.

**Ví dụ 1.** Cho hàm số  $y = f(x) = x^2 + 2x$ .

- ☑ Với  $x = 1$  thì  $y = f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$ .
- ☑ Với  $x = -2$  thì  $y = f(-2) = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) = 0$ .
- ☑ Với  $x = 0$  thì  $y = f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 = 0$ .
- ☑ Với  $x = \sqrt{2}$  thì  $y = f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$ .



**Kí hiệu**

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = f(x) = x^2 + 2x \end{array}$$

Cho  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{D} \neq \emptyset$ . Hàm số  $f$  xác định trên  $\mathcal{D}$  là một quy tắc đặt tương ứng mỗi số  $x \in \mathcal{D}$  với một và chỉ một số  $y \in \mathbb{R}$ .

- ☑  $\mathcal{D}$  được gọi là tập xác định của hàm số.
- ☑  $x$  được gọi là biến số (đối số) của hàm số  $f$ .
- ☑  $f(x)$  được gọi là giá trị của hàm số  $f$  tại  $x$ .

☑ Một hàm số được cho bởi một biểu thức hoặc nhiều biểu thức

🔗 Ví dụ 2.

- Hàm số  $y = f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$ .
- Hàm số  $y = g(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{nếu } x \leq 1 \\ x^2 + 2 & \text{nếu } x > 1. \end{cases}$

!

☑ Nếu hàm số  $y = f(x)$  không giải thích gì thêm thì tập xác định của nó là tập hợp các số thực  $x$  sao cho giá trị của biểu thức  $f(x)$  được xác định.

## B CÁC DẠNG TOÁN VÀ VÍ DỤ

☐ Dạng 1. Tính giá trị của hàm số tại một điểm

Để tính giá trị của hàm số  $y = f(x)$  tại  $x = a$ , ta thế  $x = a$  vào biểu thức  $f(x)$  và được giá trị  $f(a)$ .

🔗 Ví dụ 1. Cho hàm số  $y = f(x) = \begin{cases} 4x + 1 & \text{nếu } x \leq 2 \\ -x^2 + 3 & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$ . Tính  $f(3)$ ,  $f(2)$ ,  $f(-2)$ ,  $f(\sqrt{2})$  và  $f(2\sqrt{2})$ .

🔗 Lời giải.

Ta có  $f(3) = -3^2 + 3 = -6$ ,  $f(2) = 4 \cdot 2 + 1 = 9$ ,  $f(-2) = 4 \cdot (-2) + 1 = -7$ .  
 $f(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} + 1$ ,  $f(2\sqrt{2}) = -(2\sqrt{2})^2 + 3 = -5$ .

🔗 Ví dụ 2. Cho hàm số  $y = f(x) = \begin{cases} 8 & \text{nếu } x \geq -2 \\ x^2 - 2x & \text{nếu } x < -2 \end{cases}$ . Tính  $f(-3)$ ,  $f(2)$ ,  $f(-2)$  và  $f(0)$ .

🔗 Lời giải.

Ta có  $f(-3) = (-3)^2 - 2(-3) = 15$ ,  $f(2) = 8$ ,  $f(-2) = 8$ ,  $f(0) = 8$ .

🔗 Ví dụ 3. Cho hàm số  $y = f(x) = \begin{cases} 4x + 1 & \text{nếu } x \geq 2 \\ -x^3 + 3 & \text{nếu } x < 2 \end{cases}$ . Tính  $f(2)$ ,  $f(\sqrt{2})$ .

🔗 Lời giải.

Ta có  $f(2) = 4 \cdot 2 + 1 = 9$ ,  $f(\sqrt{2}) = -(\sqrt{2})^3 + 3 = -2\sqrt{2} + 3$ .

🔗 Ví dụ 4. Cho hàm số  $y = h(x) = \begin{cases} -2(x^2 + 1) & \text{nếu } x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$ . Tính  $h(1)$ ,  $h(2)$ ,  $h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ,  $h(\sqrt{2})$ .

🔗 Lời giải.

Ta có

$$h(1) = -2(1^2 + 1) = -4, h(2) = \sqrt{2-1} = 1, h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1\right) = -3, h(\sqrt{2}) = \sqrt{\sqrt{2}-1}.$$

☐ Dạng 2. Đồ thị hàm số

- ☑ Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên tập  $\mathcal{D}$ . Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , tập hợp các điểm có tọa độ  $(x; f(x))$  với  $x \in \mathcal{D}$  gọi là đồ thị của hàm số  $y = f(x)$ .
- ☑ Để biết điểm  $M(a; b)$  có thuộc đồ thị hàm số  $y = f(x)$  không, ta thế  $x = a$  vào biểu thức  $f(x)$ .

- Nếu  $f(a) = b$  thì điểm  $M(a; b)$  thuộc đồ thị hàm số  $y = f(x)$ .
- Nếu  $f(a) \neq b$  thì điểm  $M(a; b)$  không thuộc đồ thị hàm số  $y = f(x)$ .

## 1 VÍ DỤ

**Ví dụ 1.** Cho hàm số  $y = f(x) = x^2 + \sqrt{x-3}$ . Trong các điểm  $A(2; 8)$ ,  $B(4; 12)$  và  $C(5; 25 + \sqrt{2})$ , điểm nào thuộc đồ thị của hàm số đã cho?

### Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi  $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$ . Tập xác định:  $\mathcal{D} = [3; +\infty)$ .

- ☑ Ta có  $2 \notin \mathcal{D}$  nên  $A(2; 8)$  không thuộc đồ thị của hàm số.
- ☑ Ta có  $f(4) = 4^2 + \sqrt{4-3} = 17 \neq 12$  nên  $B(4; 12)$  không thuộc đồ thị của hàm số.
- ☑ Ta có  $f(5) = 5^2 + \sqrt{5-3} = 25 + \sqrt{2}$  nên  $C(5; 25 + \sqrt{2})$  thuộc đồ thị của hàm số.

**Ví dụ 2.** Cho hàm số  $y = f(x) = 2x^2 - 5x + 5$  ( $C$ ).

- Các điểm  $A(1; 2)$ ,  $B(-1; 5)$ ,  $C(-\frac{1}{2}; 8)$  có thuộc đồ thị ( $C$ ) của hàm số đã cho không?
- Tìm các điểm thuộc đồ thị của hàm số mà có tung độ bằng 2.

### Lời giải.

Tập xác định:  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

a) Ta có

- ☑  $f(1) = 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 5 = 2$  nên  $A(1; 2)$  thuộc đồ thị ( $C$ ) của hàm số.
- ☑  $f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 5 = 12 \neq 5$  nên  $B(-1; 5)$  không thuộc đồ thị ( $C$ ) của hàm số.
- ☑  $f(-\frac{1}{2}) = 2 \cdot (-\frac{1}{2})^2 - 5 \cdot (-\frac{1}{2}) + 5 = 8$  nên  $C(-\frac{1}{2}; 8)$  thuộc đồ thị ( $C$ ) của hàm số.

$$b) f(x) = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 5 = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Vậy có hai điểm cần tìm là  $M(1; 2)$  và  $N(\frac{3}{2}; 2)$ .

## 2 BÀI TẬP TỰ RÈN LUYỆN

**Bài 1.** Cho hàm số  $y = g(x) = \frac{-2x}{x^2 - 2x - 3}$ . Tìm các điểm thuộc đồ thị của hàm số mà có tung độ bằng 2.

### Lời giải.

$$\text{Ta có } g(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{-2x}{x^2 - 2x - 3} = 2 \Leftrightarrow -2x = 2(x^2 - 2x - 3) \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \\ \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \end{cases}.$$

Vậy có hai điểm cần tìm là  $M(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}; 2)$  và  $N(\frac{1 - \sqrt{13}}{2}; 2)$ .

**Bài 2.** Cho hàm số  $y = f(x) = \begin{cases} x^2 - 6 & \text{nếu } x \leq 1 \\ x^2 - 3x & \text{nếu } x > 1. \end{cases}$

- Điểm nào trong các điểm sau đây thuộc đồ thị của hàm số?  
 $A(3; 3)$ ,  $B(-1; -5)$ ,  $C(1; -2)$  và  $D(3; 0)$ .

b) Tìm các điểm thuộc đồ thị của hàm số mà có tung độ bằng  $-2$ .

 **Lời giải.**

a) Ta có

- ☉  $f(3) = 3^2 - 3 \cdot 3 = 0 \neq 3$ , suy ra  $A(3; 3)$  không thuộc đồ thị của hàm số.
- ☉  $f(-1) = (-1)^2 - 6 = -5$ , suy ra  $B(-1; -5)$  thuộc đồ thị của hàm số.
- ☉  $f(1) = 1^2 - 6 = -5 \neq -2$ , suy ra  $C(1; -2)$  không thuộc đồ thị của hàm số.
- ☉  $f(3) = 3^2 - 3 \cdot 3 = 0$ , suy ra  $D(3; 0)$  thuộc đồ thị của hàm số.

b) Ta có  $f(x) = -2$ .

- ☉ Với  $x \leq 1$ , ta có  $x^2 - 6 = -2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ (nhận)} \\ x = 2 \text{ (loại)} \end{cases}$
- ☉ Với  $x > 1$ , ta có  $x^2 - 3x = -2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (loại)} \\ x = 2 \text{ (nhận)} \end{cases}$

Vậy có hai điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng  $-2$  là  $M(-2; -2)$  và  $N(2; -2)$ .

### Dạng 3. Tìm tập xác định của hàm số

Tập xác định của hàm số  $y = f(x)$  là tập hợp các số thực  $x$  sao cho biểu thức  $f(x)$  xác định.

- !
- ☉ Hàm số  $y = \frac{A}{f(x)}$  xác định khi và chỉ khi  $f(x) \neq 0$  ( $A$  là hằng số).
  - ☉ Hàm số  $y = \sqrt{f(x)}$  xác định khi và chỉ khi  $f(x) \geq 0$ .
  - ☉ Hàm số  $y = \frac{A}{\sqrt{f(x)}}$  xác định khi và chỉ khi  $f(x) > 0$ .

- !
- ☉  $P(x) \cdot Q(x) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \neq 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$

- !
- ☉ Nếu  $a \leq x \leq b$  thì  $\mathcal{D} = [a; b]$ .
  - ☉ Nếu  $a \leq x < b$  thì  $\mathcal{D} = [a; b)$ .
  - ☉ Nếu  $\begin{cases} a < x < b \\ x \neq x_0 \end{cases}$  thì  $\mathcal{D} = (a; b) \setminus \{x_0\}$ .
  - ☉ Nếu  $x > a$  thì  $\mathcal{D} = (a; +\infty)$ .
  - ☉ Nếu  $x \leq b$  thì  $\mathcal{D} = (-\infty; b]$ .
  - ☉ Nếu  $\begin{cases} a < x < b \\ c \leq x \leq d \\ x \neq x_0 \end{cases}$  thì  $\mathcal{D} = (a; b) \cup [c; d] \setminus \{x_0\}$ .

### 1 VÍ DỤ MINH HỌA

 **Ví dụ 1.** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \frac{x+3}{2x^2-18} + \frac{5}{1+x^3} - 2x + 1$ .

 **Lời giải.**

Hàm số xác định khi và chỉ khi  $\begin{cases} 2x^2 - 18 \neq 0 \\ 1 + x^3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 3 \\ x \neq -1 \end{cases}$ .

Vậy tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3; -1\}$ .

 **Ví dụ 2.** Tìm tập xác định của hàm số  $y = 4\sqrt{2x+1} - (x-4)\sqrt{3-x}$ .

**Lời giải.**

Hàm số xác định khi và chỉ khi  $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq 3.$

Vậy tập xác định  $\mathcal{D} = \left[-\frac{1}{2}; 3\right].$

**Ví dụ 3.** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \frac{x^3 - \sqrt{7-3x}}{(x^2 - 4x)\sqrt{2x+2}}.$

**Lời giải.**

Hàm số xác định khi và chỉ khi  $\begin{cases} 7-3x \geq 0 \\ 2x+2 > 0 \\ x^2-4x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{7}{3} \\ x > -1 \\ x \neq 0 \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x \leq \frac{7}{3} \\ x \neq 0. \end{cases}$

Vậy tập xác định  $\mathcal{D} = \left(-1; \frac{7}{3}\right] \setminus \{0\}.$

**Ví dụ 4.** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \frac{x^3 - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{7-3x}}.$

**Lời giải.**

Hàm số xác định khi và chỉ khi  $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 7-3x \geq 0 \\ \sqrt{x-2} - \sqrt{7-3x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq \frac{7}{3} \\ \sqrt{x-2} \neq \sqrt{7-3x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq \frac{7}{3} \\ x-2 \neq 7-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq \frac{7}{3} \\ x \neq \frac{9}{4}. \end{cases}$

Vậy tập xác định  $\mathcal{D} = \left[2; \frac{7}{3}\right] \setminus \left\{\frac{9}{4}\right\}.$

**Ví dụ 5.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{3x+5}{x^2+3x+m-1}$  có tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}.$

**Lời giải.**

Hàm số có tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & x^2 + 3x + m - 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & x^2 + 3x + m - 1 = 0 \text{ vô nghiệm} \\ \Leftrightarrow & \Delta = 13 - 4m < 0 \\ \Leftrightarrow & m > \frac{13}{4}. \end{aligned}$$

Vậy  $m > \frac{13}{4}.$

**Ví dụ 6.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^2 + 2\sqrt{3x-2m+1}$  có tập xác định  $\mathcal{D} = [-1; +\infty).$

**Lời giải.**

Hàm số xác định khi và chỉ khi  $3x - 2m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2m-1}{3}.$

Vì tập xác định  $\mathcal{D} = [-1; +\infty)$  nên  $\frac{2m-1}{3} = -1 \Leftrightarrow m = -1.$

Vậy  $m = -1.$

**2 BÀI TẬP TỰ RÈN LUYỆN**

**Bài 1.** Tìm tập xác định của các hàm số sau

①  $y = x^2 - 3x + 2.$

②  $y = \frac{x-1}{x^2+2x-3}$

$$\textcircled{3} y = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x^2 - 9x)(x^2 + x + 1)}.$$

$$\textcircled{4} y = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}.$$

$$\textcircled{5} y = \frac{x}{x\sqrt{x-1}}.$$

$$\textcircled{6} y = \frac{x}{x-1} + \frac{\sqrt{x+1}}{x}.$$

### Lời giải.

$$\textcircled{1} y = x^2 - 3x + 2.$$

Hàm số xác định với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

Vậy tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

$$\textcircled{2} y = \frac{x-1}{x^2+2x-3}.$$

Hàm số xác định khi và chỉ khi  $x^2 + 2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -3. \end{cases}$

Vậy tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; -3\}$ .

$$\textcircled{3} y = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x^2 - 9x)(x^2 + x + 1)}.$$

Hàm số xác định khi và chỉ khi  $\begin{cases} x^2 - 9x \neq 0 \\ x^2 + x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 9. \end{cases}$

Vậy tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{9; 0\}$ .

$$\textcircled{4} y = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}.$$

Hàm số xác định khi và chỉ khi  $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 2 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 2. \end{cases}$

Vậy tập xác định  $\mathcal{D} = [1; +\infty) \setminus \{2\}$ .

$$\textcircled{5} y = \frac{x}{x\sqrt{x-1}}.$$

Hàm số xác định khi và chỉ khi  $\begin{cases} x-1 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$

Vậy tập xác định  $\mathcal{D} = (1; +\infty)$ .

$$\textcircled{6} y = \frac{x}{x-1} + \frac{\sqrt{x+1}}{x}.$$

Hàm số xác định khi và chỉ khi  $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \geq -1 \\ x \neq 0. \end{cases}$

Vậy tập xác định  $\mathcal{D} = [-1; +\infty) \setminus \{0; 1\}$ .

### Bài 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau

$$\textcircled{1} y = \frac{x\sqrt{2x+5} - 3\sqrt{2-5x}}{4\sqrt{x^2+4}}.$$

$$\textcircled{2} y = \frac{3x+4+\sqrt{x^2+2}}{(x^2+x+5)(|x|+1)}.$$

$$\textcircled{3} y = \frac{2x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{7-2x}}.$$

$$\textcircled{4} y = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x^2 + 2x + 4)\sqrt{2x^2 + 1}}.$$

$$\textcircled{5} y = \frac{2x^2 + x - 3}{(x^2 - 5x)\sqrt{x-2}}.$$

$$\textcircled{6} y = \frac{\sqrt{2x-3}}{3-x} + \sqrt{5-x}.$$

$$\textcircled{7} y = \frac{\sqrt{2x+4} + 3\sqrt{4-x}}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$\textcircled{8} y = \frac{3x + \sqrt{6-x}}{1 + \sqrt{x+4}}.$$

$$\textcircled{9} y = \frac{2x^2 - 5\sqrt{9-2x}}{2 - \sqrt{x-2}}.$$

$$\textcircled{10} y = \frac{3x + \sqrt{\frac{x^2+2}{2x+10}}}{1 - \sqrt{3-x}}.$$

$$\textcircled{11} y = \frac{\sqrt{3-4x} + x\sqrt{x}}{|2x-7|+2}.$$

$$\textcircled{12} y = \frac{\sqrt{x^2+10} - \sqrt{2x+11}}{|3x-2|-4}.$$

 Lời giải.

$$\textcircled{1} \quad y = \frac{x\sqrt{2x+5} - 3\sqrt{2-5x}}{4\sqrt{x^2+4}}.$$

$$\text{Hàm số xác định khi và chỉ khi} \begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ 2-5x \geq 0 \\ x^2+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ x \leq \frac{2}{5} \\ x \leq \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{2}{5}.$$

$$\text{Vậy tập xác định } \mathcal{D} = \left[-\frac{5}{2}; \frac{2}{5}\right].$$

$$\textcircled{2} \quad y = \frac{3x+4+\sqrt{x^2+2}}{(x^2+x+5)(|x|+1)}. \text{ Hàm số xác định khi và chỉ khi } \begin{cases} x-1 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

$$\text{Vậy tập xác định } \mathcal{D} = (1; +\infty).$$

$$\textcircled{3} \quad y = \frac{2x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{7-2x}}.$$

$$\text{Hàm số xác định khi và chỉ khi} \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 7-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x < \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x < \frac{7}{2}.$$

$$\text{Vậy tập xác định } \mathcal{D} = \left[-2; \frac{7}{2}\right).$$

$$\textcircled{4} \quad y = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x^2 + 2x + 4)\sqrt{2x^2 + 1}}.$$

$$\text{Hàm số xác định khi và chỉ khi} \begin{cases} x^2 + 2x + 4 \neq 0 \\ 2x^2 + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Vậy tập xác định } \mathcal{D} = \mathbb{R}.$$

$$\textcircled{5} \quad y = \frac{2x^2 + x - 3}{(x^2 - 5x)\sqrt{x-2}}.$$

$$\text{Hàm số xác định khi và chỉ khi} \begin{cases} x-2 > 0 \\ x^2 - 5x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \neq 0 \\ x \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \neq 5 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy tập xác định } \mathcal{D} = (2; +\infty) \setminus \{5\}.$$

$$\textcircled{6} \quad y = \frac{\sqrt{2x-3}}{3-x} + \sqrt{5-x}.$$

$$\text{Hàm số xác định khi và chỉ khi} \begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ 3-x \neq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \neq 3 \\ x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} \leq x \leq 5 \\ x \neq 3 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy tập xác định } \mathcal{D} = \left[\frac{3}{2}; 5\right] \setminus \{3\}.$$

$$\textcircled{7} \quad y = \frac{\sqrt{2x+4} + 3\sqrt{4-x}}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$\text{Hàm số xác định khi và chỉ khi} \begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 4 \\ x \neq 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 4 \\ x \neq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy tập xác định } \mathcal{D} = [-2; 4] \setminus \{1; 2\}.$$

$$\textcircled{8} \quad y = \frac{3x + \sqrt{6-x}}{1 + \sqrt{x+4}}.$$

$$\text{Hàm số xác định khi và chỉ khi} \begin{cases} 6-x \geq 0 \\ x+4 \geq 0 \\ 1 + \sqrt{x+4} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 6.$$

$$\text{Vậy tập xác định } \mathcal{D} = [-4; 6].$$

$$\textcircled{9} \quad y = \frac{2x^2 - 5\sqrt{9-2x}}{2 - \sqrt{x-2}}.$$

Hàm số xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 9-2x \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ 2-\sqrt{x-2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{9}{2} \\ x \geq 2 \\ \sqrt{x-2} \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq \frac{9}{2} \\ x-2 \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq \frac{9}{2} \\ x \neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq \frac{9}{2}.$$

Vậy tập xác định  $\mathcal{D} = \left[2; \frac{9}{2}\right]$ .

$$\textcircled{10} \quad y = \frac{3x + \sqrt{\frac{x^2+2}{2x+10}}}{1 - \sqrt{3-x}}.$$

$$\text{Hàm số xác định khi và chỉ khi} \begin{cases} \frac{x^2+2}{2x+10} \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ 1-\sqrt{3-x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+10 \geq 0 \\ x \leq 3 \\ \sqrt{3-x} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 3 \\ 3-x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 3 \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Vậy tập xác định  $\mathcal{D} = [-5; 3] \setminus \{2\}$ .

$$\textcircled{11} \quad y = \frac{\sqrt{3-4x} + x\sqrt{x}}{|2x-7|+2}.$$

$$\text{Hàm số xác định khi và chỉ khi} \begin{cases} 3-4x \geq 0 \\ x \geq 0 \\ |2x-7|+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{4} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{3}{4}.$$

Vậy tập xác định  $\mathcal{D} = \left[0; \frac{3}{4}\right]$ .

$$\textcircled{12} \quad y = \frac{\sqrt{x^2+10} - \sqrt{2x+11}}{|3x-2|-4}.$$

$$\text{Hàm số xác định khi và chỉ khi} \begin{cases} x^2+10 \geq 0 \\ 2x+11 \geq 0 \\ |3x-2|-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{11}{2} \\ |3x-2| \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{11}{2} \\ 3x-2 \neq 4 \\ 3x-2 \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{11}{2} \\ x \neq 2 \\ x \neq -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Vậy tập xác định  $\mathcal{D} = \left[-\frac{11}{2}; +\infty\right) \setminus \left\{-\frac{2}{3}; 2\right\}$ .

**Bài 3.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x^3+2}{x^2-3x+m-5}$  có tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

 **Lời giải.**

Hàm số có tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & x^2 - 4x + m - 5 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & x^2 - 4x + m - 5 = 0 \quad \text{vô nghiệm} \\ \Leftrightarrow & \Delta' = 9 - m < 0 \\ \Leftrightarrow & m > 9. \end{aligned}$$

Vậy  $m > 9$ .

**Bài 4.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{2x^2-5}{3mx-4m+8}$  có tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

 **Lời giải.**

Vì hàm số có tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$  nên ta có  $3m \cdot 2 - 4m + 8 = 0 \Leftrightarrow m = -4$ .

Khi đó hàm số trở thành  $y = \frac{2x^2-5}{-12x+24}$  và có tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

Vậy  $m = -4$ .

**Bài 5.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \sqrt{x^2 - 2mx + m^2 - m + 1}$  có tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

**Lời giải.**

Hàm số xác định khi và chỉ khi  $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - m)^2 + 1 - m \geq 0$ .

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \Leftrightarrow 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$ .

Vậy  $m \leq 1$ .

#### 🔴 Dạng 4. Sự biến thiên của hàm số

Hàm số  $f$  xác định trên khoảng  $K$  và  $x_1, x_2 \in K$ .

☑ Hàm số  $f$  gọi là đồng biến trên  $K$  nếu  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .

☑ Hàm số  $f$  gọi là nghịch biến trên  $K$  nếu  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .

!

☑ Hàm số  $f$  xác định trên khoảng  $K$ . Nếu  $f(x_1) = f(x_2)$  với mọi  $x_1, x_2 \in K$ , nghĩa là  $f(x) = c$  ( $c$  là hằng số) thì  $f$  gọi là **hàm số hằng** (còn gọi là **hàm số không đổi**) trên  $K$ .

☑ Hàm số  $f$  xác định trên khoảng  $K$ . Khảo sát sự biến thiên của hàm số  $f$  nghĩa là xem  $f$  **đồng biến**, hoặc **nghịch biến**, hoặc **không đổi** trên các khoảng nào đó trong tập xác định của nó.

### 1 PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

#### KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ TRÊN KHOẢNG $K$

Cho hàm số  $y = f(x)$  và hai số tùy ý  $x_1, x_2 \in K$ .

**CÁCH 1.** Giả sử  $x_1 < x_2$ .

☑ Nếu  $f(x_1) - f(x_2) < 0$  thì  $f$  **đồng biến** trên  $K$ .

☑ Nếu  $f(x_1) - f(x_2) > 0$  thì  $f$  **nghịch biến** trên  $K$ ,

**CÁCH 2.** Giả sử  $x_1 \neq x_2$ .

☑ Nếu  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$  thì  $f$  **đồng biến** trên  $K$ .

☑ Nếu  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$  thì  $f$  **nghịch biến** trên  $K$ .

#### VÍ DỤ

**🔗 Ví dụ 1.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số  $y = f(x) = 2x - 7$  trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ .

**Lời giải.**

Với  $\forall x_1, x_2 \in (-\infty; +\infty), x_1 \neq x_2$ . Ta có:  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{2x_1 - 7 - 2x_2 + 7}{x_1 - x_2} = \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = 2 > 0$ .

Vậy hàm số đồng biến trên  $(-\infty; +\infty)$ .

**🔗 Ví dụ 2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số  $y = h(x) = x^2 + 2x - 3$  trong khoảng  $(-\infty; -1)$ .

**Lời giải.**

Với  $\forall x_1, x_2 \in (-\infty; -1), x_1 \neq x_2$ . Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} &= \frac{x_1^2 + 2x_1 - 3 - x_2^2 - 2x_2 + 3}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{x_1^2 - x_2^2 + 2(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 2(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 + 2. \end{aligned}$$

Vì  $\begin{cases} x_1 \in (-\infty; -1) \\ x_2 \in (-\infty; -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 < -1 \\ x_2 < -1 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 < -2 \Rightarrow x_1 + x_2 + 2 < 0.$   
 Vậy hàm số giảm trên  $(-\infty; -1)$

**Ví dụ 3.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số  $y = g(x) = \frac{4x}{x-1}$  trên khoảng  $(1; +\infty)$ .

**Lời giải.**

Với  $\forall x_1, x_2 \in (1; +\infty), x_1 \neq x_2$ . Ta có:

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{4x_1}{x_1-1} - \frac{4x_2}{x_2-1} \\ &= \frac{-4(x_1-x_2)}{(x_1-1)(x_2-1)}. \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} &= \frac{-4(x_1-x_2)}{(x_1-1)(x_2-1)} : (x_1-x_2) \\ &= \frac{-4}{(x_1-1)(x_2-1)}. \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \begin{cases} x_1 \in (1; +\infty) \\ x_2 \in (1; +\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 > 1 \\ x_2 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 1 > 0 \\ x_2 - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{-4}{(x_1-1)(x_2-1)} < 0.$$

Vậy hàm số giảm trên  $(1; +\infty)$

## 2 BÀI TẬP TỰ RÈN LUYỆN

**Bài 1.** Khảo sát sự biến thiên của các hàm số sau:

a.  $y = f(x) = (2-x)^2 - (1-x)^2$  trong khoảng  $(-\infty; +\infty)$ .

b.  $y = f(x) = 2 - x(x-4)$  trên khoảng  $(2; +\infty)$ .

c.  $y = f(x) = 1 - \frac{x-5}{x-3}$  trên khoảng  $(3; +\infty)$ .

d.  $y = k(x) = \frac{x^2-4}{(x+2)^2}$  trên khoảng  $(-\infty; -2)$ .

e.  $y = \sqrt{x+1}$  trên khoảng  $(-1; +\infty)$ .

f.  $y = \frac{1}{x+1}$  trên khoảng  $(-\infty; -1)$ .

**Lời giải.**

a. Ta có:  $y = f(x) = (2-x)^2 - (1-x)^2 = -2x + 3$ .

Với  $\forall x_1, x_2 \in (-\infty; +\infty), x_1 \neq x_2$  thì:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{-2x_1 + 3 + 2x_2 - 3}{x_1 - x_2} = \frac{-2(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = -2 < 0.$$

Vậy hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; +\infty)$ .

b. Ta có:  $y = f(x) = 2 - x(x-4) = -x^2 + 4x + 2$  trên khoảng  $(2; +\infty)$ .

Với  $\forall x_1, x_2 \in (2; +\infty), x_1 \neq x_2$ . Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} &= \frac{-x_1^2 + 4x_1 + 2 + x_2^2 - 4x_2 - 2}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{-(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 4(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{-(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 - 4. \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \begin{cases} x_1 \in (2; +\infty) \\ x_2 \in (2; +\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 > 2 \\ x_2 > 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 > 4 \Rightarrow x_1 + x_2 - 4 > 0.$$

Vậy hàm số tăng trên  $(-\infty; -1)$

c.  $y = f(x) = 1 - \frac{x-5}{x-3} = \frac{2}{x-3}$  trên khoảng  $(3; +\infty)$ .

Với  $\forall x_1, x_2 \in (3; +\infty), x_1 \neq x_2$ . Ta có:

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{2}{x_1-3} - \frac{2}{x_2-3} \\ &= \frac{-2(x_1-x_2)}{(x_1-3)(x_2-3)}. \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} &= \frac{-2(x_1 - x_2)}{(x_1 - 3)(x_2 - 3)} : (x_1 - x_2) \\ &= \frac{-2}{(x_1 - 3)(x_2 - 3)}. \end{aligned}$$

$$\forall \begin{cases} x_1 \in (3; +\infty) \\ x_2 \in (3; +\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 > 3 \\ x_2 > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3 > 0 \\ x_2 - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{-2}{(x_1 - 3)(x_2 - 3)} < 0.$$

Vậy hàm số giảm trên  $(3; +\infty)$

d.  $y = k(x) = \frac{x^2 - 4}{(x + 2)^2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x + 2)^2} = \frac{x - 2}{x + 2}$  trên khoảng  $(-\infty; -2)$ .

Với  $\forall x_1, x_2 \in (-\infty; -2), x_1 \neq x_2$ . Ta có:

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{x_1 - 2}{x_1 + 2} - \frac{x_2 - 2}{x_2 + 2} \\ &= \frac{2(x_1 - x_2)}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)}. \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} &= \frac{2(x_1 - x_2)}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} : (x_1 - x_2) \\ &= \frac{2}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)}. \end{aligned}$$

$$\forall \begin{cases} x_1 \in (-\infty; -2) \\ x_2 \in (-\infty; -2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 < -2 \\ x_2 < -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2 < 0 \\ x_2 + 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} > 0.$$

Vậy hàm số tăng trên  $(-\infty; -2)$

e.  $y = \sqrt{x+1}$  trên khoảng  $(-1; +\infty)$ .

Với  $\forall x_1, x_2 \in (-1; +\infty), x_1 \neq x_2$ . Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} &= \frac{\sqrt{x_1+1} - \sqrt{x_2+1}}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{(\sqrt{x_1+1} - \sqrt{x_2+1})(\sqrt{x_1+1} + \sqrt{x_2+1})}{(x_1 - x_2)(\sqrt{x_1+1} + \sqrt{x_2+1})} \\ &= \frac{x_1 - x_2}{(x_1 - x_2)(\sqrt{x_1+1} + \sqrt{x_2+1})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x_1+1} + \sqrt{x_2+1}} > 0, \forall x \in (-1; +\infty). \end{aligned}$$

Vậy hàm số tăng trên  $(-1; +\infty)$

f.  $y = \frac{1}{x+1}$  trên khoảng  $(-\infty; -1)$ .

Với  $\forall x_1, x_2 \in (-\infty; -1), x_1 \neq x_2$ . Ta có:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1+1} - \frac{1}{x_2+1}$$

$$= \frac{-(x_1 - x_2)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} &= \frac{-(x_1 - x_2)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} : (x_1 - x_2) \\ &= \frac{-1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}. \end{aligned}$$

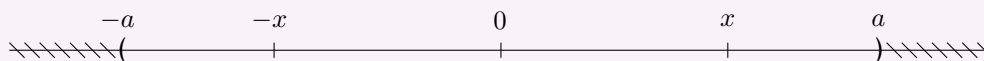
$$\text{Vì } \begin{cases} x_1 \in (-\infty; -1) \\ x_2 \in (-\infty; -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 < -1 \\ x_2 < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 1 < 0 \\ x_2 + 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{-1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} < 0.$$

Vậy hàm số giảm trên  $(-\infty; -1)$

### ○ Dạng 5. Hàm số chẵn - Hàm số lẻ

#### 1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- ① **Tập đối xứng.**  $\mathcal{D}$  là tập con của tập số thực  $\mathbb{R}$  gọi là **tập đối xứng** nếu thỏa: với mọi  $x$  thuộc  $\mathcal{D}$  thì  $-x$  cũng thuộc  $\mathcal{D}$ .



#### ✿ Ví dụ 1.

- ☑  $\mathbb{R}$  là tập đối xứng vì  $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$ .
- ☑  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$  là tập đối xứng vì  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} \Rightarrow -x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ .
- ☑  $\{-a; a\}$ , (với  $a > 0$ ) là tập đối xứng vì  $\forall x \in \{-a; a\} \Rightarrow -x \in \{-a; a\}$ .
- ☑  $[-a; a]$ , (với  $a > 0$ ) là tập đối xứng vì  $\forall x \in [-a; a] \Rightarrow -x \in [-a; a]$ .
- ☑  $\{-a; a\} \setminus \{0\}$ , (với  $a > 0$ ) là tập đối xứng vì  $\forall x \in \{-a; a\} \setminus \{0\} \Rightarrow -x \in \{-a; a\} \setminus \{0\}$ .
- ☑  $[-a; a] \setminus \{0\}$ , (với  $a > 0$ ) là tập đối xứng vì  $\forall x \in [-a; a] \setminus \{0\} \Rightarrow -x \in [-a; a] \setminus \{0\}$ .

#### ✿ Ví dụ 2.

- ☑  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  không là tập đối xứng vì  $x = -2 \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$  nhưng  $-x = 2 \notin \mathbb{R} \setminus \{2\}$ .
- ☑  $[-4; 4)$  không là tập đối xứng vì  $x = -4 \in [-4; 4)$  nhưng  $-x = 4 \notin [-4; 4)$ .
- ☑  $[-4; 6]$  không là tập đối xứng vì  $x = 5 \in [-4; 6]$  nhưng  $-x = -5 \notin [-4; 6]$ .
- ☑  $[-5; 5] \setminus \{1\}$  không là tập đối xứng vì  $x = -1 \in [-5; 5] \setminus \{1\}$  nhưng  $-x = 1 \notin [-5; 5] \setminus \{1\}$ .

- ② **Hàm số chẵn, hàm số lẻ**

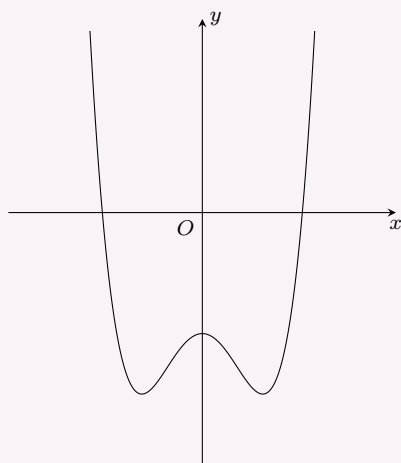
Hàm số  $f$  xác định trên **tập đối xứng**  $\mathcal{D}$ .

- ☑ Nếu  $\forall x \in \mathcal{D}$  mà  $f(-x) = f(x)$  thì ta nói  $f$  là **hàm số chẵn** trên  $\mathcal{D}$ .
- ☑ Nếu  $\forall x \in \mathcal{D}$  mà  $f(-x) = -f(x)$  thì ta nói  $f$  là **hàm số lẻ** trên  $\mathcal{D}$ .

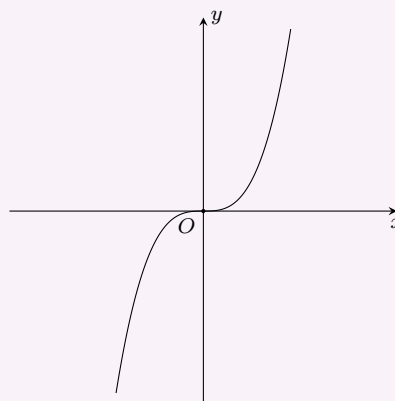
- ③ **Đồ thị hàm số chẵn, hàm số lẻ**

- ☑ Đồ thị hàm số **hàm số chẵn** nhận trục tung làm trục đối xứng,

☉ Đồ thị hàm số **hàm số lẻ** nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.



Đồ thị hàm số chẵn



Đồ thị hàm số lẻ

2

## PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### CÁCH XÉT TÍNH CHẴN - LẼ CỦA HÀM SỐ

Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = f(x)$ .

- ☉ Nếu  $\mathcal{D}$  không là tập đối xứng thì hàm số  $f$  không chẵn và không lẻ trên  $\mathcal{D}$ .
- ☉ Nếu  $\mathcal{D}$  là tập đối xứng: Với  $\forall x \in \mathcal{D}$ , tính  $f(-x)$ .
  - Nếu  $f(-x) \neq \pm f(x)$ : Chọn một giá trị thích hợp  $x = a \in \mathcal{D}$  để có  $f(-a) \neq \pm f(a)$ . Từ đó kết luận hàm số không chẵn và không lẻ trên  $\mathcal{D}$ .
  - Nếu  $f(-x) = f(x)$  thì  $f$  là hàm số **chẵn** trên  $\mathcal{D}$ .
  - Nếu  $f(-x) = -f(x)$  thì  $f$  là hàm số **lẻ** trên  $\mathcal{D}$ .

3

## VÍ DỤ

**Ví dụ 1.** Xét tính chẵn-lẻ của hàm số  $y = f(x) = \sqrt{2x-3}$

**Lời giải.**

Hàm số xác định  $\Leftrightarrow 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$ .

$\Rightarrow$  Tập xác định  $\mathcal{D} = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$ .

Với  $x = 3 \in \mathcal{D}$  nhưng  $x = -3 \notin \mathcal{D}$  nên  $\mathcal{D}$  không phải là tập đối xứng.

Vậy hàm số không chẵn, không lẻ.

**Ví dụ 2.** Xét tính chẵn-lẻ của hàm số  $y = g(x) = 2x - 1 + \sqrt{3+x} + \sqrt{3-x}$

**Lời giải.**

Hàm số xác định  $\Leftrightarrow \begin{cases} 3+x \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$ .

$\Rightarrow$  Tập xác định  $\mathcal{D} = [-3; 3]$  là tập đối xứng.

Với  $\forall x \in \mathcal{D}$ . Xét

$$\begin{aligned} g(-x) &= 2(-x) - 1 + \sqrt{3+(-x)} + \sqrt{3-(-x)} \\ &= -2x - 1 + \sqrt{3-x} + \sqrt{3+x} \end{aligned}$$

$$= -(2x + 1 - \sqrt{3-x} - \sqrt{3+x}).$$

Chọn  $a = 2$ , ta có

$$g(-2) = -4 + \sqrt{5}; g(2) = 4 + \sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} g(-2) \neq g(2) \\ g(-2) \neq -g(2). \end{cases}$$

Vậy hàm số không chẵn, không lẻ.

**Ví dụ 3.** Xét tính chẵn-lẻ của hàm số  $y = f(x) = \frac{\sqrt{3+x} + \sqrt{3-x}}{x^2}$

**Lời giải.**

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+x \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 3 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

$\Rightarrow$  Tập xác định  $\mathcal{D} = [-3; 3] \setminus \{0\}$  là tập đối xứng.

Với  $\forall x \in \mathcal{D}$ . Xét

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{\sqrt{3+(-x)} + \sqrt{3-(-x)}}{(-x)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3-x} + \sqrt{3+x}}{x^2} = f(x). \end{aligned}$$

Vậy hàm số chẵn.

**Ví dụ 4.** Xét tính chẵn-lẻ của hàm số  $y = h(x) = x^3 - x + \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$

**Lời giải.**

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

$\Rightarrow$  Tập xác định  $\mathcal{D} = [-1; 1]$  là tập đối xứng.

Với  $\forall x \in \mathcal{D}$ . Xét

$$\begin{aligned} h(-x) &= (-x)^3 - (-x) + \sqrt{1+(-x)} - \sqrt{1-(-x)} \\ &= -x^3 + x + \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} \\ &= -(x^3 - x + \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) = -h(x) \end{aligned}$$

Vậy hàm số lẻ.

4

#### BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 1.** Chứng minh đồ thị hàm số  $y = f(x) = \frac{5x}{x^2-4}$  nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

**Lời giải.**

Ta cần chứng minh hàm số  $y = f(x) = \frac{5x}{x^2-4}$  là lẻ.

Thật vậy: Hàm số xác định  $\Leftrightarrow x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$ . Suy ra tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$  là tập đối xứng.

Với  $\forall x \in \mathcal{D}$ . Xét

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{5(-x)}{(-x)^2-4} \\ &= \frac{-5x}{x^2-4} = -f(x). \end{aligned}$$

Vậy hàm số lẻ.

**Bài 2.** Chứng minh đồ thị hàm số  $y = g(x) = |2-x| + |2+x|$  nhận trục tung làm trục đối xứng.

**Lời giải.**

Ta cần chứng minh hàm số  $y = g(x) = |2 - x| + |2 + x|$  là chẵn.

Thật vậy: Hàm số xác định  $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$  Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  là tập đối xứng.

Với  $\forall x \in \mathcal{D}$ . Xét

$$\begin{aligned} g(-x) &= |2 - (-x)| + |2 + (-x)| \\ &= |2 + x| + |2 - x| = g(x). \end{aligned}$$

Vậy hàm số chẵn.

**Bài 3.** Xét tính chẵn-lẻ của các hàm số sau.

①  $y = f(x) = \frac{2x^4}{x^2 - 9}.$

②  $y = h(x) = x^2 - 3x.$

③  $y = g(x) = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}.$

④  $y = k(x) = \frac{x^3 - 5x}{|x-1| + |x+1|}.$

⑤  $y = u(x) = \frac{\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x}}{x-1}.$

⑥  $y = v(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{6+3x} - \sqrt{6-3x}}.$

**Lời giải.**

①  $y = f(x) = \frac{2x^4}{x^2 - 9}.$

Hàm số xác định  $\Leftrightarrow x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 3. \Rightarrow$  Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$  là tập đối xứng. Với  $\forall x \in \mathcal{D}$ . Xét

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{2(-x)^4}{(-x)^2 - 9} \\ &= \frac{2x^4}{x^2 - 9} = f(x). \end{aligned}$$

Vậy hàm số chẵn.

②  $y = h(x) = x^2 - 3x.$

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  là tập đối xứng.

Với  $\forall x \in \mathcal{D}$ . Xét

$$h(-x) = (-x)^2 - 3(-x) = x^2 + 3x.$$

Chọn  $a = 2$ , ta có

$$h(-2) = 10; h(2) = -2 \Rightarrow \begin{cases} h(-2) \neq h(2) \\ h(-2) \neq -h(2). \end{cases}$$

Vậy hàm số không chẵn, không lẻ.

③  $y = g(x) = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}.$

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+x \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2.$$

Suy ra tập xác định  $\mathcal{D} = [-2; 2]$  là tập đối xứng.

Với  $\forall x \in \mathcal{D}$ . Xét

$$\begin{aligned} g(-x) &= \sqrt{2+(-x)} + \sqrt{2-(-x)} \\ &= \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} = g(x). \end{aligned}$$

Vậy hàm số chẵn.

④  $y = k(x) = \frac{x^3 - 5x}{|x-1| + |x+1|}.$

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  là tập đối xứng. Với  $\forall x \in \mathcal{D}$ . Xét

$$\begin{aligned} k(-x) &= \frac{(-x)^3 - 5(-x)}{|(-x)-1| + |(-x)+1|} \\ &= \frac{-x^3 + 5x}{|x+1| + |x-1|} \\ &= -\frac{x^3 - 5x}{|x-1| + |x+1|} = -k(x) \end{aligned}$$

Vậy hàm số lẻ.

$$\textcircled{5} \quad y = u(x) = \frac{\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x}}{x-1}.$$

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} 5+x \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 5 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5 \text{ và } x \neq 1.$$

Tập xác định  $\mathcal{D} = [-5; 5] \setminus \{1\}$  không phải là tập đối xứng. Vậy hàm số không chẵn, không lẻ.

$$\textcircled{6} \quad y = v(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{6+3x} - \sqrt{6-3x}}.$$

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} 6+3x \geq 0 \\ 6-3x \geq 0 \\ \sqrt{6+3x} - \sqrt{6-3x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 2 \\ \sqrt{6+3x} \neq \sqrt{6-3x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Tập xác định  $\mathcal{D} = [-2; 2] \setminus \{0\}$  là tập đối xứng. Với  $\forall x \in \mathcal{D}$ . Xét

$$\begin{aligned} v(-x) &= \frac{2(-x)^3}{\sqrt{6+3(-x)} - \sqrt{6-3(-x)}} \\ &= \frac{-2x^3}{\sqrt{6-3x} - \sqrt{6+3x}} \\ &= \frac{2x^3}{\sqrt{6+3x} - \sqrt{6-3x}} = v(x). \end{aligned}$$

Vậy hàm số chẵn.

## C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

**Câu 1.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2}}{x}$ .

☐ (A)  $\mathcal{D} = [-2; 2]$ .

☐ (B)  $\mathcal{D} = (-2; 2) \setminus \{0\}$ .

☐ (C)  $\mathcal{D} = [-2; 2] \setminus \{0\}$ .

☐ (D)  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện xác định là } \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -2 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-2; 2] \setminus \{0\}.$$

Vậy  $\mathcal{D} = [-2; 2] \setminus \{0\}$

Chọn đáp án **(C)**.

**Câu 2.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \sqrt{6-x} + \frac{2x+1}{1+\sqrt{x-1}}$ .

☐ (A)  $\mathcal{D} = (1; +\infty)$ .

☐ (B)  $\mathcal{D} = [1; 6]$ .

☐ (C)  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

☐ (D)  $\mathcal{D} = (-\infty; -6)$ .

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện xác định là } \begin{cases} 6-x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in [1; 6].$$

Vậy  $\mathcal{D} = [1; 6]$

Chọn đáp án **(B)**.

**Câu 3.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x\sqrt{x^2-4x+4}}$ .

☐ (A)  $\mathcal{D} = [-2; +\infty) \setminus \{0; 2\}$ .

☐ (B)  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

☐ (C)  $\mathcal{D} = [-2; +\infty)$ .

☐ (D)  $\mathcal{D} = (-2; +\infty)$ .

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện xác định là } \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x \neq 0 \\ x^2-4x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq 0 \\ (x-2)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow x \in [-2; +\infty) \setminus \{0; 2\}.$$

Vậy  $\mathcal{D} = [-2; +\infty) \setminus \{0; 2\}$

Chọn đáp án **(A)**.

**Câu 4.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{x}{x-\sqrt{x-6}}$ .

(A)  $\mathcal{D} = [0; +\infty)$ .

(B)  $\mathcal{D} = [0; +\infty) \setminus \{9\}$ .

(C)  $\mathcal{D} = 9$ .

(D)  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định là  $\begin{cases} x \geq 0 \\ x - \sqrt{x} - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 3 \\ \sqrt{x} \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 9 \end{cases} \Rightarrow x \in [0; +\infty) \setminus \{9\}$ .

Vậy  $\mathcal{D} = [0; +\infty) \setminus \{9\}$

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 5.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}}{(x-2)(x-3)}$ .

(A)  $\mathcal{D} = [1; 4]$ .

(B)  $\mathcal{D} = (1; 4) \setminus \{2; 3\}$ .

(C)  $\mathcal{D} = [1; 4] \setminus \{2; 3\}$ .

(D)  $\mathcal{D} = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định là  $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ (x-2)(x-3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 4 \\ x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases} \Rightarrow x \in [1; 4] \setminus \{2; 3\}$ .

Vậy  $\mathcal{D} = [1; 4] \setminus \{2; 3\}$ .

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 6.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{2018}{\sqrt[3]{x^2-3x+2} - \sqrt[3]{x^2-7}}$ .

(A)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ .

(B)  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

(C)  $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ .

(D)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định là  $\sqrt[3]{x^2-3x+2} - \sqrt[3]{x^2-7} \neq 0 \Leftrightarrow x^2-3x+2 \neq x^2-7 \Leftrightarrow x \neq 3 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ .

Vậy  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ .

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 7.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{|x|}{|x-2| + |x^2+2x|}$ .

(A)  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

(B)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; -2\}$ .

(C)  $\mathcal{D} = (-2; 0)$ .

(D)  $\mathcal{D} = (2; +\infty)$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định là  $|x-2| + |x^2+2x| \neq 0$ .

Ta có:  $|x-2| + |x^2+2x| = 0$  khi và chỉ khi  $\begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$ .

Do đó mẫu luôn khác không với mọi  $x$ .

Vậy  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 8.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{2x-1}{\sqrt{x|x-4|}}$ .

(A)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$ .

(B)  $\mathcal{D} = (0; +\infty)$ .

(C)  $\mathcal{D} = [0; +\infty) \setminus \{4\}$ .

(D)  $\mathcal{D} = (0; +\infty) \setminus \{4\}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định là  $x|x-4| > 0$

Do  $|x-4| \geq 0$  nên  $x|x-4| > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 4 \end{cases} \Rightarrow x \in (0; +\infty) \setminus \{4\}$ .

Vậy  $\mathcal{D} = (0; +\infty) \setminus \{4\}$ .

**Chọn đáp án (D).**

**Câu 9.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{\sqrt{5-3|x|}}{x^2+4x+3}$ .

(A)  $\mathcal{D} = \left[-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right] \setminus \{-1\}$ .

(B)  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

(C)  $\mathcal{D} = \left(-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right) \setminus \{-1\}$ .

(D)  $\mathcal{D} = \left[-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right]$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định là  $\begin{cases} 5-3|x| \geq 0 \\ x^2+4x+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right] \\ x \neq -1 \\ x \neq -3 \end{cases} \Rightarrow x \in \left[-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right] \setminus \{-1\}$ .

Vậy  $\mathcal{D} = \left[-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right] \setminus \{-1\}$ .

Chọn đáp án **A**.

**Câu 10.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-3; 3]$  để hàm số  $f(x) = (m+1)x + m - 2$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

**A** 7.

**B** 5.

**C** 4.

**D** 3.

**Lời giải.**

Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x_1; x_2 \in \mathbb{R} : x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .

Khi đó  $(m+1)x_1 + m - 2 > (m+1)x_2 + m - 2 \Leftrightarrow (m+1)(x_1 - x_2) > 0 \Leftrightarrow m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$ .

Suy ra  $m \in \{0; 1; 2; 3\}$ .

Vậy có 4 giá trị của  $m$ .

Chọn đáp án **C**.

**Câu 11.** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ.

**A**  $y = x^{2018} - 2017$ .

**B**  $y = \sqrt{2x+3}$ .

**C**  $y = \sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}$ .

**D**  $y = |x+3| + |x-3|$ .

**Lời giải.**

$y = f(x) = \sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}$  có tập xác định  $\mathcal{D} = [-3; 3]$  là tập đối xứng.

Mặt khác  $\forall x \in \mathcal{D}$ , ta có  $-x \in \mathcal{D}$  và  $f(-x) = \sqrt{3-x} - \sqrt{3+x} = -f(x)$ .

Suy ra  $y = \sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}$  là hàm số lẻ.

Chọn đáp án **C**.

**Câu 12.** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

**A**  $y = |x+1| + |x-1|$ .

**B**  $y = |x+3| + |x-2|$ .

**C**  $y = 2x^2 - 3x$ .

**D**  $y = 2x^4 - 3x^2 + x$ .

**Lời giải.**

$y = f(x) = |x+1| + |x-1|$  có tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  là tập đối xứng.

Mặt khác  $\forall x \in \mathcal{D}$ , ta có  $-x \in \mathcal{D}$  và  $f(-x) = |-x+1| + |-x-1| = |x-1| + |x+1| = f(x)$ .

Suy ra  $y = |x+1| + |x-1|$  là hàm số chẵn.

Chọn đáp án **A**.

**Câu 13.** Trong các hàm số  $y = |x+2| - |x-2|$ ,  $y = |2x+1| + \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$ ,  $y = x(|x| - 2)$ ,  $y = \frac{|x+2015| + |x-2015|}{|x+2015| - |x-2015|}$  có bao nhiêu hàm số lẻ?

**A** 1.

**B** 2.

**C** 3.

**D** 4.

**Lời giải.**

• Hàm số  $y = f(x) = |x+2| - |x-2|$  có tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  là tập đối xứng.

Mặt khác  $\forall x \in \mathcal{D}$ , ta có  $-x \in \mathcal{D}$  và  $f(-x) = |-x+2| - |-x-2| = |x-2| - |x+2| = -f(x)$ .

Suy ra  $y = |x+2| - |x-2|$  là hàm số lẻ.

• Hàm số  $y = f(x) = |2x+1| + \sqrt{4x^2 - 4x + 1} = |2x+1| + |2x-1|$  có tập xác định là  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  là tập đối xứng.

Mặt khác  $\forall x \in \mathcal{D}$ , ta có  $-x \in \mathcal{D}$  và  $f(-x) = |-2x+1| + |-2x-1| = |2x-1| + |2x+1| = f(x)$ .

Suy ra hàm số  $y = |2x+1| + \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$  là hàm số chẵn.

• Hàm số  $y = f(x) = x(|x| - 2)$  có tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  là tập đối xứng.

Mặt khác  $\forall x \in \mathcal{D}$ , ta có  $-x \in \mathcal{D}$  và  $f(-x) = -x(|-x| - 2) = -x(|x| - 2) = -f(x)$ .

Suy ra  $y = x(|x| - 2)$  là hàm số lẻ.

• Hàm số  $y = f(x) = \frac{|x+2015| + |x-2015|}{|x+2015| - |x-2015|}$  có tập xác định là  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  là tập đối xứng.

Mặt khác  $\forall x \in \mathcal{D}$ , ta có  $-x \in \mathcal{D}$  và  $f(-x) = \frac{|-x+2015| + |-x-2015|}{|-x+2015| - |-x-2015|} = \frac{|x-2015| + |x+2015|}{|x-2015| - |x+2015|} = -f(x)$ .

Suy ra  $y = \frac{|x+2015| + |x-2015|}{|x+2015| - |x-2015|}$  là hàm số lẻ.

Vậy có tất cả là 3 hàm số lẻ.

Chọn đáp án **C**.

**Câu 14.** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} -x^3 - 6 & \text{khi } x \leq -2 \\ |x| & \text{khi } -2 < x < 2. \\ x^3 - 6 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$ . Khẳng định nào đúng?

**A**  $f(x)$  là hàm số lẻ.

- (B)  $f(x)$  là hàm số chẵn.  
 (C) Đồ thị của hàm số  $f(x)$  đối xứng qua gốc tọa độ.  
 (D) Đồ thị của hàm số  $f(x)$  đối xứng qua trục hoành.

🔗 **Lời giải.**

Hàm số  $f(x)$  có tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

$$\text{Khi đó } \forall x \in \mathcal{D}, \text{ ta có } -x \in \mathcal{D} \text{ và } f(-x) = \begin{cases} -(-x)^3 - 6 & \text{khi } -x \leq -2 \\ |-x| & \text{khi } -2 < -x < 2 \\ (-x)^3 - 6 & \text{khi } -x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow f(-x) = \begin{cases} -x^3 - 6 & \text{khi } x \leq -2 \\ |x| & \text{khi } -2 < x < 2 \\ x^3 - 6 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}.$$

Suy ra ta có:  $f(-x) = f(x)$ .

$$\text{Vậy hàm số } f(x) = \begin{cases} -x^3 - 6 & \text{khi } x \leq -2 \\ |x| & \text{khi } -2 < x < 2 \\ x^3 - 6 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases} \text{ là hàm số chẵn.}$$

🔗 **Chọn đáp án (B).**

**Câu 15.** Tìm điều kiện của tham số để hàm số  $f(x) = ax^2 + bx + c$  là hàm số chẵn.

- (A)  $a$  tùy ý,  $b = 0, c = 0$ . (B)  $a$  tùy ý,  $b = 0, c$  tùy ý. (C)  $a, b, c$  tùy ý. (D)  $a$  tùy ý,  $b$  tùy ý,  $c = 0$ .

🔗 **Lời giải.**

Hàm số  $f(x)$  có tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  là tập đối xứng.

Hàm số  $f(x)$  là hàm số chẵn khi  $\forall x \in \mathcal{D}; f(-x) = f(x)$

$$\text{Khi đó } ax^2 + bx + c = a(-x)^2 + b(-x) + c \Leftrightarrow bx = -bx \Rightarrow b = -b \Rightarrow b = 0.$$

🔗 **Chọn đáp án (B).**

**Câu 16.** Hàm số  $y = \frac{x+1}{x-2m+1}$  xác định trên  $[0; 1)$  khi.

- (A)  $m < \frac{1}{2}$ . (B)  $m \geq 1$ . (C)  $\begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ m \geq 1 \end{cases}$ . (D)  $\begin{cases} m \geq 2 \\ m < 1 \end{cases}$ .

🔗 **Lời giải.**

Hàm số xác định khi  $x \neq 2m - 1$ .

$$\text{Theo yêu cầu của bài toán, ta có } \begin{cases} 2m - 1 < 0 \\ 2m - 1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ m \geq 1 \end{cases}$$

🔗 **Chọn đáp án (C).**

**Câu 17.** Hàm số  $y = \sqrt{\frac{x^4 - 3x^2 + x + 7}{x^4 - 2x^2 + 1}} - 1$  có tập xác định là

- (A)  $[-2; -1] \cup (1; 3]$ . (B)  $(-2; -1] \cup [1; 3)$ .  
 (C)  $[-2; 3] \setminus \{-1; 1\}$ . (D)  $[-2; -1] \cup (-1; 1) \cup (1; 3]$ .

🔗 **Lời giải.**

$$\text{Điều kiện xác định là } \frac{x^4 - 3x^2 + x + 7}{x^4 - 2x^2 + 1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^4 - 3x^2 + x + 7}{x^4 - 2x^2 + 1} \geq 1 (*).$$

$$\text{Ta nhận thấy } x^4 - 2x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

$$\text{Với } \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 1 \end{cases}, \text{ ta có } (*) \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 + x + 7 \geq x^4 - 2x^2 + 1.$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)(3-x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+2 \leq 0 \\ 3-x \leq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2; 3]. \quad (\text{vô lý})$$

Vậy tập xác định của hàm số là  $\mathcal{D} = [-2; 3] \setminus \{-1; 1\}$

🔗 **Chọn đáp án (C).**

**Câu 18.** Hàm số  $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-3}+x-2}$  có tập xác định là.

- (A)  $\mathcal{D} = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$ . (B)  $\mathcal{D} = (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty) \setminus \left\{\frac{7}{4}\right\}$ .  
 (C)  $\mathcal{D} = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty) \setminus \left\{\frac{7}{4}\right\}$ . (D)  $\mathcal{D} = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup \left(\sqrt{3}; \frac{7}{4}\right)$ .

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện xác định là } \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} \neq 2 - x \\ x^2 - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty) \\ \sqrt{x^2 - 3} \neq 2 - x \end{cases}.$$

$$\text{Ta xét phương trình } \sqrt{x^2 - 3} = 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 - 3 = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x = \frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{7}{4}.$$

$$\text{Khi đó ta suy ra điều kiện xác định của hàm số là } \begin{cases} x \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty) \\ x \neq \frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty) \setminus \left\{ \frac{7}{4} \right\}.$$

$$\text{Vậy } \mathcal{D} = (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty) \setminus \left\{ \frac{7}{4} \right\}.$$

**Chọn đáp án B.**

**Câu 19.** Cho hai hàm số  $f(x) = |x + 2| - |x - 2|$  và  $g(x) = -x^4 + x^2 + 1$ . Khi đó.

(A)  $f(x)$  và  $g(x)$  cùng chẵn.

(B)  $f(x)$  và  $g(x)$  cùng lẻ.

(C)  $f(x)$  chẵn,  $g(x)$  lẻ.

(D)  $f(x)$  lẻ,  $g(x)$  chẵn.

**Lời giải.**

Cả hai hàm số  $f(x)$  và  $g(x)$  đều có tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  là tập đối xứng. Khi đó

- $\forall x \in \mathcal{D}$ , ta có  $-x \in \mathcal{D}$  và  $f(-x) = |-x + 2| - |-x - 2| = |x - 2| - |x + 2| = -f(x)$ . Suy ra  $f(x)$  là hàm lẻ.
- $\forall x \in \mathcal{D}$ , ta có  $-x \in \mathcal{D}$  và  $g(-x) = -(-x)^4 + (-x)^2 + 1 = -x^4 + x^2 + 1 = g(x)$ . Suy ra  $g(x)$  là hàm chẵn.

**Chọn đáp án D.**

**Câu 20.** Hàm số  $y = \sqrt{\frac{x^3}{|x| - 2}}$  có tập xác định là.

(A)  $(-2; 0] \cup (2; +\infty)$ .

(B)  $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ .

(C)  $(-\infty; -2) \cup (0; 2)$ .

(D)  $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định là  $\frac{x^3}{|x| - 2} \geq 0$ . Khi đó ta có các trường hợp sau

- Trường hợp 1:  $\begin{cases} x^3 \geq 0 \\ |x| - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in (2; +\infty).$
- Trường hợp 2:  $\begin{cases} x^3 \leq 0 \\ |x| - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \in (-2; 2) \end{cases} \Rightarrow x \in (-2; 0].$

Kết hợp cả hai trường hợp, ta suy ra  $x \in (-2; 0] \cup (2; +\infty)$ .

Vậy  $\mathcal{D} = (-2; 0] \cup (2; +\infty)$ .

**Chọn đáp án A.**

**Câu 21.** Hàm số  $y = \frac{x + 1}{x - 2m + 1}$  xác định trên  $[0; 1)$  khi.

(A)  $m < \frac{1}{2}$ .

(B)  $m \geq 1$ .

(C)  $\begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ m \geq 1 \end{cases}$ .

(D)  $\begin{cases} m \geq 2 \\ m < 1 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

Hàm số xác định khi  $x \neq 2m - 1$ .

$$\text{Theo yêu cầu của bài toán, ta có } \begin{cases} 2m - 1 < 0 \\ 2m - 1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ m \geq 1 \end{cases}.$$

**Chọn đáp án C.**

**Câu 22.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x - 2\sqrt{x + 2}$  là.

(A) -4.

(B) -3.

(C) -2.

(D) -1.

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = [-2; +\infty)$ .

$$\text{Ta có } y = x - 2\sqrt{x + 2} = (x + 2) - 2\sqrt{x + 2} + 1 - 3 = (\sqrt{x + 2} - 1)^2 - 3 \geq -3.$$

Dấu bằng xảy ra khi  $\sqrt{x + 2} = 1 \Leftrightarrow x = -1$  (nhận).

Vậy min  $y = -3$ , xảy ra khi  $x = -1$ .

$x \in \mathcal{D}$

🔍 Chọn đáp án (B).....

**Câu 23.** Tìm  $m$  để hàm số  $y = \frac{x\sqrt{2} + 1}{x^2 + 2x - m + 1}$  có tập xác định là  $\mathbb{R}$ .

(A)  $m \geq 1$ .

(B)  $m < 0$ .

(C)  $m > 2$ .

(D)  $m \leq 3$ .

🔗 **Lời giải.**

Yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow x^2 + 2x - m + 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Nghĩa là  $(x + 1)^2 \neq m, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Mà  $(x + 1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  nên ta suy ra  $m < 0$ .

🔍 Chọn đáp án (B).....

**Câu 24.** Hàm số nào trong các hàm số sau không là hàm số chẵn.

(A)  $y = \frac{x^2 + 1}{|2 - x| + |2 + x|}$ .

(B)  $y = |1 + 2x| + |1 - 2x|$ .

(C)  $y = \sqrt[3]{2 + x} + \sqrt[3]{2 - x} + 5$ .

(D)  $y = \sqrt[3]{2 - x} - \sqrt[3]{2 + x}$ .

🔗 **Lời giải.**

Tất cả các hàm số đều có tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  là tập đối xứng.

Đối với hàm  $y = f(x) = \sqrt[3]{2 - x} - \sqrt[3]{2 + x}$ . Lấy  $-1 \in \mathcal{D}$  nên  $1 \in \mathcal{D}$ . Khi đó

$f(-1) = \sqrt[3]{3} - 1$  và  $f(1) = 1 - \sqrt[3]{3}$ . Suy ra  $f(-1) \neq f(1)$ .

Suy ra  $y = \sqrt[3]{2 - x} - \sqrt[3]{2 + x}$  không là hàm số chẵn.

🔍 Chọn đáp án (D).....

**Câu 25.** Hàm số nào trong các hàm số sau là hàm số lẻ.

(A)  $y = |x - 1| + |x + 1|$ .

(B)  $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ .

(C)  $y = \frac{1}{x^4 - 2x^2 + 3}$ .

(D)  $y = 1 - 3x + x^3$ .

🔗 **Lời giải.**

Hàm số  $y = f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$  có tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  là tập đối xứng.

Mặt khác  $\forall x \in \mathcal{D}$ , ta có  $-x \in \mathcal{D}$  và  $f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{-x} = -\frac{x^2 + 1}{x} = -f(x)$ .

Suy ra  $y = \frac{x^2 + 1}{x}$  là hàm số lẻ.

🔍 Chọn đáp án (B).....

**Câu 26.** Hàm số  $y = \sqrt{x^2 - x - 20} + \sqrt{6 - x}$  có tập xác định là.

(A)  $(-\infty; -4) \cup (5; 6]$ .

(B)  $(-\infty; -4) \cup (5; 6)$ .

(C)  $(-\infty; -4] \cup [5; 6]$ .

(D)  $(-\infty; -4) \cup [5; 6)$ .

🔗 **Lời giải.**

Điều kiện xác định là  $\begin{cases} x^2 - x - 20 \geq 0 \\ 6 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 4)(x - 5) \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq -4 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; -4] \cup [5; 6]$

🔍 Chọn đáp án (C).....

**Câu 27.** Hàm số  $y = \sqrt{\frac{x^3}{|x| - 2}}$  có tập xác định là.

(A)  $(-2; 0] \cup (2; +\infty)$ .

(B)  $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ .

(C)  $(-\infty; -2) \cup (0; 2)$ .

(D)  $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ .

🔗 **Lời giải.**

Điều kiện xác định là  $\frac{x^3}{|x| - 2} \geq 0$ . Khi đó ta có các trường hợp sau

• Trường hợp 1:  $\begin{cases} x^3 \geq 0 \\ |x| - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in (2; +\infty)$ .

• Trường hợp 2:  $\begin{cases} x^3 \leq 0 \\ |x| - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \in (-2; 2) \end{cases} \Rightarrow x \in (-2; 0]$ .

Kết hợp cả hai trường hợp, ta suy ra  $x \in (-2; 0] \cup (2; +\infty)$ .

Vậy  $\mathcal{D} = (-2; 0] \cup (2; +\infty)$ .

🔍 Chọn đáp án (A).....

**Câu 28.** Cho hàm số  $f(x) = |x + 2| + |x - 2|$  và  $g(x) = x^3 + 5x$ . Khi đó.

(A)  $f(x)$  và  $g(x)$  đều là hàm số lẻ.

(B)  $f(x)$  và  $g(x)$  đều là hàm số chẵn.

(C)  $f(x)$  lẻ,  $g(x)$  chẵn.

(D)  $f(x)$  chẵn,  $g(x)$  lẻ.

🔗 **Lời giải.**

Tập xác định của hai hàm số là  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  là tập đối xứng. Khi đó

- $\forall x \in \mathcal{D}$ , ta có  $-x \in \mathcal{D}$  và  $f(-x) = |-x+2| + |-x-2| = |x-2| + |x+2| = f(x)$ . Suy ra  $f(x)$  hàm số chẵn.
- $\forall x \in \mathcal{D}$ , ta có  $-x \in \mathcal{D}$  và  $g(-x) = (-x)^3 + 5(-x) = -x^3 - 5x = -g(x)$ . Suy ra  $g(x)$  hàm số lẻ.

🔍 Chọn đáp án **(D)**.

**Câu 29.** Trong các hàm số sau, hàm số nào **không phải** hàm số chẵn.

- (A)  $y = |x-5| + |x+5|$ . (B)  $y = x^4 - x^2 + 12$ . (C)  $y = |1-x| + |x+1|$ . (D)  $y = |x^2 - 1| + x$ .

🔍 Lời giải.

Các hàm số đã cho đều có tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  là tập đối xứng.

Xét hàm số  $y = f(x) = |x^2 - 1| + x$ . Ta lấy  $-1 \in \mathcal{D}$  nên  $1 \in \mathcal{D}$ , khi đó

$f(-1) = -1$  và  $f(1) = 1$ . Suy ra  $f(-1) \neq f(1)$  nên  $f(x)$  không làm hàm số chẵn.

🔍 Chọn đáp án **(D)**.

**Câu 30.** Trong các hàm số sau, hàm số nào giảm trên khoảng  $(0; 1)$ ?

- (A)  $y = x^2$ . (B)  $y = x^3$ . (C)  $y = \frac{1}{x}$ . (D)  $y = \sqrt{x}$ .

🔍 Lời giải.

$\forall x_1$  và  $x_2$  thuộc  $(0; 1)$ ,  $x_1 < x_2$ , ta có:  $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ .

Suy ra hàm số  $y = \frac{1}{x}$  giảm trên khoảng  $(0; 1)$ .

🔍 Chọn đáp án **(C)**.

**Câu 31.** Hàm số  $y = x(1 - |x|)$  là hàm số.

- (A) Chẵn. (B) Lẻ. (C) Không chẵn, không lẻ. (D) Vừa chẵn, vừa lẻ.

🔍 Lời giải.

Hàm số  $y = f(x) = x(1 - |x|)$   $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  là tập đối xứng. Khi đó

$\forall x \in \mathcal{D}$ , ta có  $-x \in \mathcal{D}$  và  $f(-x) = -x(1 - |-x|) = -x(1 - |x|) = -f(x)$ . Suy ra  $f(x)$  là hàm số lẻ.

🔍 Chọn đáp án **(B)**.

**Câu 32.** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ . Hệ thức nào sai?

- (A)  $f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$ . (B)  $f[f(f(x))] = f(x)$ .  
(C)  $f(x+1) = f(x) + 1$ . (D)  $f\left(\frac{1}{x+1}\right) = 1 - \frac{2}{x+2}$ .

🔍 Lời giải.

Cho  $x = 1$ . Theo đề  $f(1) = 0$ .

- ☑ Xét  $f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$ . Ta có  $f(1) = 0 = -f(1)$ .
- ☑ Xét  $f[f(f(x))] = f(x)$ . Ta có  $f[f(f(1))] = f[f(0)] = f(1)$ .
- ☑ Xét  $f(x+1) = f(x) + 1$ . Ta có  $f(2) = -\frac{1}{3} \neq f(1) + 1$ .
- ☑ Xét  $f\left(\frac{1}{x+1}\right) = 1 - \frac{2}{x+2}$ . Ta có  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \neq 1 - \frac{2}{1+2}$ .

🔍 Chọn đáp án **(C)**.

**Câu 33.** Tập xác định của hàm số  $y = \sqrt{x-2m} - \sqrt{4-2x}$  là  $[1; 2]$  khi và chỉ khi

- (A)  $m = -\frac{1}{2}$ . (B)  $m = 1$ . (C)  $m = \frac{1}{2}$ . (D)  $m > \frac{1}{2}$ .

🔍 Lời giải.

Điều kiện  $\begin{cases} x-2m \geq 0 \\ 4-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2m \\ x \leq 2 \end{cases}$ .

Do tập xác định của hàm số là  $[1; 2]$  nên  $2m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ .

🔍 Chọn đáp án **(C)**.

**Câu 34.** Tập xác định của hàm số  $y = \sqrt{x-m} - \sqrt{6-2x}$  là một đoạn trên trục số khi và chỉ khi

- (A)  $m = 3$ . (B)  $m < 3$ . (C)  $m > 3$ . (D)  $m < \frac{1}{3}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x-m \geq 0 \\ 6-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ x \leq 3 \end{cases}.$$

Do tập xác định của hàm số là một đoạn trên trục số nên  $m < 3$ .

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 35.** Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{x-1}$ ?

- (A)  $M_1(2; 1)$ . (B)  $M_2(1; 1)$ . (C)  $M_3(2; 0)$ . (D)  $M_4(0; 1)$ .

**Lời giải.**

Thay lần lượt tọa độ các điểm  $M_1; M_2; M_3; M_4$  vào hàm số ta có điểm  $M_1(2; 1)$  thỏa mãn nên điểm  $M_1$  thuộc đồ thị hàm số.

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 36.** Điểm nào sau đây **không** thuộc đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x}$

- (A)  $A(1; -1)$ . (B)  $B(2; 0)$ . (C)  $C\left(3; \frac{1}{3}\right)$ . (D)  $D(-1; -3)$ .

**Lời giải.**

Thay lần lượt tọa độ các điểm  $A, B, C, D$  vào hàm số ta có điểm  $A(1; -1)$  không thỏa mãn nên điểm  $A$  không thuộc đồ thị hàm số.

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 37.** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-1} & x \in (-\infty; 0) \\ \sqrt{x+1} & x \in [0; 2] \\ x^2-1 & x \in (2; 5] \end{cases}$ . Tính  $f(4)$ .

- (A)  $f(4) = \frac{2}{3}$ . (B)  $f(4) = 15$ . (C)  $f(4) = \sqrt{5}$ . (D)  $f(4) = 0$ .

**Lời giải.**

Ta có  $f(4) = x^2 - 1 = 4^2 - 1 = 15$ .

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 38.** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x+2}-3}{x-1} & x \geq 2 \\ x^2+1 & x < 2 \end{cases}$ . Tính  $P = f(2) + f(-2)$ .

- (A)  $P = \frac{8}{3}$ . (B)  $P = 4$ . (C)  $P = 6$ . (D)  $P = \frac{5}{3}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } P = f(2) + f(-2) = \frac{2\sqrt{2+2}-3}{2-1} + (-2)^2 + 1 = 6.$$

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 39.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{2x-1}{(2x+1)(x-3)}$ .

- (A)  $\mathcal{D} = (3; +\infty)$ . (B)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; 3\right\}$ . (C)  $\mathcal{D} = \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ . (D)  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện } (2x+1)(x-3) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{1}{2} \\ x \neq 3 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy tập xác định của hàm số là } \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; 3\right\}.$$

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 40.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{x^2+1}{x^2+3x-4}$ .

- (A)  $\mathcal{D} = \{1; -4\}$ . (B)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; -4\}$ . (C)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; 4\}$ . (D)  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x^2 + 3x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -4 \end{cases}$ .

Vậy tập xác định của hàm số là  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; -4\}$ .

☞ Chọn đáp án (B).

**Câu 41.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{x+1}{(x+1)(x^2+3x+4)}$ .

(A)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

(B)  $\mathcal{D} = \{-1\}$ .

(C)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

(D)  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

☞ Lời giải.

Điều kiện  $(x+1)(x^2+3x+4) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x^2+3x+4 \neq 0 \text{ (Đúng)} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq -1$ .

Vậy tập xác định của hàm số là  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

☞ Chọn đáp án (C).

**Câu 42.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{2x+1}{x^3-3x+2}$ .

(A)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

(B)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ .

(C)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ .

(D)  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

☞ Lời giải.

Điều kiện  $x^3 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -2 \end{cases}$ .

Vậy tập xác định của hàm số là  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ .

☞ Chọn đáp án (B).

**Câu 43.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \sqrt{x+2} - \sqrt{x+3}$ .

(A)  $\mathcal{D} = [-3; +\infty)$ .

(B)  $\mathcal{D} = [-2; +\infty)$ .

(C)  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

(D)  $\mathcal{D} = [2; +\infty)$ .

☞ Lời giải.

Điều kiện  $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -2$ .

Vậy tập xác định của hàm số là  $\mathcal{D} = [-2; +\infty)$ .

☞ Chọn đáp án (B).

**Câu 44.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \sqrt{6-3x} - \sqrt{x-1}$ .

(A)  $\mathcal{D} = (1; 2)$ .

(B)  $\mathcal{D} = [1; 2]$ .

(C)  $\mathcal{D} = [1; 3]$ .

(D)  $\mathcal{D} = [-1; 2]$ .

☞ Lời giải.

Điều kiện  $\begin{cases} 6-3x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$ .

Vậy tập xác định của hàm số là  $\mathcal{D} = [1; 2]$ .

☞ Chọn đáp án (B).

**Câu 45.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{\sqrt{3x-2}+6x}{\sqrt{4-3x}}$ .

(A)  $\mathcal{D} = \left[\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$ .

(B)  $\mathcal{D} = \left[\frac{3}{2}; \frac{4}{3}\right)$ .

(C)  $\mathcal{D} = \left[\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right)$ .

(D)  $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{4}{3}\right)$ .

☞ Lời giải.

Điều kiện  $\begin{cases} 3x-2 \geq 0 \\ 4-3x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x < \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x < \frac{4}{3}$ .

Vậy tập xác định của hàm số là  $\mathcal{D} = \left[\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$ .

☞ Chọn đáp án (A).

**Câu 46.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{x+4}{\sqrt{x^2-16}}$ .

(A)  $\mathcal{D} = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ .

(B)  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

(C)  $\mathcal{D} = (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$ .

(D)  $\mathcal{D} = (-4; 4)$ .

☞ Lời giải.

Điều kiện  $x^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 16 \Leftrightarrow |x| > 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \\ x > 4 \end{cases}$ .

Vậy tập xác định của hàm số là  $\mathcal{D} = (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$ .

☞ Chọn đáp án (C).

**Câu 47.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x - 3}$

(A)  $\mathcal{D} = (-\infty; 3]$ .

(B)  $\mathcal{D} = [1; 3]$ .

(C)  $\mathcal{D} = [3; +\infty)$ .

(D)  $\mathcal{D} = (3; +\infty)$ .

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)} \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3.$$

Vậy tập xác định của hàm số là  $\mathcal{D} = [3; +\infty)$ .

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 48.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2 - x - 6}$

(A)  $\mathcal{D} = \{3\}$ .

(B)  $\mathcal{D} = [-1; +\infty) \setminus \{3\}$ .

(C)  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

(D)  $\mathcal{D} = [-1; +\infty)$ .

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x^2 - x - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 3 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 3 \end{cases}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là  $\mathcal{D} = [-1; +\infty) \setminus \{3\}$ .

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 49.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{x+1}{(x-3)\sqrt{2x-1}}$

(A)  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

(B)  $\mathcal{D} = \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{3\}$ .

(C)  $\mathcal{D} = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{3\}$ .

(D)  $\mathcal{D} = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{3\}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x - 3 \neq 0 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là  $\mathcal{D} = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{3\}$ .

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 50.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x^2 + x + 1}$

(A)  $\mathcal{D} = (1; +\infty)$ .

(B)  $\mathcal{D} = \{1\}$ .

(C)  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

(D)  $\mathcal{D} = (-1; +\infty)$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x^2 + x + 1 \neq 0$  (luôn đúng).

Vậy tập xác định của hàm số là  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 51.** Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số  $f(x) = x^2 - 4x + 5$  trên khoảng  $(-\infty; 2)$  và trên khoảng  $(2; +\infty)$ . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

(A) Hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; 2)$ , đồng biến trên  $(2; +\infty)$ .

(B) Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; 2)$ , nghịch biến trên  $(2; +\infty)$ .

(C) Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; 2)$  và  $(2; +\infty)$ .

(D) Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; 2)$  và  $(2; +\infty)$ .

**Lời giải.**

$$\text{Xét } A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^2 - 4x_1 + 5 - x_2^2 + 4x_2 - 5}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1^2 - x_2^2) - 4(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 - 4.$$

$$\text{Với } \begin{cases} x_1 < 2 \\ x_2 < 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 < 4 \Rightarrow A < 0 \text{ nên hàm số nghịch biến trên khoảng } (-\infty; 2).$$

$$\text{Với } \begin{cases} x_1 > 2 \\ x_2 > 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 > 4 \Rightarrow A > 0 \text{ nên hàm số đồng biến trên khoảng } (2; +\infty).$$

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 52.** Xét sự biến thiên của hàm số  $f(x) = \frac{3}{x}$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

(B) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

(C) Hàm số vừa đồng biến và nghịch biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

Ⓓ Hàm số không đồng biến cũng không nghịch biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

🔗 **Lời giải.**

$$\text{Với } 0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{3}{x_1} > \frac{3}{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

🐭 **Chọn đáp án Ⓓ**.....

**Câu 53.** Xét sự biến thiên của hàm số  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  trên khoảng  $(1; +\infty)$ . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

Ⓐ Hàm số đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .

Ⓑ Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .

Ⓒ Hàm số vừa đồng biến vừa nghịch biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .

Ⓓ Hàm số không đồng biến cũng không nghịch biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .

🔗 **Lời giải.**

$$\text{Xét } A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 + \frac{1}{x_1} - x_2 - \frac{1}{x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2) + \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 x_2 - 1}{x_1 x_2}.$$

$$\text{Với } \begin{cases} x_1 > 1 \\ x_2 > 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1 x_2 - 1}{x_1 x_2} > 0 \Rightarrow A > 0 \text{ nên hàm số đồng biến trên khoảng } (1; +\infty).$$

🐭 **Chọn đáp án Ⓐ**.....

**Câu 54.** Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số  $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$  trên khoảng  $(-\infty; -5)$  và trên khoảng  $(-5; +\infty)$ .

Khẳng định nào sau đây **đúng**?

Ⓐ Hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; -5)$ , đồng biến trên  $(-5; +\infty)$ .

Ⓑ Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; -5)$ , nghịch biến trên  $(-5; +\infty)$ .

Ⓒ Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; -5)$  và  $(-5; +\infty)$ .

Ⓓ Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; -5)$  và  $(-5; +\infty)$ .

🔗 **Lời giải.**

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{x_1-3}{x_1+5} - \frac{x_2-3}{x_2+5}}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{x_1 x_2 + 5x_1 - 3x_2 - 15 - x_1 x_2 - 5x_2 + 3x_1 + 15}{(x_1+5)(x_2+5)}}{x_1 - x_2} = \frac{8}{(x_1+5)(x_2+5)}$$

$$\text{Với } \begin{cases} x_1 < -5 \\ x_2 < -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+5 < 0 \\ x_2+5 < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{8}{(x_1+5)(x_2+5)} > 0 \Rightarrow A > 0 \text{ nên hàm số đồng biến trên khoảng } (-\infty; -5).$$

$$\text{Với } \begin{cases} x_1 > -5 \\ x_2 > -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+5 > 0 \\ x_2+5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{8}{(x_1+5)(x_2+5)} > 0 \Rightarrow A > 0 \text{ nên hàm số đồng biến trên khoảng } (-5; +\infty).$$

🐭 **Chọn đáp án Ⓓ**.....

**Câu 55.** Cho hàm số  $f(x) = \sqrt{2x-7}$ . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

Ⓐ Hàm số nghịch biến trên  $\left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$ .

Ⓑ Hàm số đồng biến trên  $\left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$ .

Ⓒ Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Ⓓ Hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

🔗 **Lời giải.**

$$\text{Điều kiện } 2x - 7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{2}.$$

$$\text{Với } \frac{7}{2} < x_1 < x_2 \Rightarrow 7 < 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 0 < 2x_1 - 7 < 2x_2 - 7 \Rightarrow \sqrt{2x_1 - 7} < \sqrt{2x_2 - 7} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Vậy hàm số đồng biến trên  $\left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$ .

🐭 **Chọn đáp án Ⓑ**.....

**Câu 56.** Trong các hàm số  $y = 2015x$ ,  $y = 2015x + 2$ ,  $y = 3x^2 - 1$ ,  $y = 2x^3 - 3x$  có bao nhiêu hàm số lẻ?

Ⓐ 1.

Ⓑ 2.

Ⓒ 3.

Ⓓ 4.

🔗 **Lời giải.**

Các hàm số đều có tập xác định là  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  là tập đối xứng.

☑ Xét hàm số  $y = 2015x$ . Ta có  $f(-x) = -2015x = -f(x)$  nên là hàm số lẻ.

☑ Xét hàm số  $y = 2015x + 2$ . Ta có  $f(-1) = -2013$ ;  $f(1) = 2017$  nên hàm số không chẵn, không lẻ.

☑ Xét hàm số  $y = 3x^2 - 1$ . Ta có  $f(-x) = 3(-x)^2 - 1 = 3x^2 - 1 = f(x)$  nên là hàm số chẵn.

- ☑ Xét hàm số  $y = 2x^3 - 3x$ . Ta có  $f(-x) = 2(-x)^3 + 3x = -2x^3 + 3x = -(2x^3 - 3x) = -f(x)$  nên là hàm số lẻ.

Vậy có 2 hàm số lẻ.

🐞 Chọn đáp án **(B)**.

**Câu 57.** Cho hai hàm số  $f(x) = -2x^3 + 3x$  và  $g(x) = x^{2017} + 3$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A)  $f(x)$  là hàm số lẻ;  $g(x)$  là hàm số lẻ.  
 (B)  $f(x)$  là hàm số chẵn;  $g(x)$  là hàm số chẵn.  
 (C) Cả  $f(x)$  và  $g(x)$  đều là hàm số không chẵn, không lẻ.  
 (D)  $f(x)$  là hàm số lẻ;  $g(x)$  là hàm số không chẵn, không lẻ.

🔗 **Lời giải.**

Các hàm số đều có tập xác định là  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  là tập đối xứng.

- ☑ Xét hàm số  $f(x) = -2x^3 + 3x$ . Ta có  $f(-x) = -2(-x)^3 - 3x = 2x^3 - 3x = -(-2x^3 + 3x) = -f(x)$  nên là hàm số lẻ.  
 ☑ Xét hàm số  $g(x) = x^{2017} + 3$ . Ta có  $g(-1) = 2$ ;  $g(1) = 4$  nên hàm số không chẵn, không lẻ.

🐞 Chọn đáp án **(D)**.

**Câu 58.** Cho hàm số  $f(x) = x^2 - |x|$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A)  $f(x)$  là hàm số lẻ. (B)  $f(x)$  là hàm số chẵn.  
 (C) Đồ thị của hàm số  $f(x)$  đối xứng qua gốc tọa độ. (D) Đồ thị của hàm số  $f(x)$  đối xứng qua trục hoành.

🔗 **Lời giải.**

- ☑ Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  là tập đối xứng.  
 ☑  $\forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = (-x)^2 - |-x| = x^2 - |x| = f(x)$ .

Vậy  $y = f(x)$  là hàm số chẵn.

🐞 Chọn đáp án **(B)**.

**Câu 59.** Cho hàm số  $f(x) = |x - 2|$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A)  $f(x)$  là hàm số lẻ. (B)  $f(x)$  là hàm số chẵn.  
 (C)  $f(x)$  là hàm số vừa chẵn, vừa lẻ. (D)  $f(x)$  là hàm số không chẵn, không lẻ.

🔗 **Lời giải.**

- ☑ Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  là tập đối xứng.  
 ☑  $f(-1) = 3$ ;  $f(1) = 1$  nên  $f(x)$  là hàm số không chẵn, không lẻ.

🐞 Chọn đáp án **(D)**.

**Câu 60.** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \sqrt{x - 2} + \frac{2x + 5}{x - 4}$ .

- (A)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ . (B)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ . (C)  $\mathcal{D} = (-\infty; 2]$ . (D)  $\mathcal{D} = [2; +\infty) \setminus \{4\}$ .

🔗 **Lời giải.**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 4 \end{cases}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là  $\mathcal{D} = [2; +\infty) \setminus \{4\}$ .

🐞 Chọn đáp án **(D)**.

**Câu 61.** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{2x + 1}{x^2 - 4}$  là

- (A)  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ . (B)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ . (C)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ . (D)  $\mathcal{D} = \{-2; 2\}$ .

🔗 **Lời giải.**

Điều kiện  $x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$ .

Vậy tập xác định của hàm số là  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ .

🐞 Chọn đáp án **(B)**.

**Câu 62.** Tập xác định của hàm số  $y = \sqrt{3 - 2x}$  là

- (A)  $\mathcal{D} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ . (B)  $\mathcal{D} = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$ . (C)  $\mathcal{D} = \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ . (D)  $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $3 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$ .

Vậy tập xác định của hàm số là  $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$ .

**Chọn đáp án (D)**

**Câu 63.** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} -2(x-2) & \text{khi } -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{x^2-1} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ . Giá trị  $f(-1)$  bằng

- (A) -6. (B) 6. (C) 5. (D) -5.

**Lời giải.**

$f(-1) = -2(-1-2) = 6$ .

**Chọn đáp án (B)**

**Câu 64.** Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

- (A)  $y = -2x + 1$ . (B)  $y = x^2 - 2x + 1$ . (C)  $y = x$ . (D)  $y = -x$ .

**Lời giải.**

Hàm số  $y = -2x + 1$  có hệ số  $a = -2 < 0$  nên hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

Hàm số  $y = x^2 - 2x + 1$  có hệ số  $a = 1 > 0$  nên hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$  và đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .

Hàm số  $y = x$  có hệ số  $a = 1 > 0$  nên hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$  do đó hàm số cũng đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

**Chọn đáp án (C)**

**Câu 65.** Tập hợp nào sau đây là tập xác định của hàm số  $y = \sqrt{2x-3}$ .

- (A)  $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$ . (B)  $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ . (C)  $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$ . (D)  $\mathbb{R}$ .

**Lời giải.**

Do  $|2x-3| \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$  nên hàm số luôn xác định với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

**Chọn đáp án (D)**

**Câu 66.** Trong các hàm số sau đây  $y = |x|$ ,  $y = x^2 + 4x$ ,  $y = -x^4 + 2x^2$  có bao nhiêu hàm số chẵn?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

**Lời giải.**

☑ Xét hàm số  $y = |x|$ .

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

$\forall x \in \mathcal{D}$  thì  $-x \in \mathcal{D}$  ta có  $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$  nên hàm số chẵn.

☑ Xét hàm số  $y = x^2 + 4x$ .

Ta có  $f(-1) = -3$ ,  $f(1) = 5$  suy ra  $f(-1) \neq f(1)$  nên hàm số không chẵn.

☑ Xét hàm số  $y = -x^4 + 2x^2$ .

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

$\forall x \in \mathcal{D}$  thì  $-x \in \mathcal{D}$  ta có  $f(-x) = -(-x)^4 + 2(-x)^2 = -x^4 + 2x^2 = f(x)$  nên hàm số chẵn.

**Chọn đáp án (C)**

**Câu 67.** Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

- (A)  $y = -\frac{x}{2}$ . (B)  $y = -\frac{x}{2} + 1$ . (C)  $y = -\frac{x-1}{2}$ . (D)  $y = -\frac{x}{2} + 2$ .

**Lời giải.**

☑ Xét hàm số  $y = -\frac{x}{2}$ .

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

$\forall x \in \mathcal{D}$  thì  $-x \in \mathcal{D}$  ta có  $f(-x) = -\frac{-x}{2} = -\left(-\frac{x}{2}\right) = -f(x)$  nên hàm số lẻ.

☑ Xét hàm số  $y = -\frac{x}{2} + 1$ .

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

Ta có  $f(-2) = 2$ ,  $f(2) = 0$  suy ra  $f(-2) \neq -f(2)$  nên hàm số không lẻ.

- ☑ Xét hàm số  $y = -\frac{x-1}{2}$ .  
Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .  
Ta có  $f(-1) = 1, f(1) = 0$  suy ra  $f(-1) \neq -f(1)$  nên hàm số không lẻ.
- ☑ Xét hàm số  $y = -\frac{x}{2} + 2$ .  
Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .  
 $f(-2) = 3, f(2) = 1$  suy ra  $f(-2) \neq -f(2)$  nên hàm số không lẻ.

🔍 Chọn đáp án (A).

**Câu 68.** Xét tính chẵn, lẻ của hai hàm số  $f(x) = |x+2| - |x-2|, g(x) = -|x|$

- (A)  $f(x)$  là hàm số chẵn,  $g(x)$  là hàm số chẵn. (B)  $f(x)$  là hàm số lẻ,  $g(x)$  là hàm số chẵn.  
(C)  $f(x)$  là hàm số lẻ,  $g(x)$  là hàm số lẻ. (D)  $f(x)$  là hàm số chẵn,  $g(x)$  là hàm số lẻ.

🔍 Lời giải.

- ☑ Xét hàm số  $f(x) = |x+2| - |x-2|$ .  
Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .  
 $\forall x \in \mathcal{D}$  thì  $-x \in \mathcal{D}$  ta có  $f(-x) = |-x+2| - |-x-2| = |x-2| - |x+2| = -(|x+2| - |x-2|) = -f(x)$   
nên  $f(x)$  là hàm số lẻ.
- ☑ Xét hàm số  $g(x) = -|x|$ .  
Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .  
 $\forall x \in \mathcal{D}$  thì  $-x \in \mathcal{D}$  ta có  $g(-x) = -|-x| = -|x| = g(x)$  nên  $g(x)$  là hàm số chẵn.

🔍 Chọn đáp án (B).

**Câu 69.** Xét tính chất chẵn lẻ của hàm số:  $y = 2x^3 + 3x + 1$ . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng?

- (A)  $y$  là hàm số chẵn. (B)  $y$  là hàm số lẻ.  
(C)  $y$  là hàm số không có tính chẵn lẻ. (D)  $y$  là hàm số vừa chẵn vừa lẻ.

🔍 Lời giải.

Ta có  $f(-1) = -4$  và  $f(1) = 6$  suy ra  $f(-1) \neq f(1)$  và  $f(-1) \neq -f(1)$  nên hàm số không có tính chẵn lẻ.

🔍 Chọn đáp án (C).

**Câu 70.** Cho hàm số  $y = 3x^4 - 4x^2 + 3$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- (A)  $y$  là hàm số chẵn. (B)  $y$  là hàm số lẻ.  
(C)  $y$  là hàm số không có tính chẵn lẻ. (D)  $y$  là hàm số vừa chẵn vừa lẻ.

🔍 Lời giải.

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

$\forall x \in \mathcal{D}$  thì  $-x \in \mathcal{D}$  ta có  $f(-x) = 3(-x)^4 - 4(-x)^2 + 3 = 3x^4 - 4x^2 + 3 = f(x)$  nên hàm số chẵn.

🔍 Chọn đáp án (A).

**Câu 71.** Trong các hàm số sau, hàm số nào không phải là hàm số lẻ?

- (A)  $y = x^3 + 1$ . (B)  $y = x^3 - x$ . (C)  $y = x^3 + x$ . (D)  $y = \frac{1}{x}$ .

🔍 Lời giải.

- ☑ Xét hàm số  $y = x^3 + 1$ , ta có  $f(-1) = 0$  và  $f(1) = 2$  suy ra  $f(-1) \neq -f(1)$  nên hàm số không lẻ.
- ☑ Xét hàm số  $y = x^3 - x$ .  
Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .  
 $\forall x \in \mathcal{D}$  thì  $-x \in \mathcal{D}$  ta có  $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$  nên hàm số lẻ.
- ☑ Xét hàm số  $y = x^3 + x$ .  
Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .  
 $\forall x \in \mathcal{D}$  thì  $-x \in \mathcal{D}$  ta có  $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$  nên hàm số lẻ.
- ☑ Xét hàm số  $y = \frac{1}{x}$ .  
Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .  
 $\forall x \in \mathcal{D}$  thì  $-x \in \mathcal{D}$  ta có  $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$  nên hàm số lẻ.

🔍 Chọn đáp án (A).

**Câu 72.** Trong các hàm số sau, hàm số nào **không** phải là hàm số chẵn?

(A)  $y = |x + 1| + |1 - x|$ .

(B)  $y = |x + 1| - |1 - x|$ .

(C)  $y = |x^2 + 1| + |1 - x^2|$ .

(D)  $y = |x^2 + 1| - |1 - x^2|$ .

**Lời giải.**

☑ Xét hàm số  $y = |x + 1| + |1 - x|$ .

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

$\forall x \in \mathcal{D}$  thì  $-x \in \mathcal{D}$  ta có  $f(-x) = |-x + 1| + |1 - (-x)| = |-x + 1| + |1 + x| = |x + 1| + |1 - x| = f(x)$  nên  $f(x)$  là hàm số chẵn.

☑ Xét hàm số  $y = |x + 1| - |1 - x|$ .

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

$\forall x \in \mathcal{D}$  thì  $-x \in \mathcal{D}$  ta có  $f(-x) = |-x + 1| - |1 - (-x)| = |-x + 1| - |1 + x| = -(|x + 1| - |1 - x|) = -f(x)$  nên  $f(x)$  là hàm số lẻ.

☑ Xét hàm số  $y = |x^2 + 1| + |1 - x^2|$ .

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

$\forall x \in \mathcal{D}$  thì  $-x \in \mathcal{D}$  ta có  $f(-x) = |(-x)^2 + 1| + |1 - (-x)^2| = |x^2 + 1| + |1 - x^2| = f(x)$  nên  $f(x)$  là hàm số chẵn.

☑ Xét hàm số  $y = |x^2 + 1| - |1 - x^2|$ .

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

$\forall x \in \mathcal{D}$  thì  $-x \in \mathcal{D}$  ta có  $f(-x) = |(-x)^2 + 1| - |1 - (-x)^2| = |x^2 + 1| - |1 - x^2| = f(x)$  nên  $f(x)$  là hàm số chẵn.

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 73.** Cho hàm số  $y = f(x) = |2x - 3|$ . Tìm  $x$  để  $f(x) = 3$

(A)  $x = 3$ .

(B)  $x = 3$  hoặc  $x = 0$ .

(C)  $x = \pm 3$ .

(D)  $x = \pm 1$ .

**Lời giải.**

Ta có  $f(x) = 3 \Rightarrow |2x - 3| = 3 \Rightarrow x = 3$  hoặc  $x = 0$ .

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 74.** Cho hàm số  $y = f(x) = \sqrt{x^3 - 9x}$ . Kết quả nào sau đây đúng?

(A)  $f(0) = 2, f(-3) = -4$ .

(B)  $f(2)$  không xác định,  $f(-3) = -5$ .

(C)  $f(-1) = \sqrt{8}, f(2)$  không xác định.

(D) Tất cả các câu trên đều đúng.

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = [-3; 0] \cup [3; +\infty)$ .

Ta có  $f(0) = 0, f(-3) = 0, f(-1) = \sqrt{8}$  và  $f(2)$  không xác định.

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 75.** Tập xác định của hàm số  $f(x) = \frac{x+5}{x-1} + \frac{x-1}{x+5}$  là

(A)  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

(B)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

(C)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$ .

(D)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-5; 1\}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x+5 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -5 \end{cases}$ .

**Chọn đáp án (D).**

**Câu 76.** Tập xác định của hàm số  $f(x) = \sqrt{x-3} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}$  là

(A)  $\mathcal{D} = (1; 3]$ .

(B)  $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup [3; +\infty)$ .

(C)  $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$ .

(D)  $\mathcal{D} = \emptyset$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 1-x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$ .

**Chọn đáp án (D).**

**Câu 77.** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{3x+4}{(x-2)\sqrt{x+4}}$  là

(A)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

(B)  $\mathcal{D} = (-4; +\infty) \setminus \{2\}$ .

(C)  $\mathcal{D} = [-4; +\infty) \setminus \{2\}$ .

(D)  $\mathcal{D} = \emptyset$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $\begin{cases} x-2 \neq 0 \\ x+4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \geq -4 \end{cases}$ .

🔍 Chọn đáp án **C**.

**Câu 78.** Tập xác định của hàm số  $f(x) = \sqrt{x-3} + \frac{1}{x-3}$  là

**(A)**  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ .

**(B)**  $\mathcal{D} = [3; +\infty)$ .

**(C)**  $\mathcal{D} = (3; +\infty)$ .

**(D)**  $\mathcal{D} = (-\infty; 3)$ .

🔍 Lời giải.

Điều kiện xác định  $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \neq 3 \end{cases} \Rightarrow x > 3$ .

🔍 Chọn đáp án **C**.

**Câu 79.** Tập xác định của hàm số  $f(x) = \sqrt{x-5} + \frac{1}{\sqrt{13-x}}$  là

**(A)**  $\mathcal{D} = [5; 13]$ .

**(B)**  $\mathcal{D} = (5; 13)$ .

**(C)**  $\mathcal{D} = (5; 13]$ .

**(D)**  $\mathcal{D} = [5; 13)$ .

🔍 Lời giải.

Điều kiện xác định  $\begin{cases} x-5 \geq 0 \\ 13-x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x < 13 \end{cases} \Rightarrow 5 \leq x < 13$ .

🔍 Chọn đáp án **C**.

**Câu 80.** Tập xác định của hàm số  $y = \sqrt{x+1} + \frac{1}{|x|-2}$  là

**(A)**  $\mathcal{D} = (-1; +\infty) \setminus \{\pm 2\}$ .

**(B)**  $\mathcal{D} = [-1; +\infty) \setminus \{2\}$ .

**(C)**  $\mathcal{D} = [-1; +\infty) \setminus \{-2\}$ .

**(D)**  $\mathcal{D} = (-1; +\infty) \setminus \{2\}$ .

🔍 Lời giải.

Điều kiện xác định  $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ |x|-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 2 \text{ và } x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 2 \end{cases}$ .

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là  $\mathcal{D} = [-1; +\infty) \setminus \{2\}$ .

🔍 Chọn đáp án **B**.

**Câu 81.** Cho hàm số  $y = f(x) = 3x^4 - 4x^2 + 3$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

**(A)**  $y = f(x)$  là hàm số chẵn.

**(B)**  $y = f(x)$  là hàm số lẻ.

**(C)**  $y = f(x)$  là hàm số không có tính chẵn lẻ.

**(D)**  $y = f(x)$  là hàm số vừa chẵn vừa lẻ.

🔍 Lời giải.

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

Khi đó  $\forall x \in \mathcal{D}$  thì ta có  $-x \in \mathcal{D}$  và

$$f(-x) = 3(-x)^4 - 4(-x)^2 + 3 = 3x^4 - 4x^2 + 3 = f(x).$$

Vậy  $f(x)$  là hàm số chẵn.

🔍 Chọn đáp án **A**.

**Câu 82.** Cho hai hàm số  $f(x) = x^3 - 3x$  và  $g(x) = -x^3 + x^2$ . Khi đó

**(A)**  $f(x)$  và  $g(x)$  đều là hàm số lẻ.

**(B)**  $f(x)$  và  $g(x)$  đều là hàm số chẵn.

**(C)**  $f(x)$  chẵn,  $g(x)$  lẻ.

**(D)**  $f(x)$  lẻ,  $g(x)$  không chẵn không lẻ.

🔍 Lời giải.

• Xét hàm số  $f(x) = x^3 - 3x$ .

+ Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

+  $\forall x \in \mathcal{D}$  thì  $-x \in \mathcal{D}$  và  $f(-x) = (-x^3) - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f(x)$ .

Suy ra  $f(x)$  là hàm số lẻ.

• Xét hàm số  $g(x) = -x^3 + x^2$ .

+ Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

+ Ta có  $g(1) = 0$  và  $g(-1) = 2$  nên suy ra  $\begin{cases} g(-1) \neq g(1) \\ g(-1) \neq -g(1) \end{cases}$ .

Suy ra  $g(x)$  là hàm số không chẵn không lẻ.

Vậy  $f(x)$  là hàm số lẻ và  $g(x)$  là hàm số không chẵn không lẻ.

🔍 Chọn đáp án **D**.

**Câu 83.** Cho hai hàm số  $f(x) = \frac{1}{x}$  và  $g(x) = -x^4 + x^2 - 1$ . Khi đó

**(A)**  $f(x)$  và  $g(x)$  đều là hàm số lẻ.

**(B)**  $f(x)$  và  $g(x)$  đều là hàm số chẵn.

Ⓒ  $f(x)$  lẻ,  $g(x)$  chẵn.

Ⓓ  $f(x)$  chẵn,  $g(x)$  lẻ.

🔗 **Lời giải.**

- Xét hàm số  $f(x) = \frac{1}{x}$ .  
+ Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .  
+  $\forall x \in \mathcal{D}$  thì  $-x \in \mathcal{D}$  và  $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$ .  
Suy ra  $f(x)$  là hàm số lẻ.
- Xét hàm số  $g(x) = -x^4 + x^2 - 1$ .  
+ Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .  
+  $\forall x \in \mathcal{D}$  thì  $-x \in \mathcal{D}$  và  $g(-x) = -(-x)^4 + (-x)^2 - 1 = -x^4 + x^2 - 1 = f(x)$ .  
Suy ra  $g(x)$  là hàm số chẵn.

Vậy  $f(x)$  là hàm số lẻ và  $g(x)$  là hàm số chẵn.

🔗 **Chọn đáp án Ⓒ**.....

**Câu 84.** Trong các hàm số sau, hàm số nào **không** phải hàm số chẵn?

Ⓐ  $y = |x + 1| + |1 - x|$ .

Ⓑ  $y = |x + 1| - |1 - x|$ .

Ⓒ  $y = |x^2 + 1| + |x^2 - 1|$ .

Ⓓ  $y = \frac{|x + 1| + |1 - x|}{x^2 + 4}$ .

🔗 **Lời giải.**

- Xét hàm số  $y = f(x) = |x + 1| + |1 - x|$ .  
+ Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .  
+  $\forall x \in \mathcal{D}$  thì  $-x \in \mathcal{D}$  và  $f(-x) = |-x + 1| + |1 - (-x)| = |1 - x| + |1 + x| = f(x)$ .  
Suy ra  $y = |x + 1| + |1 - x|$  là hàm số chẵn.
- Xét hàm số  $y = g(x) = |x + 1| - |1 - x|$ .  
+ Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .  
+ Ta có  $g(1) = 2$  và  $g(-1) = -2$  nên suy ra  $g(1) \neq g(-1)$ .  
Suy ra  $y = |x + 1| - |1 - x|$  không là hàm số chẵn.
- Xét hàm số  $y = h(x) = |x^2 + 1| + |x^2 - 1|$ .  
+ Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .  
+  $\forall x \in \mathcal{D}$  thì  $-x \in \mathcal{D}$  và  $h(-x) = |(-x)^2 + 1| + |(-x)^2 - 1| = |x^2 + 1| + |x^2 - 1| = h(x)$ .  
Suy ra  $y = |x^2 + 1| + |x^2 - 1|$  là hàm số chẵn.
- Xét hàm số  $y = k(x) = \frac{|x + 1| + |1 - x|}{x^2 + 4}$ .  
+ Vì  $x^2 + 4 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  nên ta có  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .  
+  $\forall x \in \mathcal{D}$  thì  $-x \in \mathcal{D}$  và  $k(-x) = \frac{|-x + 1| + |1 - (-x)|}{(-x)^2 + 4} = \frac{|-x + 1| + |1 + x|}{x^2 + 4} = k(x)$ .  
Suy ra  $y = \frac{|x + 1| + |1 - x|}{x^2 + 4}$  là hàm số chẵn.

Vậy hàm số không là hàm số chẵn là  $y = |x + 1| - |1 - x|$ .

🔗 **Chọn đáp án Ⓑ**.....

**Câu 85.** Trong các hàm số sau, hàm số nào tăng trên khoảng  $(-1; 0)$ ?

Ⓐ  $y = x$ .

Ⓑ  $y = \frac{1}{x}$ .

Ⓒ  $y = |x|$ .

Ⓓ  $y = x^2$ .

🔗 **Lời giải.**

- Xét hàm số  $y = f(x) = x$ .  
Đây là hàm số bậc nhất có  $a = 1 > 0$  nên có đồ thị là đường thẳng hướng lên.  
Suy ra hàm số tăng trên  $\mathbb{R}$  nên cũng tăng trên khoảng  $(-1; 0)$ .
- Xét hàm số  $y = g(x) = \frac{1}{x}$ .  
Với  $x_1 = -\frac{1}{2}$  và  $x_2 = -\frac{1}{3}$  thuộc khoảng  $(-1; 0)$  ta có  
+  $x_1 < x_2$ .  
+  $g(x_1) = g\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 > g(x_2) = g\left(-\frac{1}{3}\right) = -3$ .  
Suy ra  $g(x)$  không tăng trên khoảng  $(-1; 0)$ .

- Xét hàm số  $y = h(x) = |x|$ .  
 Với  $x_1 = -\frac{1}{2}$  và  $x_2 = -\frac{1}{3}$  thuộc khoảng  $(-1; 0)$  ta có  
 $+ x_1 < x_2$ .  
 $+ h(x_1) = h\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > h(x_2) = h\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$ .  
 Suy ra  $h(x)$  không tăng trên khoảng  $(-1; 0)$ .
- Xét hàm số  $y = k(x) = x^2$ .  
 Đây là hàm số bậc hai có  $a = 1 > 0$  nên đồ thị là một parabol có bề lõm hướng lên.  
 Mặt khác đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ  $O$  làm đỉnh nên nghịch biến trên  $(-\infty; 0)$  và đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .  
 Suy ra hàm số không tăng trên khoảng  $(-1; 0)$ .

Vậy hàm số tăng trên khoảng  $(-1; 0)$  là hàm số  $y = x$ .

🔍 Chọn đáp án **A**.

**Câu 86.** Câu nào sau đây đúng?

- A** Hàm số  $y = a^2x + b$  đồng biến khi  $a > 0$  và nghịch biến khi  $a < 0$ .
- B** Hàm số  $y = a^2x + b$  đồng biến khi  $b > 0$  và nghịch biến khi  $b < 0$ .
- C** Với mọi giá trị thực của  $b$ , hàm số  $y = -a^2x + b$  nghịch biến khi  $a \neq 0$ .
- D** Hàm số  $y = a^2x + b$  đồng biến khi  $a > 0$  và nghịch biến khi  $b < 0$ .

🔍 Lời giải.

- Xét hàm số  $y = a^2x + b$ .  
 + Hàm số đồng biến khi và chỉ khi  $a^2 > 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ .  
 + Hàm số nghịch biến khi và chỉ khi  $a^2 < 0 \Leftrightarrow a \in \emptyset$ .
- Xét hàm số  $y = -a^2x + b$ .  
 + Hàm số đồng biến khi và chỉ khi  $-a^2 > 0 \Leftrightarrow a^2 < 0 \Leftrightarrow a \in \emptyset$ .  
 + Hàm số nghịch biến khi và chỉ khi  $-a^2 < 0 \Leftrightarrow a^2 > 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ .

🔍 Chọn đáp án **C**.

**Câu 87.** Xét sự biến thiên của hàm số  $y = \frac{1}{x^2}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A** Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; 0)$ , nghịch biến trên  $(0; +\infty)$ .
- B** Hàm số đồng biến trên  $(0; +\infty)$ , nghịch biến trên  $(-\infty; 0)$ .
- C** Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; 1)$ , nghịch biến trên  $(1; +\infty)$ .
- D** Hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .

🔍 Lời giải.

Xét hàm số  $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$ .

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- Với mọi  $x_1, x_2 \in (-\infty; 0)$  và  $x_1 < x_2$ , ta suy ra được  $x_1 < x_2 < 0$ .  
 Khi đó  $x_1^2 > x_2^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x_1^2} < \frac{1}{x_2^2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ . Suy ra  $f(x)$  đồng biến trên  $(-\infty; 0)$ .
- Với mọi  $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$  và  $x_1 < x_2$ , ta suy ra được  $0 < x_1 < x_2$ .  
 Khi đó  $0 < x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow \frac{1}{x_1^2} > \frac{1}{x_2^2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .  
 Suy ra  $f(x)$  nghịch biến trên  $(0; +\infty)$ .

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên  $(-\infty; 0)$  và nghịch biến trên  $(0; +\infty)$ .

🔍 Chọn đáp án **A**.

**Câu 88.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{4}{x+1}$ . Khi đó

- A**  $f(x)$  tăng trên khoảng  $(-\infty; -1)$  và giảm trên khoảng  $(-1; +\infty)$ .
- B**  $f(x)$  tăng trên hai khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(-1; +\infty)$ .
- C**  $f(x)$  giảm trên khoảng  $(-\infty; -1)$  và tăng trên khoảng  $(-1; +\infty)$ .
- D**  $f(x)$  giảm trên hai khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(-1; +\infty)$ .

🔍 Lời giải.

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

Với  $x_1 \neq x_2$  ta có

$$K = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{4}{x_2 + 1} - \frac{4}{x_1 + 1}}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{4(x_1 - x_2)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}}{x_2 - x_1} = -\frac{4}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}.$$

- $\forall x_1, x_2 \in (-\infty; -1)$  và  $x_1 < x_2$ , ta suy ra được  $x_1 < -1$  và  $x_2 < -1$ .

Khi đó  $x_1 + 1 < 0, x_2 + 1 < 0 \Rightarrow (x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0 \Rightarrow K = -\frac{4}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} < 0$ .

Suy ra  $f(x)$  giảm trên  $(-\infty; -1)$ .

- $\forall x_1, x_2 \in (-1; +\infty)$  và  $x_1 < x_2$ , ta suy ra được  $x_1 > -1$  và  $x_2 > -1$ .

Khi đó  $x_1 + 1 > 0, x_2 + 1 > 0 \Rightarrow (x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0 \Rightarrow K = -\frac{4}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} < 0$ .

Suy ra  $f(x)$  giảm trên  $(-1; +\infty)$ .

Vậy hàm số đã cho giảm trên hai khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(-1; +\infty)$

Chọn đáp án **D**.

**Câu 89.** Xét sự biến thiên của hàm số  $y = \frac{x}{x-1}$ . Chọn khẳng định đúng.

- A** Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.
- B** Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.
- C** Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; 1)$ , nghịch biến trên  $(1; +\infty)$ .
- D** Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; 1)$ .

**Lời giải.**

Xét hàm số  $y = f(x) = \frac{x}{x-1}$ .

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Với  $x_1 \neq x_2$  ta có

$$K = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{x_2}{x_2-1} - \frac{x_1}{x_1-1}}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{x_1 - x_2}{(x_1-1)(x_2-1)}}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{(x_1-1)(x_2-1)}.$$

- $\forall x_1, x_2 \in (-\infty; 1)$  và  $x_1 < x_2$ , ta suy ra được  $x_1 < 1$  và  $x_2 < 1$ .

Khi đó  $x_1 - 1 < 0, x_2 - 1 < 0 \Rightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \Rightarrow K = -\frac{1}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} < 0$ .

Suy ra  $f(x)$  nghịch biến trên  $(-\infty; 1)$ .

- $\forall x_1, x_2 \in (1; +\infty)$  và  $x_1 < x_2$ , ta suy ra được  $x_1 > 1$  và  $x_2 > 1$ .

Khi đó  $x_1 - 1 > 0, x_2 - 1 > 0 \Rightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \Rightarrow K = -\frac{1}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} < 0$ .

Suy ra  $f(x)$  nghịch biến trên  $(1; +\infty)$ .

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

Chọn đáp án **A**.

**Câu 90.** Cho hàm số  $y = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x+2}$ . Kết quả nào sau đây đúng?

- A**  $f(0) = 2; f(1) = \frac{\sqrt{15}}{3}$ .
- B**  $f(0) = 2; f(-3) = -\frac{11}{24}$ .
- C**  $f(2) = 1; f(-2)$  không xác định.
- D**  $f(0) = 2; f(1) = \frac{\sqrt{14}}{3}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $\begin{cases} 16 - x^2 \geq 0 \\ x + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ x \neq -2 \end{cases}$

Suy ra tập xác định  $\mathcal{D} = [-4; 4] \setminus \{-2\}$ .

Khi đó ta có

- $f(0) = \frac{\sqrt{16-0^2}}{0+2} = 2$ .
- $f(1) = \frac{\sqrt{16-1^2}}{1+2} = \frac{\sqrt{15}}{3}$ .
- $f(-3) = \frac{\sqrt{16-(-3)^2}}{-3+2} = -\sqrt{7}$ .
- $f(2) = \frac{\sqrt{16-2^2}}{2+2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- $f(-2)$  không xác định vì  $-2 \notin \mathcal{D}$ .

🔍 Chọn đáp án **A**.....

**Câu 91.** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & , x \geq 0 \\ \frac{1}{x-1} & , x < 0 \end{cases}$ . Giá trị của  $f(0)$ ,  $f(2)$ ,  $f(-2)$  là

**A**  $f(0) = 0$ ;  $f(2) = \frac{2}{3}$ ,  $f(-2) = 2$ .

**B**  $f(0) = 0$ ;  $f(2) = \frac{2}{3}$ ;  $f(-2) = -\frac{1}{3}$ .

**C**  $f(0) = 0$ ;  $f(2) = 1$ ;  $f(-2) = -\frac{1}{3}$ .

**D**  $f(0) = 0$ ;  $f(2) = 1$ ;  $f(-2) = 2$ .

🔗 **Lời giải.**

Ta có  $\begin{cases} f(0) = \frac{0}{0+1} = 0 \\ f(2) = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} \\ f(-2) = \frac{1}{-2-1} = -\frac{1}{3} \end{cases}$ .

🔍 Chọn đáp án **B**.....

**Câu 92.** Cho hàm số  $f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{x-3}$ . Tập nào sau đây là tập xác định của hàm số  $f(x)$ ?

**A**  $(1; +\infty)$ .

**B**  $[1; +\infty]$ .

**C**  $[1; 3) \cup (3; +\infty)$ .

**D**  $[1; +\infty) \setminus \{3\}$ .

🔗 **Lời giải.**

Điều kiện xác định  $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$ .

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là  $\mathcal{D} = [1; +\infty) \setminus \{3\}$ .

🔍 Chọn đáp án **D**.....

**Câu 93.** Hàm số  $y = \sqrt{x^2 - x - 20} + \sqrt{6 - x}$  có tập xác định là

**A**  $(-\infty; 4) \cup (5; 6]$ .

**B**  $(-\infty; -4) \cup (5; 6)$ .

**C**  $(-\infty; -4] \cup [5; 6]$ .

**D**  $(-\infty; -4) \cup [5; 6)$ .

🔗 **Lời giải.**

Điều kiện xác định

$$\begin{cases} x^2 - x - 20 \geq 0 \\ 6 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)(x+4) \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq -4 \\ x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4 \\ 5 \leq x \leq 6 \end{cases}.$$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là  $\mathcal{D} = (-\infty; -4] \cup [5; 6]$ .

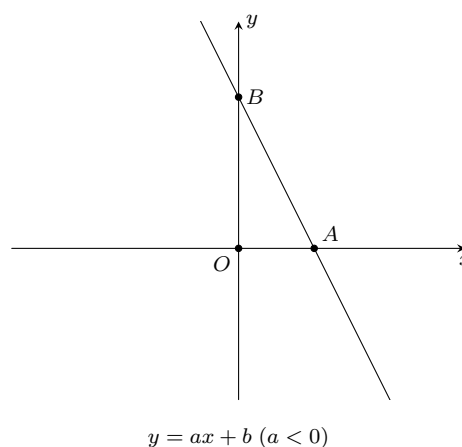
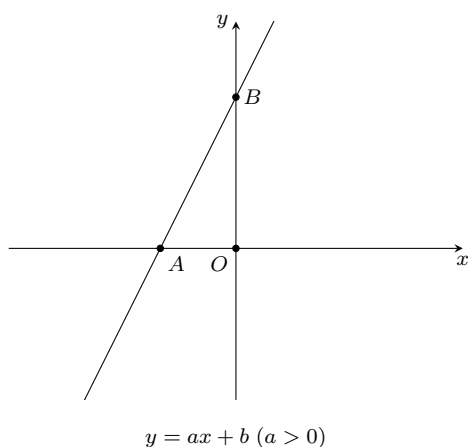
🔍 Chọn đáp án **C**.....

## §2 HÀM SỐ BẬC NHẤT

### A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1 HÀM SỐ BẬC NHẤT $Y = AX + B$ ( $A \neq 0$ )

- ☑ Tập xác định:  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .
- ☑ Sự biến thiên:
  - Nếu  $a > 0$  thì hàm số đồng biến (tăng) trên  $\mathbb{R}$ .
  - Nếu  $a < 0$  thì hàm số nghịch biến (giảm) trên  $\mathbb{R}$ .
- ☑ Đồ thị hàm số là một đường thẳng có hệ số góc bằng  $a$ , cắt trục hoành tại điểm  $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$  và cắt trục tung tại điểm  $B(0; b)$ .

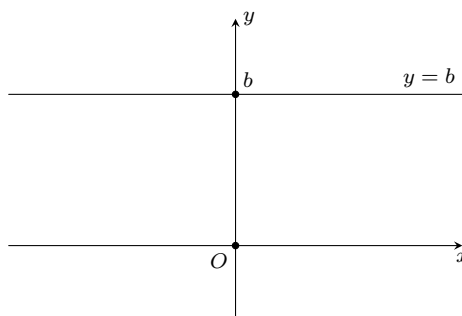


- ☑ Vị trí tương đối của hai đường thẳng: Cho  $d: y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) và  $d': y = a'x + b'$  ( $a' \neq 0$ ).

- $d \parallel d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$ .
- $d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$ .
- $d$  cắt  $d' \Leftrightarrow a \neq a'$ .
- $d \perp d' \Leftrightarrow a \cdot a' = -1$ .
- $d$  cắt  $d'$  tại một điểm trên trục tung  $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq a' \\ b = b' \end{cases}$ .

#### 2 HÀM SỐ HẰNG $Y = B$

Đồ thị hàm số  $y = b$  là một đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành và cắt trục tung tại điểm  $(0; b)$ . Đường thẳng này gọi là đường thẳng  $y = b$ .



**3 HÀM SỐ  $Y = |AX + B|$  ( $A \neq 0$ )**

$$y = |ax + b| = \begin{cases} ax + b & \text{nếu } x \geq -\frac{b}{a} \\ -(ax + b) & \text{nếu } x < -\frac{b}{a} \end{cases}$$

Để vẽ đồ thị hàm số  $y = |ax + b|$  ( $a \neq 0$ ) ta có thể vẽ hai đường thẳng  $y = ax + b$  và  $y = -ax - b$  rồi xóa đi hai phần đường thẳng nằm phía dưới trục hoành.

**B CÁC DẠNG TOÁN VÀ VÍ DỤ****☐ Dạng 1. Xét tính đồng biến, nghịch biến**

Muốn xét tính đơn điệu của hàm số bậc nhất, ta cần đưa hàm số về đúng dạng  $y = \boxed{a}x + b$ .

- ☑ Nếu  $a > 0$  thì hàm số đồng biến (tăng) trên  $\mathbb{R}$ .
- ☑ Nếu  $a < 0$  thì hàm số nghịch biến (giảm) trên  $\mathbb{R}$ .

**🔗 Ví dụ 1.** Xét tính đơn điệu của các hàm số sau:

①  $y = 2x + 1$ .                      ②  $y = -x + 1$ .                      ③  $y = \frac{1-x}{2}$ .                      ④  $y = -\frac{x}{2}$ .

**🔗 Lời giải.**

- ① Hàm số  $y = 2x + 1$  có hệ số  $a = 2 > 0$  nên hàm số đồng biến (tăng) trên  $\mathbb{R}$ .
- ② Hàm số  $y = -x + 1$  có hệ số  $a = -1 < 0$  nên hàm số nghịch biến (giảm) trên  $\mathbb{R}$ .
- ③ Hàm số  $y = \frac{1-x}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$  có hệ số  $a = -\frac{1}{2} < 0$  nên hàm số nghịch biến (giảm) trên  $\mathbb{R}$ .
- ④ Hàm số  $y = -\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}x$  có hệ số  $a = -\frac{1}{2} < 0$  nên hàm số nghịch biến (giảm) trên  $\mathbb{R}$ .

**🔗 Ví dụ 2.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số

①  $y = (m-1)x + 1$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .                      ②  $y = -mx + m + 1$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .  
 ③  $y = -(m^2+1)x + m + 1$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .                      ④  $y = \frac{1}{m-1}x + 2$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

**🔗 Lời giải.**

- ① Hàm số  $y = (m-1)x + 1$  đồng biến trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow m-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ .  
 Vậy  $m > 1$ .
- ② Hàm số  $y = -mx + m + 1$  nghịch biến trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow -m < 0 \Leftrightarrow m > 0$ .  
 Vậy  $m > 0$ .
- ③ Hàm số  $y = -(m^2+1)x + m + 1$  nghịch biến trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow -(m^2+1) < 0 \Leftrightarrow m^2+1 > 0$  (luôn đúng với mọi  $m \in \mathbb{R}$ ).  
 Vậy  $m \in \mathbb{R}$ .
- ④ Hàm số  $y = \frac{1}{m-1}x + 2$  đồng biến trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1}{m-1} > 0 \Leftrightarrow m-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ .  
 Vậy  $m > 1$ .

## Dạng 2. Đồ thị hàm số $y = ax + b$

Đưa hàm số về đúng dạng  $y = [a]x + b$ , ( $a \neq 0$ ). Đồ thị hàm số là một đường thẳng.

- ☑ Nếu  $a > 0$  thì đồ thị “đi lên từ trái sang phải”.
- ☑ Nếu  $a < 0$  thì đồ thị “đi xuống từ trái sang phải”.
- ☑ Xác định giao điểm của đường thẳng với hai trục tọa độ rồi nối hai điểm đó lại ta được đường thẳng là đồ thị của hàm số.

**Ví dụ 1.** Xét tính đơn điệu và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

①  $y = 2x + 1$ .      ②  $y = -x + 1$ .      ③  $y = \frac{1-x}{2}$ .      ④  $y = -\frac{x}{4} + 2$ .

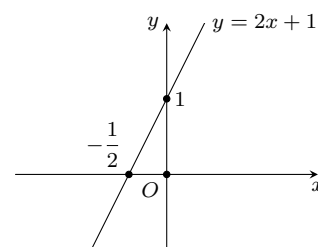
**Lời giải.**

①  $y = 2x + 1$ .

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

Hàm số  $y = 2x + 1$  có hệ số  $a = 2 > 0$  nên hàm số đồng biến (tăng) trên  $\mathbb{R}$ .

Đồ thị hàm số  $y = 2x + 1$  là một đường thẳng đi qua hai điểm  $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$  và  $B(0; 1)$ .

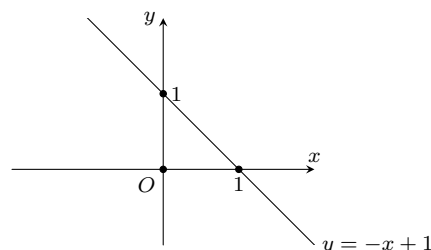


②  $y = -x + 1$ .

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

Hàm số  $y = -x + 1$  có hệ số  $a = -1 < 0$  nên hàm số nghịch biến (giảm) trên  $\mathbb{R}$ .

Đồ thị hàm số  $y = -x + 1$  là một đường thẳng đi qua hai điểm  $A(1; 0)$  và  $B(0; 1)$ .

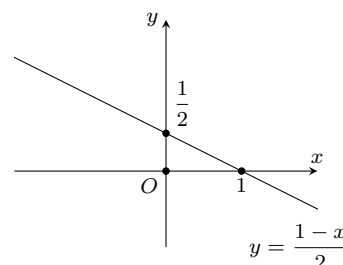


③  $y = \frac{1-x}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ .

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

Hàm số  $y = \frac{1-x}{2}$  có hệ số  $a = -\frac{1}{2} < 0$  nên hàm số nghịch biến (giảm) trên  $\mathbb{R}$ .

Đồ thị hàm số  $y = \frac{1-x}{2}$  là một đường thẳng đi qua hai điểm  $A(1; 0)$  và  $B\left(0; \frac{1}{2}\right)$ .

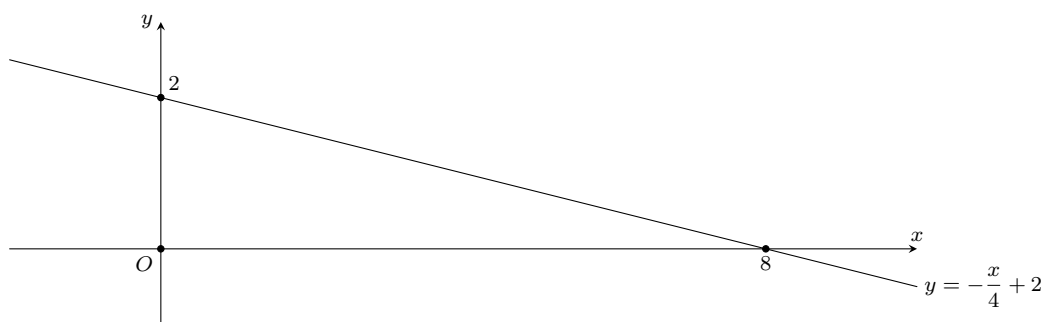


④  $y = -\frac{x}{4} + 2$ .

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

Hàm số  $y = -\frac{x}{4} + 2$  có hệ số  $a = -\frac{1}{4} < 0$  nên hàm số nghịch biến (giảm) trên  $\mathbb{R}$ .

Đồ thị hàm số  $y = -\frac{x}{4} + 2$  là một đường thẳng đi qua hai điểm  $A(8; 0)$  và  $B(0; 2)$ .



### 🔴 Dạng 3. Đồ thị hàm số $y = |ax + b|$

$$\textcircled{☑} y = |ax + b| = \begin{cases} ax + b & \text{khi } x \geq -\frac{b}{a} \\ -(ax + b) & \text{khi } x < -\frac{b}{a} \end{cases}$$

☑ Để vẽ đồ thị hàm số  $y = |ax + b|$ , ( $a \neq 0$ ) ta có thể vẽ hai đường thẳng  $y = ax + b$  và  $y = -ax - b$  rồi xóa đi hai phần đường thẳng nằm phía dưới trục hoành.

🔗 **Ví dụ 1.** Xét tính đơn điệu và vẽ đồ thị các hàm số sau.

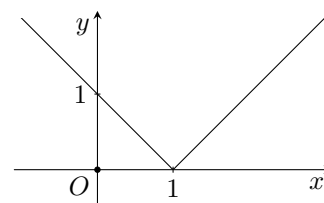
- ①  $y = |x - 1|$
- ②  $y = |-x + 1| + 1$
- ③  $y = |x + 1| + |x|$
- ④  $y = x + |x + 1|$

### 🔗 **Lời giải.**

① Ta có

$$y = |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$$

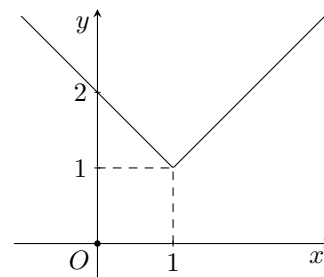
Hàm số đồng biến trên  $(1; +\infty)$  và nghịch biến trên  $(-\infty; 1)$ .



② Ta có

$$y = |-x + 1| + 1 = \begin{cases} -x + 2 & \text{khi } x \leq 1 \\ x & \text{khi } x > 1. \end{cases}$$

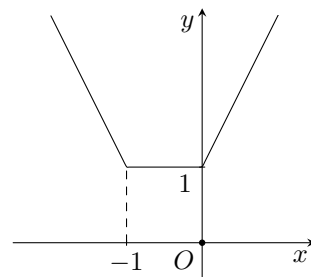
Hàm số nghịch biến trên  $(1; +\infty)$  và đồng biến trên  $(-\infty; 1)$ .



③ Ta có

$$y = |x + 1| + |x| = \begin{cases} 2x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 1 & \text{khi } -1 < x < 0 \\ -2x - 1 & \text{khi } x \leq -1. \end{cases}$$

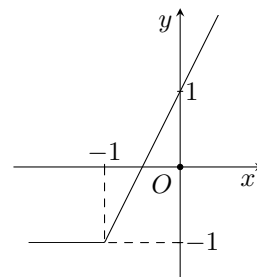
Hàm số đồng biến trên  $(0; +\infty)$  và nghịch biến trên  $(-\infty; -1)$ .



④ Ta có

$$y = x + |x + 1| = \begin{cases} 2x + 1 & \text{khi } x \geq -1 \\ -1 & \text{khi } x < -1. \end{cases}$$

Hàm số đồng biến trên  $(-1; +\infty)$ .



## C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Tìm  $m$  để hàm số  $y = (2m + 1)x + m - 3$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

- Ⓐ  $m > \frac{1}{2}$ .      Ⓑ  $m < \frac{1}{2}$ .      Ⓒ  $m < -\frac{1}{2}$ .      Ⓓ  $m > -\frac{1}{2}$ .

🔗 Lời giải.

Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow 2m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$ .

🔗 Chọn đáp án Ⓓ.....

Câu 2. Tìm  $m$  để hàm số  $y = m(x + 2) - x(2m + 1)$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

- Ⓐ  $m > -1$ .      Ⓑ  $m < -\frac{1}{2}$ .      Ⓒ  $m < -1$ .      Ⓓ  $m > -\frac{1}{2}$ .

🔗 Lời giải.

Ta có  $y = -(m + 1)x + 2m$ .

Hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow -(m + 1) < 0 \Leftrightarrow m > -1$ .

🔗 Chọn đáp án Ⓐ.....

Câu 3. Tìm  $m$  để hàm số  $y = -(m^2 + 1)x + m - 4$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

- Ⓐ  $m > 1$ .      Ⓑ Với mọi  $m$ .      Ⓒ  $m < -1$ .      Ⓓ  $m > -1$ .

🔗 Lời giải.

Hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow -(m^2 + 1) < 0 \Leftrightarrow m^2 + 1 > 0$  (luôn đúng  $\forall m \in \mathbb{R}$ ).

🔗 Chọn đáp án Ⓑ.....

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-2017; 2017]$  để hàm số  $y = (m - 2)x + 2m$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

- Ⓐ 2014.      Ⓑ 2016.      Ⓒ Vô số.      Ⓓ 2015.

🔗 Lời giải.

Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$ .

Vì  $m$  nguyên và thuộc đoạn  $[-2017; 2017]$  nên  $m \in \{3; 4; \dots; 2017\}$ .

Vậy có 2015 số nguyên  $m$  thỏa mãn bài.

🔗 Chọn đáp án Ⓓ.....

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-2017; 2017]$  để hàm số  $y = (m^2 - 4)x + 2m$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

- Ⓐ 4030.      Ⓑ 4034.      Ⓒ Vô số.      Ⓓ 2015.

🔗 Lời giải.

Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2. \end{cases}$

Vì  $m$  nguyên và thuộc đoạn  $[-2017; 2017]$  nên  $m \in \{-2017; -2016; \dots; -4; -3; 3; 4; \dots; 2017\}$ .

Vậy có 4030 số nguyên  $m$  thỏa mãn bài.

🔍 Chọn đáp án (A).

**Câu 6.** Đường thẳng nào sau đây song song với đường thẳng  $y = \sqrt{2}x$ .

- (A)  $y = 1 - \sqrt{2}x$ .      (B)  $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x - 3$ .      (C)  $y + \sqrt{2}x = 2$ .      (D)  $y - \sqrt{2}x = 5$ .

🔍 Lời giải.

Ta có  $y - \sqrt{2}x = 5 \Leftrightarrow y = \sqrt{2}x + 5$ .

Suy ra đường thẳng song song với đường thẳng  $y = \sqrt{2}x$  là  $y = \sqrt{2}x + 5$ .

🔍 Chọn đáp án (D).

**Câu 7.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = (m^2 - 3)x + 2m - 3$  song song với đường thẳng  $y = x + 1$ .

- (A)  $m = 2$ .      (B)  $m = \pm 2$ .      (C)  $m = -2$ .      (D)  $m = 1$ .

🔍 Lời giải.

Điều kiện để hai đường thẳng song song là  $\begin{cases} m^2 - 3 = 1 \\ 2m - 3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$ .

🔍 Chọn đáp án (C).

**Câu 8.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = 3x + 1$  song song với đường thẳng  $y = (m^2 - 1)x + m - 1$ .

- (A)  $m = \pm 2$ .      (B)  $m = 2$ .      (C)  $m = -2$ .      (D)  $m = 0$ .

🔍 Lời giải.

Điều kiện để hai đường thẳng song song là  $\begin{cases} m^2 - 1 = 3 \\ m - 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$ .

🔍 Chọn đáp án (C).

**Câu 9.** Biết rằng đồ thị hàm số  $y = ax + b$  đi qua điểm  $M(1; 4)$  và song song với đường thẳng  $y = 2x + 1$ . Tính tổng  $S = a + b$ .

- (A)  $S = 4$ .      (B)  $S = 2$ .      (C)  $S = 0$ .      (D)  $S = -4$ .

🔍 Lời giải.

Ta có  $\begin{cases} a + b = 4 \\ a = 2 \\ b \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$ .

Vậy tổng  $S = a + b = 4$ .

🔍 Chọn đáp án (A).

**Câu 10.** Biết rằng đồ thị hàm số  $y = ax + b$  đi qua điểm  $E(2; -1)$  và song song với đường thẳng  $ON$  với  $O$  là gốc tọa độ và  $N(1; 3)$ . Tính giá trị biểu thức  $S = a^2 + b^2$ .

- (A)  $S = -4$ .      (B)  $S = -40$ .      (C)  $S = -58$ .      (D)  $S = 58$ .

🔍 Lời giải.

Vì đồ thị hàm số  $y = ax + b$  đi qua điểm  $E(2; -1)$  nên  $2a + b = -1$ . (1)

Gọi đường thẳng  $ON$  có dạng  $y = mx + n$ .

Suy ra  $\begin{cases} n = 0 \\ m + n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 0 \end{cases} \Rightarrow ON: y = 3x$ .

Theo giả thiết suy ra  $\begin{cases} a = 3 \\ b \neq 0 \end{cases}$ . Kết hợp với (1) suy ra  $b = -7$ .

Vậy  $S = 3^2 + (-7)^2 = 58$ .

🔍 Chọn đáp án (D).

**Câu 11.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đường thẳng  $d: y = (3m + 2)x - 7m - 1$  vuông góc với đường thẳng  $\Delta: y = 2x - 1$ .

- (A)  $m = 0$ .      (B)  $m = -\frac{5}{6}$ .      (C)  $m < \frac{5}{6}$ .      (D)  $m > -\frac{1}{2}$ .

🔍 Lời giải.

$d \perp \Delta \Leftrightarrow (3m + 2) \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{6}$ .

🔍 Chọn đáp án (B).

**Câu 12.** Biết rằng đồ thị hàm số  $y = ax + b$  đi qua điểm  $N(4; -1)$  và vuông góc với đường thẳng  $4x - y + 1 = 0$ . Tính tích  $P = ab$ .

- (A)  $P = 0$ .                      (B)  $P = -\frac{1}{4}$ .                      (C)  $P = \frac{1}{4}$ .                      (D)  $P = -\frac{1}{2}$ .

**Lời giải.**

Đồ thị hàm số  $y = ax + b$  đi qua điểm  $N(4; -1)$  nên  $-1 = 4a + b$ .

Đồ thị hàm số  $y = ax + b$  vuông góc với  $4x - y + 1 = 0$ , tức vuông góc với  $y = 4x + 1 \Leftrightarrow 4a = -1$ .

Ta có hệ  $\begin{cases} 4a + b = -1 \\ 4a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow ab = 0$ .

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 13.** Tìm  $a$  và  $b$  để đồ thị hàm số  $y = ax + b$  đi qua các điểm  $A(-2; 1)$  và  $B(1; -2)$ .

- (A)  $a = -2$  và  $b = -1$ .                      (B)  $a = 2$  và  $b = 1$ .                      (C)  $a = 1$  và  $b = 1$ .                      (D)  $a = -1$  và  $b = -1$ .

**Lời giải.**

Ta có hệ  $\begin{cases} -2a + b = 1 \\ a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$ .

**Chọn đáp án (D).**

**Câu 14.** Biết rằng đồ thị hàm số  $y = ax + b$  đi qua hai điểm  $M(-1; 3)$  và  $N(1; 2)$ . Tính tổng  $S = a + b$ .

- (A)  $S = -\frac{1}{2}$ .                      (B)  $S = 3$ .                      (C)  $S = 2$ .                      (D)  $S = \frac{5}{2}$ .

**Lời giải.**

Ta có hệ  $\begin{cases} -a + b = 3 \\ a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow S = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2$ .

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 15.** Biết rằng đồ thị hàm số  $y = ax + b$  đi qua điểm  $A(-3; 1)$  và có hệ số góc bằng  $-2$ . Tính tích  $P = ab$ .

- (A)  $P = -10$ .                      (B)  $P = 10$ .                      (C)  $P = -7$ .                      (D)  $P = -5$ .

**Lời giải.**

Đường thẳng  $y = ax + b$  có hệ số góc bằng  $-2$  nên  $a = -2$ .

Đồ thị hàm số đi qua  $A(-3; 1)$  nên  $1 = -2 \cdot (-3) + b \Leftrightarrow b = -5 \Rightarrow ab = (-2) \cdot (-5) = 10$ .

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 16.** Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng  $y = \frac{1-3x}{4}$  và  $y = -\left(\frac{x}{3} + 1\right)$  là

- (A)  $(0; -1)$ .                      (B)  $(2; -3)$ .                      (C)  $\left(0; \frac{1}{4}\right)$ .                      (D)  $(3; -2)$ .

**Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm hai đường thẳng là  $\frac{1-3x}{4} = -\left(\frac{x}{3} + 1\right) \Leftrightarrow x = 3$ . Suy ra  $y = \frac{1-3 \cdot 3}{4} = -2$ .

Vậy tọa độ giao điểm của hai đường thẳng là  $(3; -2)$ .

**Chọn đáp án (D).**

**Câu 17.** Tìm tất cả các giá trị thực của  $m$  để đường thẳng  $y = m^2x + 2$  cắt đường thẳng  $y = 4x + 3$

- (A)  $m = \pm 2$ .                      (B)  $m \neq \pm 2$ .                      (C)  $m \neq 2$ .                      (D)  $m \neq -2$ .

**Lời giải.**

Đường thẳng  $y = m^2x + 2$  cắt đường thẳng  $y = 4x + 3 \Leftrightarrow m^2 \neq 4 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$ .

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 18.** Cho hàm số  $y = 2x + m + 1$ . Tìm giá trị thực của  $m$  để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3.

- (A)  $m = 7$ .                      (B)  $m = 3$ .                      (C)  $m = -7$ .                      (D)  $m = \pm 7$ .

**Lời giải.**

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3 tức là giao điểm của trục hoành và đồ thị hàm số là  $(3; 0)$ .

Suy ra  $0 = 2 \cdot 3 + m + 1 \Leftrightarrow m = -7$ .

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 19.** Cho hàm số  $y = 2x + m + 1$ . Tìm giá trị thực của  $m$  để đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng  $-2$ .

- (A)  $m = -3$ .                      (B)  $m = 3$ .                      (C)  $m = 0$ .                      (D)  $m = -1$ .

**Lời giải.**

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng  $-2$  tức là giao điểm của trục tung và đồ thị hàm số là  $(0; -2)$ .  
Suy ra  $-2 = 2 \cdot 0 + m + 1 \Leftrightarrow m = -3$ .

🔍 Chọn đáp án **(A)**.

**Câu 20.** Tìm giá trị thực của  $m$  để hai đường thẳng  $d: y = mx - 3$  và  $\Delta: y + x = m$  cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung.

**(A)**  $m = -3$ .

**(B)**  $m = 3$ .

**(C)**  $m = \pm 3$ .

**(D)**  $m = 0$ .

🔍 Lời giải.

Gọi  $(0; y_0)$  là giao điểm của  $d$  và  $\Delta$ .

Ta có  $\begin{cases} y_0 = m \cdot 0 - 3 \\ y_0 + 0 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = -3 \\ y_0 = m \end{cases} \Leftrightarrow m = -3$ .

🔍 Chọn đáp án **(A)**.

**Câu 21.** Tìm giá trị thực của  $m$  để hai đường thẳng  $d: y = mx - 3$  và  $\Delta: y + x = m$  cắt nhau tại một điểm nằm trên trục hoành.

**(A)**  $m = \sqrt{3}$ .

**(B)**  $m = \pm\sqrt{3}$ .

**(C)**  $m = -\sqrt{3}$ .

**(D)**  $m = 3$ .

🔍 Lời giải.

Gọi  $(x_0; 0)$  là giao điểm của  $d$  và  $\Delta$ .

Ta có  $\begin{cases} 0 = m \cdot x_0 - 3 \\ 0 + x_0 = m \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}$ .

🔍 Chọn đáp án **(B)**.

**Câu 22.** Cho hàm số bậc nhất  $y = ax + b$ . Tìm  $a$  và  $b$ , biết rằng đồ thị hàm số đi qua điểm  $M(-1; 1)$  và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là  $5$ .

**(A)**  $a = \frac{1}{6}, b = \frac{5}{6}$ .

**(B)**  $a = -\frac{1}{6}, b = -\frac{5}{6}$ .

**(C)**  $a = \frac{1}{6}, b = -\frac{5}{6}$ .

**(D)**  $a = -\frac{1}{6}, b = \frac{5}{6}$ .

🔍 Lời giải.

Gọi  $d: y = ax + b$ . Ta có  $M(-1; 1) \in d$  và  $d \cap Ox = (5; 0)$  nên  $\begin{cases} -a + b = 1 \\ 5a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{6} \\ b = \frac{5}{6} \end{cases}$ .

🔍 Chọn đáp án **(D)**.

**Câu 23.** Cho hàm số bậc nhất  $y = ax + b$ . Tìm  $a$  và  $b$ , biết rằng đồ thị hàm số cắt đường thẳng  $\Delta_1: y = 2x + 5$  tại điểm có hoành độ bằng  $-2$  và cắt đường thẳng  $\Delta_2: y = -3x + 4$  tại điểm có tung độ bằng  $-2$ .

**(A)**  $a = \frac{3}{4}, b = \frac{1}{2}$ .

**(B)**  $a = -\frac{3}{4}, b = \frac{1}{2}$ .

**(C)**  $a = -\frac{3}{4}, b = -\frac{1}{2}$ .

**(D)**  $a = \frac{3}{4}, b = -\frac{1}{2}$ .

🔍 Lời giải.

Gọi  $d: y = ax + b$  và giao điểm của  $d$  với  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  lần lượt là  $A$  và  $B$ .

Ta có  $A(-2; y_A)$  với  $y_A = 2 \cdot (-2) + 5 = 1$  và  $B(x_B; -2)$  với  $x_B = \frac{y_B - 4}{-3} = \frac{-2 - 4}{-3} = 2$ .

Có  $A(-2; 1) \in d$  và  $B(2; -2) \in d$  nên  $\begin{cases} -2a + b = 1 \\ 2a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$ .

🔍 Chọn đáp án **(C)**.

**Câu 24.** Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để ba đường thẳng  $y = 2x$ ,  $y = -x - 3$  và  $y = mx + 5$  phân biệt và đồng qui.

**(A)**  $m = -7$ .

**(B)**  $m = 5$ .

**(C)**  $m = -5$ .

**(D)**  $m = 7$ .

🔍 Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của  $y = 2x$  và  $y = -x - 3$  là  $2x = -x - 3 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = -2$ .

Ba đường thẳng  $y = 2x$ ,  $y = -x - 3$  và  $y = mx + 5$  đồng qui  $\Leftrightarrow (-1; -2) \in d_3$  với  $d_3: y = mx + 5$

$\Leftrightarrow -m + 5 = -2 \Leftrightarrow m = 7$ .

Kiểm tra với  $m = 7$  thì ba đường thẳng trên phân biệt.

🔍 Chọn đáp án **(D)**.

**Câu 25.** Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để ba đường thẳng  $y = -5(x + 1)$ ,  $y = mx + 3$  và  $y = 3x + m$  phân biệt và đồng qui.

**(A)**  $m \neq 3$ .

**(B)**  $m = 13$ .

**(C)**  $m = -13$ .

**(D)**  $m = 3$ .

🔍 Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của  $y = -5(x + 1)$  và  $y = 3x + m$  là  $-5(x + 1) = 3x + m \Leftrightarrow x = \frac{-m - 5}{8} \Rightarrow$

$y = -5 \left( \frac{-m - 5}{8} + 1 \right) = -\frac{5}{8}(-m + 3)$ .

Ba đường thẳng  $y = 2x$ ,  $y = -x - 3$  và  $y = mx + 5$  đồng qui  $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{8}(-m - 5); -\frac{5}{8}(-m + 3)\right) \in d_3$  với  $d_3: y = mx + 3$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8}(-m - 5)m + 3 = -\frac{5}{8}(-m + 3) \\ \Leftrightarrow & -\frac{1}{8}m^2 + \frac{5}{8}m + 3 = \frac{5}{8}m - \frac{15}{8} \\ \Leftrightarrow & -\frac{1}{8}m^2 + \frac{39}{8} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{8}m^2 - \frac{10}{8}m + \frac{39}{8} = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} m = 3 \\ m = -13 \end{cases} \end{aligned}$$

Kiểm tra với  $m = 3$  thì hai đường thẳng  $y = mx + 3$  và  $y = 3x + m$  trùng nhau nên loại  $m = 3$ .  
Kiểm tra với  $m = -13$  thì ba đường thẳng trên phân biệt nên nhận  $m = -13$ .

🔍 Chọn đáp án **C**.

**Câu 26.** Cho hàm số  $y = x - 1$  có đồ thị là đường  $\Delta$ . Đường thẳng  $\Delta$  tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích  $S$  bằng bao nhiêu?

- A**  $S = \frac{1}{2}$ .      **B**  $S = 1$ .      **C**  $S = 2$ .      **D**  $S = \frac{3}{2}$ .

🔍 Lời giải.

Có  $\Delta \cap Ox = A(x_0; 0)$  với  $x_0 = y_0 + 1 = 1$ . Suy ra  $A(1; 0)$ .  
 $\Delta \cap Oy = A(0; y_0)$  với  $y_0 = x_0 - 1 = -1$ . Suy ra  $B(0; -1)$ .

Diện tích tam giác tạo thành  $S = \frac{1}{2} \cdot |1| \cdot |-1| = \frac{1}{2}$ .

🔍 Chọn đáp án **A**.

**Câu 27.** Tìm phương trình đường thẳng  $d: y = ax + b$ . Biết đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $I(2; 3)$  và tạo với hai tia  $Ox$ ,  $Oy$  một tam giác vuông cân.

- A**  $y = x + 5$ .      **B**  $y = -x + 5$ .      **C**  $y = -x - 5$ .      **D**  $y = x - 5$ .

🔍 Lời giải.

Đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $I(2; 3)$  nên  $3 = 2a + b$ .

$d$  cắt trục  $Ox$  tại điểm  $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$  và cắt trục  $Oy$  tại điểm  $(0, b)$ .

$d$  tạo với hai tia  $Ox$ ,  $Oy$  một tam giác vuông cân nên  $a > 0$ ,  $b > 0$  và  $-\frac{b}{a} = b$ . Suy ra  $b = 0$  (loại do  $b > 0$ ) hoặc  $a = -1$ .

Ta có hệ  $\begin{cases} 2a + b = 3 \\ a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \end{cases}$ . Suy ra  $y = -x + 5$ .

🔍 Chọn đáp án **B**.

**Câu 28.** Tìm phương trình đường thẳng  $d: y = ax + b$ . Biết đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $I(1; 2)$  và tạo với hai tia  $Ox$ ,  $Oy$  một tam giác có diện tích bằng 4.

- A**  $y = -2x - 4$ .      **B**  $y = -2x + 4$ .      **C**  $y = 2x - 4$ .      **D**  $y = 2x + 4$ .

🔍 Lời giải.

$d$  cắt trục  $Ox$  tại điểm  $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$  và cắt trục  $Oy$  tại điểm  $(0, b)$ . Có  $b > 0$  và  $-\frac{b}{a} > 0$  nên  $a < 0$ .

Đường thẳng  $d: y = ax + b$  tạo với hai tia  $Ox$ ,  $Oy$  một tam giác có diện tích bằng 4 nên  $-\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} \cdot b = 4$ .

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} a + b = 2 \\ a = -\frac{b^2}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b^2}{8} + b = 2 \\ a = -\frac{b^2}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = -2 \end{cases} \text{ (thỏa } b > 0 \text{ và } a < 0).$$

Vậy  $y = -2x + 4$ .

🔍 Chọn đáp án **B**.

**Câu 29.** Đường thẳng  $d: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ , ( $a \neq 0, b \neq 0$ ) đi qua điểm  $M(-1; 6)$  tạo với các tia  $Ox$ ,  $Oy$  một tam giác có diện tích bằng 4. Tìm  $S = a + 2b$ .

- A**  $S = -\frac{38}{3}$ .      **B**  $S = \frac{-5 + 7\sqrt{7}}{3}$ .      **C**  $S = 10$ .      **D**  $S = 6$ .

🔍 Lời giải.

Ta có đường thẳng  $d: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  tạo với hai tia  $Ox$  và  $Oy$  một tam giác có diện tích bằng 4 nên  $\frac{1}{2} \cdot ab = 4 \Leftrightarrow ab = 8$ .

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} ab = 8 \\ -\frac{1}{a} + \frac{6}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{b} \\ -\frac{8}{b} + \frac{6}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b^2 + 48 = 8b \\ a = \frac{8}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = 2 \end{cases} \text{ (nhận)} \vee \begin{cases} b = -12 \\ a = -\frac{2}{3} \end{cases} \text{ (loại)}.$$

Vậy  $a + 2b = 2 + 2 \cdot 4 = 10$ .

🔍 Chọn đáp án **C**.

**Câu 30.** Tìm phương trình đường thẳng  $d: y = ax + b$ . Biết đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $I(1; 3)$ , cắt hai tia  $Ox, Oy$  và cách gốc tọa độ một khoảng bằng  $\sqrt{5}$ .

**A**  $y = 2x + 5$ .

**B**  $y = -2x - 5$ .

**C**  $y = 2x - 5$ .

**D**  $y = -2x + 5$ .

🔍 Lời giải.

$d$  cắt trục  $Ox$  tại điểm  $(-\frac{b}{a}, 0)$  và cắt trục  $Oy$  tại điểm  $(0, b)$ .

Do  $d$  cắt hai tia  $Ox, Oy$  và cách gốc tọa độ một khoảng bằng  $\sqrt{5}$  nên  $\frac{1}{5} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{\frac{b^2}{a^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{1}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow 5(a^2 + 1) = b^2$ .

Có  $b > 0$  và  $-\frac{b}{a} > 0$  nên  $a < 0$

$d$  đi qua điểm  $I(1; 3)$  nên ta có hệ  $\begin{cases} a + b = 3 \\ 5(a^2 + 1) = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 - b \\ 5((3 - b)^2 + 1) = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 - b \\ 50 - 30b + 4b^2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ (loại do } a < 0) \text{ hoặc } \begin{cases} a = -2 \\ b = 5 \end{cases} \text{ (nhận). Suy ra } y = -2x + 5$$

🔍 Chọn đáp án **D**.

**Câu 31.**

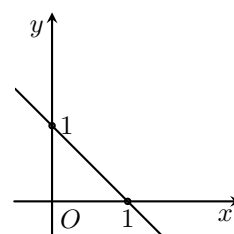
Đồ thị hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

**A**  $y = x + 1$ .

**B**  $y = -x + 2$ .

**C**  $y = 2x + 1$ .

**D**  $y = -x + 1$ .

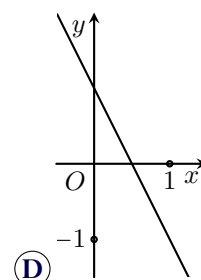
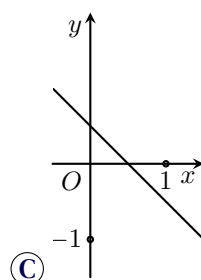
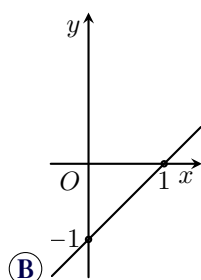
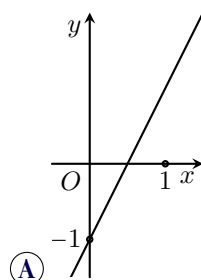


🔍 Lời giải.

Nhìn vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số đi qua 2 điểm  $(0, 1)$  và  $(1, 0)$  nên ta có hệ  $\begin{cases} a + b = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$ . Do đó  $y = -x + 1$ .

🔍 Chọn đáp án **D**.

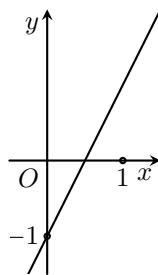
**Câu 32.** Hàm số  $y = 2x - 1$  có đồ thị là hình nào trong bốn hình sau?



🔍 Lời giải.

Ta có  $(0, -1)$  và  $(\frac{1}{2}, 0)$  là 2 điểm thuộc đồ thị hàm số  $y = 2x - 1$ .

Ta thấy chỉ có đồ thị sau là phù hợp.



Chọn đáp án **A**.

**Câu 33.**

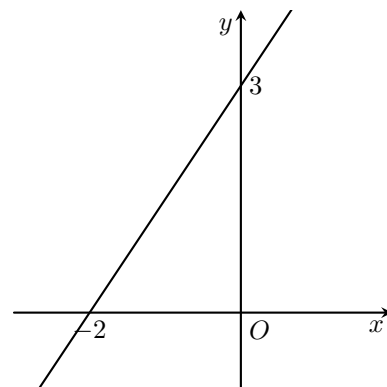
Cho hàm số  $y = ax + b$  có đồ thị là hình bên. Tìm  $a$  và  $b$ .

**A**  $a = -2$  và  $b = 3$ .

**B**  $a = -\frac{3}{2}$  và  $b = 2$ .

**C**  $a = -3$  và  $b = 3$ .

**D**  $a = \frac{3}{2}$  và  $b = 3$ .



**Lời giải.**

Đồ thị hàm số  $y = ax + b$  đi qua 2 điểm  $(0, 3)$  và  $(-2, 0)$  nên ta có hệ  $\begin{cases} b = 3 \\ -2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = 3 \end{cases}$ .

Chọn đáp án **D**.

**Câu 34.**

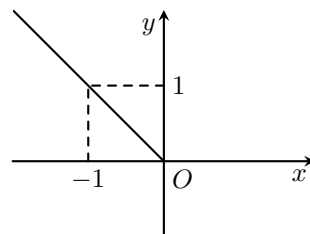
Đồ thị hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

**A**  $y = |x|$ .

**B**  $y = -x$ .

**C**  $y = |x|$  với  $x < 0$ .

**D**  $y = -x$  với  $x < 0$ .



**Lời giải.**

Với  $x \leq 0$ , đồ thị hàm số  $y = ax + b$  đi qua 2 điểm  $(0, 0)$  và  $(-1, 1)$  nên ta có hệ  $\begin{cases} b = 0 \\ -a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$ . Suy ra  $y = -x$ .

Vậy phương án  $y = |x|$  với  $x < 0$  phù hợp.

Chọn đáp án **A**.

**Câu 35.**

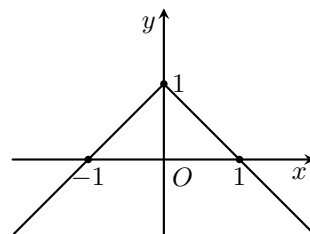
Đồ thị hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

**A**  $y = |x|$ .

**B**  $y = |x| + 1$ .

**C**  $y = 1 - |x|$ .

**D**  $y = |x| - 1$ .



**Lời giải.**

Với  $x \geq 0$ , đồ thị hàm số  $y = ax + b$  đi qua 2 điểm  $(0, 1)$  và  $(1, 0)$  nên ta có hệ  $\begin{cases} a + b = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$ . Suy ra  $y = -x + 1$ .

Với  $x < 0$ , đồ thị hàm số  $y = ax + b$  đi qua 2 điểm  $(-1, 0)$  và  $(0, 1)$  nên ta có hệ  $\begin{cases} -a + b = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$ . Suy ra  $y = -x + 1$ .

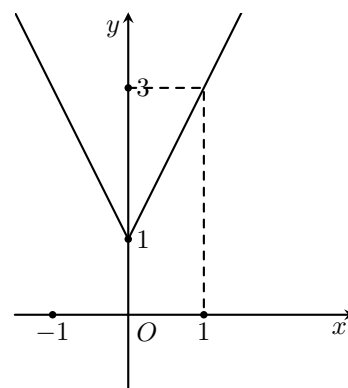
$$y = x + 1.$$

Vậy đồ thị hàm số trên  $\mathbb{R}$  là  $y = |x| + 1$ .

🔍 Chọn đáp án **(B)**.....

### Câu 36.

Đồ thị hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



**(A)**  $y = |x| + 1$ .

**(B)**  $y = 2|x| + 1$ .

**(C)**  $y = |2x + 1|$ .

**(D)**  $y = |x + 1|$ .

🔍 Lời giải.

Với  $x \geq 0$ , đồ thị hàm số  $y = ax + b$  đi qua 2 điểm  $(0, 1)$  và  $(1, 3)$  nên ta có hệ  $\begin{cases} b = 1 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$ . Suy ra  $y = 2x + 1$ .

Với  $x < 0$ , đồ thị hàm số  $y = ax + b$  đi qua 2 điểm  $(0, 1)$  và đối xứng với đồ thị hàm số  $y = 2x + 1$ . Suy ra  $y = -2x + 1$ .  
Vậy đồ thị hàm số trên  $\mathbb{R}$  là  $y = 2|x| + 1$ .

🔍 Chọn đáp án **(B)**.....

### Câu 37.

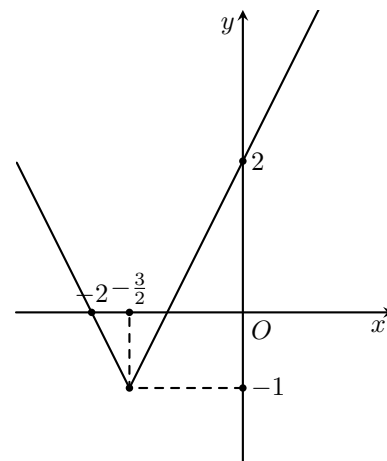
Đồ thị hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

**(A)**  $y = |2x + 3|$ .

**(B)**  $y = |2x + 3| - 1$ .

**(C)**  $y = |x - 2|$ .

**(D)**  $y = |3x + 2| - 1$ .



🔍 Lời giải.

Với  $x \geq -\frac{3}{2}$ , đồ thị hàm số  $y = ax + b$  đi qua 2 điểm  $(-\frac{3}{2}, -1)$  và  $(0, 2)$  nên ta có hệ  $\begin{cases} -\frac{3}{2}a + b = -1 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$ .

Suy ra  $y = 2x + 2 = (2x + 3) - 1$ .

Với  $x < -\frac{3}{2}$ , đồ thị hàm số  $y = ax + b$  đi qua 2 điểm  $(-\frac{3}{2}, -1)$  và  $(-2, 0)$  nên ta có hệ  $\begin{cases} -\frac{3}{2}a + b = -1 \\ -2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \end{cases}. \text{ Suy ra } y = -2x - 4 = -(2x + 3) - 1.$$

Vậy đồ thị hàm số trên  $\mathbb{R}$  là  $y = |2x + 3| - 1$ .

🔍 Chọn đáp án **(B)**.....

### Câu 38.

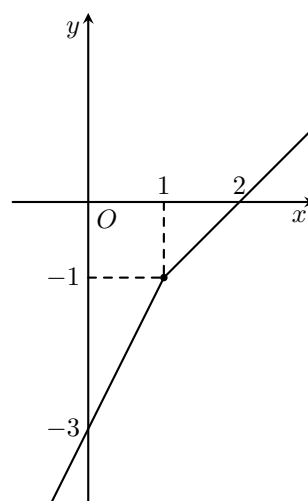
Đồ thị hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

Ⓐ  $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ x - 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

Ⓑ  $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{khi } x < 1 \\ x - 2 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$

Ⓒ  $f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & \text{khi } x \geq 1 \\ -x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

Ⓓ  $y = |x - 2|$ .



🔗 **Lời giải.**

Với  $x \geq 1$ , đồ thị hàm số  $y = ax + b$  đi qua 2 điểm  $(1, -1)$  và  $(2, 0)$  nên ta có hệ  $\begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$ . Suy ra  $y = x - 2$ .

Với  $x < 1$ , đồ thị hàm số  $y = ax + b$  đi qua 2 điểm  $(1, -1)$  và  $(0, -3)$  nên ta có hệ  $\begin{cases} a + b = -1 \\ b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$ . Suy ra  $y = 2x - 3$ .

🐞 Chọn đáp án Ⓑ.

**Câu 39.** Bảng biến thiên ở dưới là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số được cho ở bốn phương án A, B, C, D sau đây?

|        |           |               |           |
|--------|-----------|---------------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $0$           | $+\infty$ |

Ⓐ  $y = 2x - 1$ .

Ⓑ  $y = |2x - 1|$ .

Ⓒ  $y = 1 - 2x$ .

Ⓓ  $y = -|2x - 1|$ .

🔗 **Lời giải.**

Phương án  $y = 2x - 1$  có  $2 > 0$  nên luôn đồng biến trên  $\mathbb{R}$  (loại  $y = 2x - 1$ ).

Phương án  $y = 1 - 2x$  có  $-2 < 0$  nên luôn nghịch biến trên  $\mathbb{R}$  (loại  $y = 1 - 2x$ ).

Phương án  $y = -|2x - 1|$  có giá trị trên  $\mathbb{R}$  luôn âm (loại  $y = -|2x - 1|$ ).

Vậy chỉ còn phương án  $y = |2x - 1|$  là phù hợp với bảng biến thiên đã cho.

🐞 Chọn đáp án Ⓑ.

**Câu 40.** Bảng biến thiên ở dưới là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số được cho ở bốn phương án A, B, C, D sau đây?

|        |           |               |           |
|--------|-----------|---------------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $\frac{4}{3}$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $0$           | $+\infty$ |

Ⓐ  $y = |4x + 3|$ .

Ⓑ  $y = |4x - 3|$ .

Ⓒ  $y = |-3x + 4|$ .

Ⓓ  $y = |3x + 4|$ .

🔗 **Lời giải.**

Nhận thấy hàm số cắt trục  $Ox$  tại điểm có hoành độ là  $\frac{4}{3}$  nên chỉ có phương án  $y = |-3x + 4|$  là phù hợp.

🐞 Chọn đáp án Ⓒ.

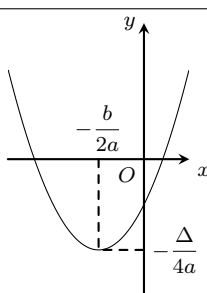
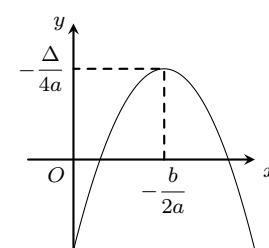
## §3 HÀM SỐ BẬC HAI

### A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1 HÀM SỐ BẬC HAI

Hàm số bậc hai là hàm số có dạng  $y = ax^2 + bx + c$  trong đó  $a, b, c$  là các hằng số và  $a \neq 0$ .  
Đồ thị của hàm số  $y = ax^2 + bx + c$  được gọi là một **Parabol**.

#### SỰ BIẾN THIÊN VÀ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC HAI

| Hàm số $y = ax^2 + bx + c$                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                     |                      |                 |           |     |           |                      |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                 |     |           |                 |           |      |           |                      |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|-----------------|-----------|-----|-----------|----------------------|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----------|-----------------|-----------|------|-----------|----------------------|-----------|
| $a > 0$                                                                                                                                                                                                                                                                        | $a < 0$                                                                                                                                                                                             |                      |                 |           |     |           |                      |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                 |     |           |                 |           |      |           |                      |           |
| <table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>-\frac{b}{2a}</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>y</math></td><td><math>+\infty</math></td><td><math>-\frac{\Delta}{4a}</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr></table> | $x$                                                                                                                                                                                                 | $-\infty$            | $-\frac{b}{2a}$ | $+\infty$ | $y$ | $+\infty$ | $-\frac{\Delta}{4a}$ | $+\infty$ | <table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>-\frac{b}{2a}</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>fy</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>-\frac{\Delta}{4a}</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr></table> | $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{2a}$ | $+\infty$ | $fy$ | $-\infty$ | $-\frac{\Delta}{4a}$ | $+\infty$ |
| $x$                                                                                                                                                                                                                                                                            | $-\infty$                                                                                                                                                                                           | $-\frac{b}{2a}$      | $+\infty$       |           |     |           |                      |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                 |     |           |                 |           |      |           |                      |           |
| $y$                                                                                                                                                                                                                                                                            | $+\infty$                                                                                                                                                                                           | $-\frac{\Delta}{4a}$ | $+\infty$       |           |     |           |                      |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                 |     |           |                 |           |      |           |                      |           |
| $x$                                                                                                                                                                                                                                                                            | $-\infty$                                                                                                                                                                                           | $-\frac{b}{2a}$      | $+\infty$       |           |     |           |                      |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                 |     |           |                 |           |      |           |                      |           |
| $fy$                                                                                                                                                                                                                                                                           | $-\infty$                                                                                                                                                                                           | $-\frac{\Delta}{4a}$ | $+\infty$       |           |     |           |                      |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                 |     |           |                 |           |      |           |                      |           |
| <div><div>☑ Hàm số nghịch biến trên khoảng <math>\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)</math>.</div><div>☑ Hàm số đồng biến trên khoảng <math>\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)</math>.</div></div>                                                                            | <div><div>☑ Hàm số đồng biến trên khoảng <math>\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)</math>.</div><div>☑ Hàm số nghịch biến trên khoảng <math>\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)</math>.</div></div> |                      |                 |           |     |           |                      |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                 |     |           |                 |           |      |           |                      |           |
|                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                 |                      |                 |           |     |           |                      |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                 |     |           |                 |           |      |           |                      |           |
| <div><div>☑ Tọa độ đỉnh <math>I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)</math>.</div><div>☑ Trục đối xứng là đường thẳng <math>x = -\frac{b}{2a}</math>.</div></div>                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                     |                      |                 |           |     |           |                      |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                 |     |           |                 |           |      |           |                      |           |

#### Đặc biệt

☑ Khi  $a > 0$  hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là  $y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}$  tại  $x = -\frac{b}{2a}$ .

☑ Khi  $a < 0$  hàm số đạt giá trị lớn nhất là  $y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}$  tại  $x = -\frac{b}{2a}$ .

**CÁC BƯỚC VẼ PARABOL:**  $(P) : y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ )

- B1. Xác định tọa độ đỉnh  $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ .
- B2. Xác định trục đối xứng  $\Delta : x = -\frac{b}{2a}$  và hướng bề lõm của parabol.
- B3. Lập bảng giá trị, xác định các điểm thuộc  $(P)$ .
- B4. Căn cứ vào tính đối xứng, bề lõm và hình dáng parabol để nối các điểm đó lại.

 **Ví dụ 1.** Cho hàm số  $y = -x^2 + bx + 2$  có đồ thị là parabol  $(P)$ . Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho, biết rằng  $(P)$  có đỉnh nằm trên đường thẳng  $x = -2$ .

 **Lời giải.**

Vì đỉnh của parabol nằm trên đường thẳng  $x = -2$  nên  $-\frac{b}{2a} = -2 \Leftrightarrow \frac{-b}{2 \cdot (-1)} = -2 \Leftrightarrow b = -4$ . Khi đó ta có  $(P) : y = -x^2 - 4x + 2$ .

 **Bảng biến thiên**

|     |           |      |           |
|-----|-----------|------|-----------|
| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ |
| $y$ | $-\infty$ | 6    | $+\infty$ |

 **Vẽ đồ thị hàm số.**

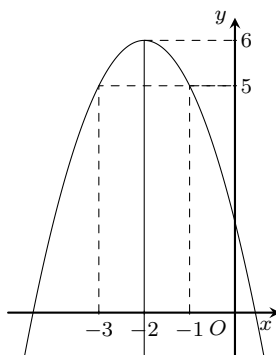
Tọa độ đỉnh của parabol  $(P)$  là  $I(-2; 6)$ .

Trục đối xứng  $\Delta : x = -2$ , bề lõm hướng xuống dưới.

Bảng giá trị xác định các điểm thuộc  $(P)$ :

|     |    |    |    |
|-----|----|----|----|
| $x$ | -3 | -2 | -1 |
| $y$ | 5  | 6  | 5  |

Đồ thị hàm số



 **Ví dụ 2.** Cho hàm số  $y = -2x^2 + bx + c$  có đồ thị là parabol  $(P)$ . Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho, biết rằng  $(P)$  đi qua điểm  $A(1; -2)$  và hoành độ của đỉnh là 2.

 **Lời giải.**

Vì hoành độ đỉnh của parabol là 2 nên  $-\frac{b}{2a} = 2 \Leftrightarrow -\frac{b}{2 \cdot (-2)} = 2 \Leftrightarrow b = 8$ . Khi đó  $(P) : y = -2x^2 + 8x + c$ .

Mặt khác  $(P)$  đi qua điểm  $A(1; -2)$  nên  $-2 = -2 \cdot (1)^2 + 8 \cdot 1 + c \Leftrightarrow c = -8$ .

Vậy  $(P) : y = -2x^2 + 8x - 8$ .

☑ Bảng biến thiên

|     |           |   |           |
|-----|-----------|---|-----------|
| $x$ | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
| $y$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |

☑ Vẽ đồ thị hàm số.

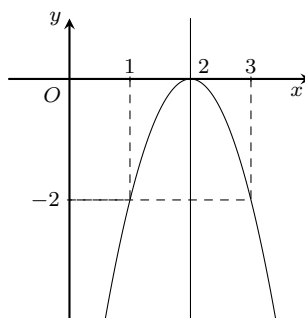
Tọa độ đỉnh của parabol  $(P)$  là  $I(2; 0)$ .

Trục đối xứng  $\Delta : x = 2$ , bề lõm hướng xuống dưới.

Bảng giá trị xác định các điểm thuộc  $(P)$ :

|     |    |   |    |
|-----|----|---|----|
| $x$ | 1  | 2 | 3  |
| $y$ | -2 | 0 | -2 |

Đồ thị hàm số



**Ví dụ 3.** Cho hàm số  $y = x^2 + bx + c$  có đồ thị là parabol  $(P)$ . Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho, biết rằng  $(P)$  có đỉnh  $I(-1; -2)$ .

🔗 Lời giải.

Vì  $(P)$  có đỉnh là  $I(-1; -2)$  nên  $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -1 & (1) \\ A \in (P). & (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow -\frac{b}{2 \cdot 1} = -1 \Leftrightarrow b = 2$ .

$(2) \Leftrightarrow -2 = (-1)^2 + 2(-1) + c \Leftrightarrow c = -1$ .

Vậy  $(P) : y = x^2 + 2x - 1$ .

☑ Bảng biến thiên

|        |           |    |           |
|--------|-----------|----|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | -1 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | -2 | $+\infty$ |

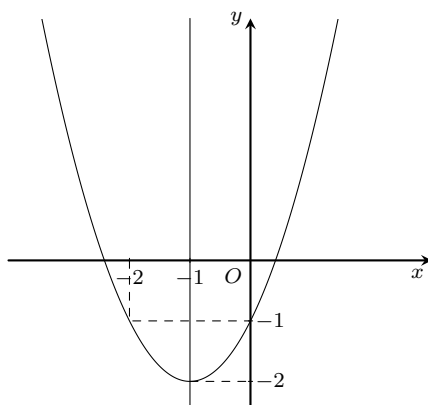
☑ Vẽ đồ thị hàm số. Tọa độ đỉnh của parabol  $(P)$  là  $I(-1; -2)$ .

Trục đối xứng  $\Delta : x = -1$ , bề lõm hướng lên trên.

Bảng giá trị xác định các điểm thuộc  $(P)$ :

|     |    |    |    |
|-----|----|----|----|
| $x$ | -2 | -1 | 0  |
| $y$ | -1 | -2 | -1 |

Đồ thị hàm số



### ! THIỀU BTTL BỔ SUNG SAU

## B CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

**Câu 1.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2}}{x}$ .

(A)  $\mathcal{D} = [-2; 2]$ .

(B)  $\mathcal{D} = (-2; 2) \setminus \{0\}$ .

(C)  $\mathcal{D} = [-2; 2] \setminus \{0\}$ .

(D)  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

**Lời giải.**

Hàm số xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -2 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2; 2] \setminus \{0\}.$$

Vậy  $\mathcal{D} = [-2; 2] \setminus \{0\}$ .

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 2.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \sqrt{6-x} + \frac{2x+1}{1+\sqrt{x-1}}$ .

(A)  $\mathcal{D} = (1; +\infty)$ .

(B)  $\mathcal{D} = [1; 6]$ .

(C)  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

(D)  $\mathcal{D} = (-\infty; 6)$ .

**Lời giải.**

Hàm số xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 6-x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 1+\sqrt{x-1} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x \geq 1 \\ \sqrt{x-1} \neq -1 \text{ (luôn đúng } \forall x \geq 1) \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1; 6].$$

Vậy  $\mathcal{D} = [1; 6]$ .

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 3.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x\sqrt{x^2-4x+4}}$ .

(A)  $\mathcal{D} = [-2; +\infty) \setminus \{0; 2\}$ .

(B)  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

(C)  $\mathcal{D} = [-2; +\infty)$ .

(D)  $\mathcal{D} = (-2; +\infty) \setminus \{0; 2\}$ .

**Lời giải.**

Hàm số xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x \neq 0 \\ x^2-4x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2; +\infty) \setminus \{0; 2\}.$$

Vậy  $\mathcal{D} = [-2; +\infty) \setminus \{0; 2\}$ .

🔍 Chọn đáp án **A**.

**Câu 4.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{x}{x - \sqrt{x} - 6}$ .

**A**  $\mathcal{D} = [0; +\infty)$ .

**B**  $\mathcal{D} = [0; +\infty) \setminus \{9\}$ .

**C**  $\mathcal{D} = \{9\}$ .

**D**  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

🔍 Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - \sqrt{x} - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq -2 \text{ (luôn đúng)} \\ \sqrt{x} \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 9. \end{cases}$$

Vậy  $\mathcal{D} = [0; +\infty) \setminus \{9\}$ .

🔍 Chọn đáp án **B**.

**Câu 5.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}}{(x-2)(x-3)}$ .

**A**  $\mathcal{D} = [1; 4]$ .

**B**  $\mathcal{D} = (1; 4) \setminus \{2; 3\}$ .

**C**  $\mathcal{D} = [1; 4] \setminus \{2; 3\}$ .

**D**  $\mathcal{D} = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$ .

🔍 Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 4 \\ x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1; 4] \setminus \{2; 3\}.$$

Vậy  $\mathcal{D} = [1; 4] \setminus \{2; 3\}$ .

🔍 Chọn đáp án **C**.

**Câu 6.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{2018}{\sqrt[3]{x^2-3x+2} - \sqrt[3]{x^2-7}}$ .

**A**  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ .

**B**  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

**C**  $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ .

**D**  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

🔍 Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi

$$\sqrt[3]{x^2-3x+2} - \sqrt[3]{x^2-7} \neq 0 \Leftrightarrow x^2-3x+2 \neq x^2-7 \Leftrightarrow x \neq 3.$$

Vậy  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ .

🔍 Chọn đáp án **A**.

**Câu 7.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{|x|}{|x-2| + |x^2+2x|}$ .

**A**  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

**B**  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; -2\}$ .

**C**  $\mathcal{D} = (-2; 0)$ .

**D**  $\mathcal{D} = (2; +\infty)$ .

🔍 Lời giải.

$$\text{Xét } |x-2| + |x^2+2x| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x^2+2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=0 \\ x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Do đó hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi  $|x-2| + |x^2+2x| \neq 0$ , suy ra  $x \in \mathbb{R}$ . Vậy  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

🔍 Chọn đáp án **A**.

**Câu 8.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{2x-1}{\sqrt{x|x-4|}}$ .

**A**  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$ .

**B**  $\mathcal{D} = (0; +\infty)$ .

**C**  $\mathcal{D} = [0; +\infty) \setminus \{4\}$ .

**D**  $\mathcal{D} = (0; +\infty) \setminus \{4\}$ .

🔍 Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x > 0 \\ |x-4| > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; +\infty) \setminus \{4\}.$$

Vậy  $\mathcal{D} = (0; +\infty) \setminus \{4\}$ .

🔍 Chọn đáp án **D**.

**Câu 9.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{\sqrt{5-3|x|}}{x^2+4x+3}$ .

(A)  $\mathcal{D} = \left[-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right] \setminus \{-1\}$ .

(B)  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

(C)  $\mathcal{D} = \left(-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right) \setminus \{-1\}$ .

(D)  $\mathcal{D} = \left[-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right]$ .

**Lời giải.**

Hàm số xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 5-3|x| \geq 0 \\ x^2+4x+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq \frac{5}{3} \\ x \neq -1 \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{5}{3} \\ x \neq -1 \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right] \setminus \{-1\}.$$

Vậy  $\mathcal{D} = \left[-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right] \setminus \{-1\}$ .

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 10.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-3; 3]$  để hàm số  $f(x) = (m+1)x + m - 2$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

(A) 7.

(B) 5.

(C) 4.

(D) 3.

**Lời giải.**

Để hàm số  $f(x) = (m+1)x + m - 2$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$  thì  $m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$ .

Do  $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-3; 3] \end{cases} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3\}$ .

Vậy có 4 giá trị của  $m$  thỏa yêu cầu bài toán.

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 11.** Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số lẻ?

(A)  $y = x^{2018} - 2017$ .

(B)  $y = \sqrt{2x+3}$ .

(C)  $y = \sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}$ .

(D)  $y = |x+3| + |x-3|$ .

**Lời giải.**

Từ 4 đáp án trên, ta thấy hàm số  $y = \sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}$  có

☑ Tập xác định  $\mathcal{D} = [-3; 3]$  là tập đối xứng, vì  $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$ .

☑ Mà  $y(-x) = \sqrt{3-x} - \sqrt{3+x} = -y(x)$ .

Vậy hàm số  $y = \sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}$  là hàm số lẻ.

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 12.** Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số chẵn?

(A)  $y = |x+1| + |x-1|$ .

(B)  $y = |x+3| + |x-2|$ .

(C)  $y = 2x^3 - 3x$ .

(D)  $y = 2x^4 - 3x^2 + x$ .

**Lời giải.**

Từ 4 đáp án trên, ta thấy hàm số  $y = |x+1| + |x-1|$  có

☑ Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  là tập đối xứng, vì  $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$ .

☑ Mà  $y(-x) = |-x+1| + |-x-1| = |x-1| + |x+1| = y(x) \forall x \in \mathcal{D}$ .

Vậy hàm số  $y = |x+1| + |x-1|$  là hàm số chẵn.

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 13.** Trong các hàm số  $y = |x+2| - |x-2|$ ,  $y = |2x+1| + \sqrt{4x^2-4x+1}$ ,  $y = x(|x-2|)$ ,  $y = \frac{|x+2015| + |x-2015|}{|x+2015| - |x-2015|}$  có bao nhiêu hàm số lẻ?

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

**Lời giải.**

☑ Với hàm số  $y = |x+2| - |x-2|$  ta có

• Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  là tập đối xứng, vì  $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D} \forall x \in \mathcal{D}$ .

• Mà  $y(-x) = |-x+2| - |-x-2| = |x-2| - |x+2| = -y(x) \forall x \in \mathcal{D}$ .

Vậy hàm số  $y = |x+2| - |x-2|$  là hàm số lẻ.

☑ Với hàm số  $y = |2x + 1| + \sqrt{4x^2 - 4x + 1} = |2x + 1| + |2x - 1|$  ta có

- Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  là tập đối xứng, vì  $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$ .
- Mà  $y(-x) = |-2x + 1| + |-2x - 1| = |2x - 1| + |2x + 1| = y(x) \forall x \in \mathcal{D} \forall x \in \mathcal{D}$ .

Vậy hàm số  $y = |2x + 1| + \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$  là hàm số chẵn.

☑ Với hàm số  $y = x(|x| - 2)$  ta có

- Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  là tập đối xứng, vì  $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$ .
- Mà  $y(-x) = -x(|-x| - 2) = -x(|x| - 2) = -y(x) \forall x \in \mathcal{D} \forall x \in \mathcal{D}$ .

Vậy hàm số  $y = x(|x| - 2)$  là hàm số lẻ.

☑ Với hàm số  $y = \frac{|x + 2015| + |x - 2015|}{|x + 2015| - |x - 2015|}$  ta có

- Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  là tập đối xứng, vì  $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$ .
- Mà  $y(-x) = \frac{|-x + 2015| + |-x - 2015|}{|-x + 2015| - |-x - 2015|} = \frac{|x - 2015| + |x + 2015|}{|x - 2015| - |x + 2015|} = -y(x) \forall x \in \mathcal{D} \forall x \in \mathcal{D}$ .

Vậy hàm số  $y = \frac{|x + 2015| + |x - 2015|}{|x + 2015| - |x - 2015|}$  là hàm số lẻ.

Vậy có tất cả là 3 hàm số lẻ trong các hàm số đã cho.

🔍 Chọn đáp án **C**.

**Câu 14.** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} -x^3 - 6 & ; x \leq -2 \\ |x| & ; -2 < x < 2 \\ x^3 - 6 & ; x \geq 2 \end{cases}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)**  $f(x)$  là hàm số lẻ. **(B)**  $f(x)$  là hàm số chẵn.  
**(C)** Đồ thị của hàm số  $f(x)$  đối xứng qua gốc tọa độ. **(D)** Đồ thị của hàm số  $f(x)$  đối xứng qua trục hoành.

🔍 **Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  nên  $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$ .

$$\text{Ta có } f(-x) = \begin{cases} -(-x)^3 - 6 & ; -x \leq -2 \\ |-x| & ; -2 < -x < 2 \\ (-x)^3 - 6 & ; -x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} x^3 - 6 & ; x \geq 2 \\ |x| & ; -2 < x < 2 \\ -x^3 - 6 & ; x \leq -2 \end{cases} = f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

🔍 Chọn đáp án **B**.

**Câu 15.** Tìm điều kiện của tham số để các hàm số  $f(x) = ax^2 + bx + c$  là hàm số chẵn.

- (A)**  $a$  tùy ý,  $b = 0, c = 0$ . **(B)**  $a$  tùy ý,  $b = 0, c$  tùy ý. **(C)**  $a, b, c$  tùy ý. **(D)**  $a$  tùy ý,  $b$  tùy ý,  $c = 0$ .

🔍 **Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  nên  $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$ .

Để  $f(x)$  là hàm số chẵn thì

$$\begin{aligned} f(-x) &= f(x), \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow a(-x)^2 + b(-x) + c &= ax^2 + bx + c, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow 2bx &= 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 0. \end{aligned}$$

Vậy  $f(x)$  là hàm số chẵn khi và chỉ khi  $a$  tùy ý,  $b = 0, c$  tùy ý.

🔍 Chọn đáp án **B**.

**Câu 16.** Hàm số  $y = \frac{x+1}{x-2m+1}$  xác định trên  $[0; 1)$  khi

- (A)**  $m < \frac{1}{2}$ . **(B)**  $m \geq 1$ . **(C)**  $m < \frac{1}{2}$  hoặc  $m \geq 1$ . **(D)**  $m \geq 2$  hoặc  $m < 1$ .

🔍 **Lời giải.**

Hàm số xác định khi  $x - 2m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2m - 1$ .

$$\text{Do đó hàm số đã cho xác định trên } [0; 1) \text{ khi } \begin{cases} 2m - 1 < 0 \\ 2m - 1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ m \geq 1. \end{cases}$$

🔍 Chọn đáp án **C**.

**Câu 17.** Hàm số  $y = \sqrt{\frac{x^4 - 3x^2 + x + 7}{x^4 - 2x^2 + 1}} - 1$  có tập xác định là

(A)  $[-2; -1) \cup (1; 3]$ .

(B)  $(-2; 1] \cup [1; 3)$ .

(C)  $[-2; 3] \setminus \{1\}$ .

(D)  $[-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 3]$ .

 **Lời giải.**

Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \frac{x^4 - 3x^2 + x + 7}{x^4 - 2x^2 + 1} - 1 &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + x + 6}{(x^2 - 1)^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + x + 6 \geq 0 \\ x^2 - 1 \neq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 3 \\ x \neq \pm 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập xác định của hàm số là  $\mathcal{D} = [-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 3]$ .

 **Chọn đáp án (D).**

**Câu 18.** Hàm số  $y = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 3} + x - 2}$  có tập xác định là

(A)  $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$ .

(B)  $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty) \setminus \left\{\frac{7}{4}\right\}$ .

(C)  $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty) \setminus \left\{\frac{7}{4}\right\}$ .

(D)  $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup \left(\sqrt{3}; \frac{7}{4}\right)$ .

 **Lời giải.**

Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi  $\begin{cases} x^2 - 3 \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - 3} + x - 2 \neq 0 \end{cases}$ .

Ta có  $x^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\sqrt{3} \\ x \geq \sqrt{3}. \end{cases}$

Xét  $\sqrt{x^2 - 3} + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3} = 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x^2 - 3 = (2 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x = \frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}$ .

Suy ra  $\sqrt{x^2 - 3} + x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{7}{4}$ .

Vậy hàm số có tập xác định  $\mathcal{D} = (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty) \setminus \left\{\frac{7}{4}\right\}$ .

 **Chọn đáp án (B).**

**Câu 19.** Cho hai hàm số  $f(x) = |x + 2| - |x - 2|$  và  $g(x) = -x^4 + x^2 + 1$ . Khi đó

(A)  $f(x)$  và  $g(x)$  cùng chẵn.

(B)  $f(x)$  và  $g(x)$  cùng lẻ.

(C)  $f(x)$  chẵn,  $g(x)$  lẻ.

(D)  $f(x)$  lẻ,  $g(x)$  chẵn.

 **Lời giải.**

Hai hàm số  $f(x)$ ,  $g(x)$  có cùng tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

☉ Với  $f(x) = |x + 2| - |x - 2|$  ta có

$$f(-x) = |-x + 2| - |-x - 2| = |x - 2| - |x + 2| = -f(x), \forall x \in \mathcal{D}.$$

Suy ra  $f(x)$  là hàm số lẻ.

☉ Với  $g(x) = -x^4 + x^2 + 1$  ta có

$$g(-x) = -(-x)^4 + (-x)^2 + 1 = x^4 + x^2 + 1 = g(x), \forall x \in \mathcal{D}.$$

Suy ra  $g(x)$  là hàm số chẵn.

Vậy  $f(x)$  là hàm số lẻ,  $g(x)$  là hàm số chẵn.

 **Chọn đáp án (D).**

**Câu 20.** Hàm số  $y = \sqrt{\frac{x^3}{|x| - 2}}$  có tập xác định là

(A)  $(-2; 0] \cup (2; +\infty)$ .

(B)  $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ .

(C)  $(-\infty; -2) \cup (0; 2)$ .

(D)  $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ .

 **Lời giải.**

Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi

$$\frac{x^3}{|x|-2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 \geq 0 \\ |x|-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ |x| > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < -2 \vee x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ -2 < x \leq 0. \end{cases}$$

Vậy tập xác định là  $\mathcal{D} = (-2; 0] \cup (2; +\infty)$ .

🔍 Chọn đáp án **(A)**.....

**Câu 21.** Hàm số  $y = \frac{x+1}{x-2m+1}$  xác định trên  $[0; 1)$  khi

**(A)**  $m < \frac{1}{2}$ .

**(B)**  $m \geq 1$ .

**(C)**  $m < \frac{1}{2}$  hoặc  $m \geq 1$ .

**(D)**  $m \geq 2$  hoặc  $m < 1$ .

🔍 Lời giải.

☑ Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2m-1\}$ .

☑ Hàm số xác định trên  $[0; 1)$  khi  $\{2m-1\} \notin [0; 1)$

☑ Khi đó  $\begin{cases} 2m-1 < 0 \\ 2m-1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ m \geq 1. \end{cases}$

🔍 Chọn đáp án **(C)**.....

**Câu 22.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x - 2\sqrt{x+2}$  là

**(A)**  $-4$ .

**(B)**  $-3$ .

**(C)**  $-2$ .

**(D)**  $-1$ .

🔍 Lời giải.

Hàm số xác định khi  $x \geq -2$ .

Khi đó  $y = x - 2\sqrt{x+2} = x + 2 - 2\sqrt{x+2} + 1 - 3 = (\sqrt{x+2} - 1)^2 - 3 \geq -3$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng  $-3$  khi  $\sqrt{x+2} - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ .

🔍 Chọn đáp án **(B)**.....

**Câu 23.** Tìm  $m$  hàm số  $y = \frac{x\sqrt{2}+1}{x^2+2x-m+1}$  có tập xác định là  $\mathbb{R}$

**(A)**  $m \geq 1$ .

**(B)**  $m < 0$ .

**(C)**  $m > 2$ .

**(D)**  $m \leq 3$ .

🔍 Lời giải.

Hàm số có tập xác định là  $\mathbb{R}$  khi  $x^2 + 2x - m + 1 \neq 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

Hay phương trình  $x^2 + 2x - m + 1 = 0$  vô nghiệm  $\Leftrightarrow \Delta = 4 - 4(1-m) < 0 \Leftrightarrow m < 0$ .

🔍 Chọn đáp án **(B)**.....

**Câu 24.** Hàm số nào trong các hàm số sau không là hàm số chẵn ?

**(A)**  $y = \frac{x^2+1}{|2-x|+|2+x|}$ .

**(B)**  $y = |1+2x| + |1-2x|$ .

**(C)**  $y = \sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{2-x} + 5$ .

**(D)**  $y = \sqrt[3]{2-x} - \sqrt[3]{2+x}$ .

🔍 Lời giải.

Xét hàm số  $y = f(x) = \sqrt[3]{2-x} - \sqrt[3]{2+x}$  ta có

☑ Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

☑  $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$ .

☑  $f(-x) = \sqrt[3]{2+x} - \sqrt[3]{2-x} = -(\sqrt[3]{2-x} - \sqrt[3]{2+x}) = -f(x)$ .

☑ Vậy  $f(x)$  là hàm số lẻ.

🔍 Chọn đáp án **(D)**.....

**Câu 25.** Hàm số nào trong các hàm số sau là hàm số lẻ

**(A)**  $y = |x-1| + |x+1|$ .

**(B)**  $y = \frac{x^2+1}{x}$ .

**(C)**  $y = \frac{1}{x^4-2x^2+3}$ .

**(D)**  $y = 1 - 3x + x^3$ .

🔍 Lời giải.

Xét hàm số  $y = f(x) = \frac{x^2+1}{x}$  ta có

- ☑ Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- ☑  $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$ .
- ☑  $f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{(-x)} = -\frac{x^2 + 1}{x} = -f(x), \forall x \in \mathcal{D}$ .
- ☑ Vậy  $f(x)$  là hàm số lẻ.

🔍 Chọn đáp án **(B)**.

**Câu 26 (0D2B1-2).** Hàm số  $y = \sqrt{x^2 - x - 20} + \sqrt{6 - x}$  có tập xác định là

- (A)  $(-\infty; -4) \cup (5; 6]$ . (B)  $(-\infty; -4) \cup (5; 6)$ . (C)  $(-\infty; -4) \cup [5; 6]$ . (D)  $(-\infty; -4) \cup [5; 6)$ .

🔗 Lời giải.

Hàm số xác định khi  $\begin{cases} x^2 - x - 20 \geq 0 \\ 6 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 5)(x + 4) \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases}$

Xét  $(x - 5)(x + 4) \geq 0$ .

- ☑ Trường hợp 1:  $\begin{cases} x - 5 \geq 0 \\ x + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 5$ .
- ☑ Trường hợp 2:  $\begin{cases} x - 5 \leq 0 \\ x + 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -4$ .

Kết hợp điều kiện  $x \leq 6$  ta có tập xác định của hàm số là  $\mathcal{D} = (-\infty; -4) \cup [5; 6]$ .

🔍 Chọn đáp án **(C)**.

**Câu 27.** Hàm số  $y = \sqrt{\frac{x^3}{|x| - 2}}$  có tập xác định là

- (A)  $(-2; 0] \cup (2; +\infty)$ . (B)  $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ .  
(C)  $(-\infty; -2) \cup (0; 2)$ . (D)  $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ .

🔗 Lời giải.

Hàm số xác định khi  $\frac{x^3}{|x| - 2} \geq 0$

- ☑ Trường hợp 1:  $\begin{cases} x^3 \geq 0 \\ |x| - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x > 2 \\ x < -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$ .
- ☑ Trường hợp 2:  $\begin{cases} x^3 \leq 0 \\ |x| - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ -2 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x \leq 0$ .

Vậy tập xác định  $\mathcal{D} = (-2; 0] \cup (2; +\infty)$ .

🔍 Chọn đáp án **(A)**.

**Câu 28.** Cho hàm số  $f(x) = |x + 2| + |x - 2|$  và  $g(x) = x^3 + 5x$ . Khi đó

- (A)  $f(x)$  và  $g(x)$  đều là hàm số lẻ. (B)  $f(x)$  và  $g(x)$  đều là hàm số chẵn.  
(C)  $f(x)$  lẻ,  $g(x)$  chẵn. (D)  $f(x)$  chẵn,  $g(x)$  lẻ.

🔗 Lời giải.

- ☑ Xét hàm số  $f(x) = |x + 2| + |x - 2|$  ta có
  - Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .
  - $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$ .
  - $f(-x) = |-x + 2| + |-x - 2| = |x - 2| + |x + 2| = f(x), \forall x \in \mathcal{D}$ .
  - Vậy  $f(x)$  là hàm số chẵn.
- ☑ Xét hàm số  $g(x) = x^3 + 5x$  ta có
  - Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .
  - $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$ .
  - $g(-x) = (-x)^3 + 5(-x) = -(x^3 + 5x) = -g(x), \forall x \in \mathcal{D}$ .

- Vậy  $g(x)$  là hàm số lẻ.

🔍 Chọn đáp án **D**

**Câu 29.** Trong các hàm số sau, hàm số nào không phải hàm số chẵn

Ⓐ  $y = |x - 5| + |x + 5|$ . Ⓑ  $y = x^4 - x^2 + 12$ . Ⓒ  $y = |1 - x| + |x + 1|$ . Ⓓ  $y = |x^2 - 1| + x$ .

🔍 Lời giải.

Xét hàm số  $y = f(x) = |x^2 - 1| + x$  ta có

- ☑ Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- ☑ Ta có  $f(1) = 1$  mà  $f(-1) = -1$  suy ra  $f(-1) \neq f(1)$ .
- ☑ Vậy  $f(x)$  không phải là hàm số chẵn.

🔍 Chọn đáp án **D**

**Câu 30.** Trong các hàm số sau, hàm số nào giảm trên khoảng  $(0; 1)$ ?

Ⓐ  $y = x^2$ . Ⓑ  $y = x^3$ . Ⓒ  $y = \frac{1}{x}$ . Ⓓ  $y = \sqrt{x}$ .

🔍 Lời giải.

Xét hàm số  $y = \frac{1}{x}$  trên khoảng  $(0; 1)$  ta có

- ☑  $\forall x_1, x_2 \in (0; 1), x_1 \neq x_2$ .
- ☑ Xét  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \left( \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) \cdot \frac{1}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{x_1 x_2} < 0$ .
- ☑ Vậy hàm số  $y = \frac{1}{x}$  giảm trên khoảng  $(0; 1)$ .

🔍 Chọn đáp án **C**

**Câu 31.** Hàm số  $y = x(1 - |x|)$  là hàm số

Ⓐ chẵn. Ⓑ lẻ. Ⓒ không chẵn, không lẻ. Ⓓ vừa chẵn, vừa lẻ.

🔍 Lời giải.

Xét hàm số  $y = f(x) = x(1 - |x|)$  ta có

- ☑ Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .
- ☑  $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$ .
- ☑  $f(-x) = (-x)(1 - |-x|) = -x(1 - |x|) = -f(x)$ .
- ☑ Vậy  $f(x)$  là hàm số lẻ.

🔍 Chọn đáp án **B**

**Câu 32.** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ . Hệ thức nào sai?

Ⓐ  $f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$ . Ⓑ  $f[f(f(x))] = f(x)$ .  
Ⓒ  $f(x+1) = f(x) + 1$ . Ⓓ  $f\left(\frac{1}{x+1}\right) = 1 - \frac{2}{x+2}$ .

🔍 Lời giải.

Xét  $f(x+1) = f(x) + 1$  ta có

- ☑  $f(x+1) = \frac{1-(x+1)}{1+(x+1)} = \frac{-x}{2+x}$ .
- ☑  $f(x) + 1 = \frac{1-x}{1+x} + 1 = \frac{2}{1+x}$ .
- ☑ Vậy  $f(x+1) \neq f(x) + 1$  hay khẳng định  $f(x+1) = f(x) + 1$  là sai.

Chọn đáp án **C**.

**Câu 33.** Cho  $(P) : y = x^2 - 4x + 3$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; 4)$ . (B) Hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; 4)$ .  
(C) Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; 2)$ . (D) Hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; 2)$ .

**Lời giải.**

Ta có parabol  $y = x^2 - 4x + 3$  có đỉnh  $I(2; -1)$ . Bảng biến thiên như sau

|     |           |      |           |
|-----|-----------|------|-----------|
| $x$ | $-\infty$ | $2$  | $+\infty$ |
| $y$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; 2)$ .

Chọn đáp án **D**.

**Câu 34.** Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đi qua điểm  $M(1; 3)$  và trục đối xứng  $x = 3$ ?

- (A)  $y = -x^2 + 6x$ . (B)  $y = x^2 + 3x - 1$ . (C)  $y = x^2 + 2x - 2$ . (D)  $y = -x^2 + 6x - 2$ .

**Lời giải.**

Ta thấy điểm  $M(1; 3)$  không thuộc hàm số  $y = -x^2 + 6x$  nên loại đáp án  $y = -x^2 + 6x$ .

Hàm số  $y = x^2 + 3x - 1$  có trục đối xứng  $x = -\frac{3}{2}$  nên ta loại đáp án  $y = x^2 + 3x - 1$ .

Ta thấy điểm  $M(1; 3)$  không thuộc hàm số  $y = x^2 + 2x - 2$  nên loại đáp án  $y = x^2 + 2x - 2$ .

Hàm số  $y = -x^2 + 6x - 2$  đi qua điểm  $M(1; 3)$  và có trục đối xứng  $x = 3$ .

Chọn đáp án **D**.

**Câu 35.** Cho hàm số  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) có đồ thị  $(P)$ . Khi đó, tọa độ đỉnh của  $(P)$  là

- (A)  $I\left(-\frac{b}{2a}; \frac{\Delta}{4a}\right)$ . (B)  $I\left(-\frac{b}{a}; -\frac{\Delta}{a}\right)$ . (C)  $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ . (D)  $I\left(\frac{b}{2a}; \frac{\Delta}{2a}\right)$ .

**Lời giải.**

Công thức tính tọa độ đỉnh của parabol  $(P) : y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) là  $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ .

Chọn đáp án **C**.

**Câu 36.** Cho hàm số  $y = x^2 - 2x$  có đồ thị  $(P)$ . Tọa độ đỉnh của  $(P)$  là

- (A)  $(0; 0)$ . (B)  $(1; -1)$ . (C)  $(-1; 3)$ . (D)  $(2; 0)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $(P) : y = x^2 - 2x$  có tọa độ đỉnh là  $x = \frac{-b}{2a} \Leftrightarrow x = 1$ . Với  $x = 1 \Rightarrow y = -1$ .

Vậy tọa độ đỉnh của  $(P) : y = x^2 - 2x$  là  $(1; -1)$ .

Chọn đáp án **B**.

**Câu 37.** Cho hàm số  $y = 2x^2 + 6x + 3$  có đồ thị  $(P)$ . Trục đối xứng của  $(P)$  là

- (A)  $x = -\frac{3}{2}$ . (B)  $y = -\frac{3}{2}$ . (C)  $x = 2$ . (D)  $x = -2$ .

**Lời giải.**

Trục đối xứng của  $(P) : 2x^2 + 6x + 3$  là  $x = -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$ .

Chọn đáp án **B**.

**Câu 38.** Cho hàm số  $y = x^2 + 2x - 3$  có đồ thị là parabol  $(P)$ . Trục đối xứng của  $(P)$  là

- (A)  $x = -1$ . (B)  $x = 1$ . (C)  $x = 2$ . (D)  $x = -2$ .

**Lời giải.**

Trục đối xứng của  $(P) : x^2 + 2x - 3$  là  $x = -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow x = -1$ .

Chọn đáp án **A**.

**Câu 39.** Parabol  $y = 2x^2 + x + 2$  có đỉnh là

- (A)  $I\left(\frac{1}{4}; \frac{19}{8}\right)$ . (B)  $I\left(-\frac{1}{4}; \frac{15}{8}\right)$ . (C)  $I\left(\frac{1}{4}; \frac{15}{8}\right)$ . (D)  $I\left(-\frac{1}{4}; -\frac{15}{8}\right)$ .

**Lời giải.**

Công thức tọa độ đỉnh của Parabol  $y = 2x^2 + x + 2$  là  $I\left(-\frac{1}{4}; \frac{15}{8}\right)$ .

🔍 Chọn đáp án (B).....

**Câu 40.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^2 + 2x + 3$  bằng

(A) 3.

(B) 5.

(C) 4.

(D) 2.

🔍 Lời giải.

Hàm số  $y = x^2 + 2x + 3$  là một parabol có đỉnh  $I(-1; 2)$ . Bảng biến thiên như sau

|     |           |      |           |
|-----|-----------|------|-----------|
| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
| $y$ | $+\infty$ | $2$  | $+\infty$ |

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^2 + 2x + 3$  là  $y = 2$ .

🔍 Chọn đáp án (D).....

**Câu 41.** Đồ thị hàm số  $y = -x^2 + 2x + 3$  cắt trục hoành tại mấy điểm?

(A) 0.

(B) 1.

(C) 3.

(D) 2.

🔍 Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hàm số  $y = -x^2 + 2x + 3$  và trục  $Ox$  là

$$-x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3. \end{cases}$$

Vậy đồ thị hàm số  $y = -x^2 + 2x + 3$  cắt trục hoành tại hai điểm.

🔍 Chọn đáp án (D).....

**Câu 42.** Cho hàm số  $y = x^2 - 4x + 7$ . Chọn khẳng định đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

(B) Hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

(C) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .

(D) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$ .

🔍 Lời giải.

Ta có đồ thị hàm số  $y = x^2 - 4x + 7$  là một parabol có đỉnh  $I(2; 3)$ . Bảng biến thiên như sau

|     |           |     |           |
|-----|-----------|-----|-----------|
| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
| $y$ | $+\infty$ | $3$ | $+\infty$ |

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .

🔍 Chọn đáp án (C).....

**Câu 43.** Parabol  $y = 2x^2 + 3x + 1$  nhận đường thẳng

(A)  $x = \frac{3}{2}$  làm trục đối xứng.

(B)  $x = -\frac{3}{4}$  làm trục đối xứng.

(C)  $x = -\frac{3}{2}$  làm trục đối xứng.

(D)  $x = \frac{3}{4}$  làm trục đối xứng.

🔍 Lời giải.

Parabol  $y = 2x^2 + 3x + 1$  có trục đối xứng là đường thẳng  $x = -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}$ .

🔍 Chọn đáp án (B).....

**Câu 44.** Parabol  $y = x^2 - 4x + 4$  có đỉnh là

(A)  $I(1; 1)$ .

(B)  $I(2; 0)$ .

(C)  $I(-1; 1)$ .

(D)  $I(-1; 2)$ .

🔍 Lời giải.

Tọa độ đỉnh của parabol  $y = x^2 - 4x + 4$  là  $I(2; 0)$ .

🔍 Chọn đáp án (B).....

**Câu 45.** Cho hàm số  $y = x^2 - 2x + 2$ . Mệnh đề nào sau đây là sai?

(A)  $y$  tăng trên  $(1; +\infty)$ .

(B)  $y$  giảm trên  $(1; +\infty)$ .

(C)  $y$  giảm trên  $(-\infty; 1)$ .

(D)  $y$  tăng trên  $(3; +\infty)$ .

🔍 Lời giải.

Hàm số  $y = x^2 - 2x + 2$  là một parabol có đỉnh  $I(1; 1)$ . Bảng biến thiên như sau

|     |           |   |           |
|-----|-----------|---|-----------|
| $x$ | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
| $y$ | $+\infty$ | 1 | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy mệnh đề sai là  $y$  giảm trên  $(1; +\infty)$ .

☞ Chọn đáp án **(B)**.

**Câu 46.** Hàm số nào sau đây nghịch biến trong khoảng  $(-\infty; 0)$ ?

**(A)**  $y = \sqrt{2}x^2 + 1$ .

**(B)**  $y = -\sqrt{2}x^2 + 1$ .

**(C)**  $y = \sqrt{2}(x+1)^2$ .

**(D)**  $y = -\sqrt{2}(x+1)^2$ .

☞ **Lời giải.**

Xét  $y = \sqrt{2}x^2 + 1$ , đồ thị hàm số là một parabol có trục đối xứng là  $x = 0$ . Vì hệ số  $a = \sqrt{2} > 0$  nên hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .

☞ Chọn đáp án **(A)**.

**Câu 47.** Hàm số nào sau đây đồng biến trong khoảng  $(-1; +\infty)$ ?

**(A)**  $y = \sqrt{2}x^2 + 1$ .

**(B)**  $y = -\sqrt{2}x^2 + 1$ .

**(C)**  $y = \sqrt{2}(x+1)^2$ .

**(D)**  $y = -\sqrt{2}(x+1)^2$ .

☞ **Lời giải.**

Ta chọn đáp án C vì hàm số  $y = \sqrt{2}(x+1)^2 = \sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}x + \sqrt{2}$  có hoành độ đỉnh là  $x = -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow x = -\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = -1$  và  $a = \sqrt{2} > 0$ .

Nên hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; -1)$  và hàm số đồng biến trên  $(-1; +\infty)$ .

☞ Chọn đáp án **(C)**.

**Câu 48.** Cho hàm số  $y = x^2 - 2x + 3$ . Trong mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng?

**(A)**  $y$  tăng trên  $(0; +\infty)$ .

**(B)**  $y$  giảm trên  $(-\infty; 1)$ .

**(C)** Đồ thị  $y$  có đỉnh  $I(1; 0)$ .

**(D)**  $y$  tăng trên  $(-1; +\infty)$ .

☞ **Lời giải.**

Hàm số  $y = x^2 - 2x + 3$  ( $a = 1, b = -2, c = 3$ ) có Đỉnh là  $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow I(1; -2)$ .

Do  $a = 1 > 0$  nên hàm số giảm trên  $(-\infty; 1)$  và tăng trên  $(1; +\infty)$ .

☞ Chọn đáp án **(B)**.

**Câu 49.** Tìm tập xác định của hàm số  $y = x^2 - 2x + 1$  là

**(A)**  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

**(B)**  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

**(C)**  $\mathcal{D} = (-\infty; 1)$ .

**(D)**  $\mathcal{D} = (1; +\infty)$ .

☞ **Lời giải.**

Đây là hàm số bậc hai nên tập xác định của hàm số là  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

☞ Chọn đáp án **(A)**.

**Câu 50.** Cho  $(P): y = x^2 - 2x + 3$ . Tìm mệnh đề đúng?

**(A)** Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; 1)$ .

**(B)** Hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; 1)$ .

**(C)** Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; 2)$ .

**(D)** Hàm số nghịch biến  $(-\infty; 2)$ .

☞ **Lời giải.**

Hàm số  $y = x^2 - 2x + 3$  ( $a = 1, b = -2, c = 3$ ) có

Hoành độ đỉnh là  $x = -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow x = 1$  và  $a = 1 > 0$ .

Nên hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; 1)$  và đồng biến trên  $(1; +\infty)$ .

☞ Chọn đáp án **(B)**.

**Câu 51.** Cho hàm số  $y = 2x^2 - x + 3$ , điểm nào thuộc đồ thị hàm số

**(A)**  $M(2; 1)$ .

**(B)**  $M(-1; 1)$ .

**(C)**  $M(2; 3)$ .

**(D)**  $M(0; 3)$ .

☞ **Lời giải.**

Ta chọn đáp án D vì khi thay hoành độ và tung độ vào công thức hàm số ta có  $3 = 2(0)^2 - 0 + 3 = 3$  thỏa.

☞ Chọn đáp án **(D)**.

**Câu 52.** Parabol  $y = x^2 - 4x + 4$  có đỉnh là

**(A)**  $I(1; 1)$ .

**(B)**  $I(2; 0)$ .

**(C)**  $I(-1; 1)$ .

**(D)**  $I(-1; 2)$ .

☞ **Lời giải.**

Ta có đỉnh của parabol  $y = x^2 - 4x + 4$  là  $I(2; 0)$ .

☞ Chọn đáp án **(B)**.

**Câu 53.** Cho  $(P): y = x^2 - 4x + 3$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; 4)$ .

(B) Hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; 4)$ .

(C) Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; 2)$ .

(D) Hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; 2)$ .

**Lời giải.**

Hàm số  $y = x^2 - 4x + 3$  ( $a = 1, b = -4, c = 3$ ) có

Hoành độ đỉnh là  $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} \Leftrightarrow x = 2$  và  $a = 1 > 0$ .

Nên hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; 2)$  và đồng biến trên  $(2; +\infty)$ .

**Chọn đáp án (D).**

**Câu 54.** Parabol  $y = x^2 - 3x + 2$  có đỉnh  $I$  và cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt  $M, N$ . Tính diện tích  $S$  của tam giác  $IMN$ ?

(A)  $S = 1$ .

(B)  $S = \frac{1}{5}$ .

(C)  $S = \frac{1}{8}$ .

(D)  $S = \frac{1}{4}$ .

**Lời giải.**

Hàm số  $y = x^2 - 3x + 2$  ( $a = 1, b = -3, c = 2$ ) có Đỉnh là  $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow I\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$ .

Phương trình hoành độ giao điểm của  $(P)$  và trục hoành là  $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ .

Vậy tọa độ hai điểm là  $M(1; 0)$  và  $N(2; 0) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (1; 0) \Rightarrow MN = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ .

Gọi  $K$  là trung điểm của  $M$  và  $N$ , ta có  $K\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ .

Ta có  $\overrightarrow{IK} = \left(0; \frac{1}{4}\right) \Rightarrow IK = \frac{1}{4}$  và  $\overrightarrow{IK} \cdot \vec{i} = 0 \Rightarrow IK \perp Ox$ .

Do đó diện tích tam giác  $IMN$  là  $S = \frac{1}{2} \cdot IK \cdot MN = \frac{1}{8}$ .

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 55.** Parabol  $(P): y = ax^2 + bx + c$  đạt cực tiểu bằng 4 tại  $x = 2$  và đồ thị đi qua điểm  $A(0; 6)$ . Tính giá trị biểu thức  $P = 2a - b + c$ .

(A)  $P = 0$ .

(B)  $P = -3$ .

(C)  $P = 5$ .

(D)  $P = 9$ .

**Lời giải.**

Đồ thị hàm số qua  $A(0; 6)$  nên  $c = 6$ .

Hàm số đạt cực tiểu do đó  $a > 0$ , giá trị cực tiểu bằng 4 nên ta có

$$-\frac{\Delta}{4a} = 4 \Rightarrow b^2 - 4ac = -16a \Rightarrow b^2 = 8a \quad (1)$$

$$\text{và đạt tại } x = 2 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \begin{cases} b^2 = 8a \\ b = -4a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16a^2 = 8a \\ b = -4a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \end{cases} \quad (\text{do } a > 0)$$

$$\text{Vậy } P = 2 \cdot \frac{1}{2} - (-2) + 6 = 9.$$

**Chọn đáp án (D).**

**Câu 56.** Tính khoảng cách  $d$  ngắn nhất từ đỉnh  $I$  của parabol  $y = 3x^2 - 6mx + 4m^2 - 2m + 4$  đến trục  $Ox$ .

(A)  $d = 1$ .

(B)  $d = 2$ .

(C)  $d = 3$ .

(D)  $d = 4$ .

**Lời giải.**

Đỉnh của đồ thị hàm số  $y = 3x^2 - 6mx + 4m^2 - 2m + 4$  là  $I(m; m^2 - 2m + 4)$ .

Khoảng cách từ  $I$  đến  $Ox$  là

$$d(I, Ox) = |y_I| = |m^2 - 2m + 4| = |(m - 1)^2 + 3| \geq |(m - 1)^2 + 3| \geq |3| = 3.$$

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 57.** Tính khoảng cách  $d$  ngắn nhất từ đỉnh  $I$  của parabol  $y = x^2 - 4mx + 3m^2 - 4m - 2$  đến trục  $Ox$ .

(A)  $d = 1$ .

(B)  $d = 2$ .

(C)  $d = 3$ .

(D)  $d = 4$ .

**Lời giải.**

Đỉnh của đồ thị hàm số  $y = x^2 - 4mx + 3m^2 - 4m - 2$  là  $I(2m; -m^2 - 4m - 2)$ .

Khoảng cách từ  $I$  đến  $Ox$  là

$$d(I, Ox) = |y_I| = |-m^2 - 4m - 2| = m^2 + 4m + 2 \geq |(m - 1)^2 + 3| \geq |3| = 3.$$

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 58.** Hàm số  $y = x^2 - 4mx - 2x + 13m + \sqrt{5}$  luôn đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- Ⓐ  $(m^2 + 4m + 4; +\infty)$ . Ⓑ  $(m^2 - 3m + 1; +\infty)$ . Ⓒ  $(m^2 - m + 2; +\infty)$ . Ⓓ  $(m^2 + m + 2; +\infty)$ .

🔗 **Lời giải.**

Hàm số  $y = x^2 - 4mx - 2x + 13m + \sqrt{5}$  ( $a = 1, b = -4m - 2, c = 13m + \sqrt{5}$ ) có

Hoành độ đỉnh là  $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4m-2}{2} \Leftrightarrow x = 2m + 1$  và  $a = 1 > 0$ .

Nên hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; 2m + 1)$  và đồng biến trên  $(2m + 1; +\infty)$ .

Chọn A vì ta thấy với  $m$  bất kì thì

$$(m + 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (m + 1)^2 + 2 \geq 2 > 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m + 3 > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 > 2m + 1.$$

Do đó  $(m^2 + 4m + 4; +\infty) \subset (2m + 1; +\infty)$  nên hàm số luôn đồng biến trên  $(m^2 + 4m + 4; +\infty)$ .

🔗 Chọn đáp án Ⓐ.

**Câu 59.** Tìm  $m$  để hàm số  $y = -x^2 - 4mx + 4m - 9$  nghịch biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .

- Ⓐ  $m \leq 2$ . Ⓑ  $m \geq -1$ . Ⓒ  $m > 1$ . Ⓓ  $m < 1$ .

🔗 **Lời giải.**

Hàm số  $y = -x^2 - 4mx + 4m - 9$  ( $a = -1, b = -4m, c = 4m - 9$ ) có

Hoành độ đỉnh là  $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4m}{-2} \Leftrightarrow x = -2m$  và  $a = -1 < 0$ .

Nên hàm số đồng biến trên  $(-\infty; -2m)$  và nghịch biến trên  $(-2m; +\infty)$ .

Điều kiện để hàm số nghịch biến trên  $(2; +\infty)$  là  $(2; +\infty) \subset (-2m; +\infty)$  nghĩa là  $-2m \leq 2 \Leftrightarrow m \geq -1$ .

🔗 Chọn đáp án Ⓑ.

**Câu 60.** Tìm giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = -x^2 + 8x + 5m - 24$  có giá trị lớn nhất trên đoạn  $[1; 6]$  bằng  $-1$

- Ⓐ  $m = 1,5$ . Ⓑ  $m = 2,5$ . Ⓒ  $m = 1,4$ . Ⓓ  $m = 5$ .

🔗 **Lời giải.**

Ta có hàm số  $y = -x^2 + 8x + 5m - 24$  ( $a = -1, b = 8, c = 5m - 24$ ) có

Hoành độ đỉnh là  $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{-2} \Leftrightarrow x = 4$  và  $a = -1 < 0$ .

Ta có  $x = 4 \in [1; 6]$  nên hàm số có giá trị lớn nhất trên khoảng  $[1; 6]$  đạt tại  $x = 4$ .

Do giá trị lớn nhất là  $-1$  nên  $-1 = -(4)^2 + 8 \cdot 4 + 5m - 24 \Leftrightarrow m = 1,4$ .

🔗 Chọn đáp án Ⓐ.

**Câu 61.** Cho hàm số  $y = -x^2 + 5x - 4$ . Hàm số có bảng biến thiên nào sau đây?

Ⓐ

|     |           |                |           |
|-----|-----------|----------------|-----------|
| $x$ | $-\infty$ | $\frac{5}{2}$  | $+\infty$ |
| $y$ | $-\infty$ | $-\frac{9}{4}$ | $-\infty$ |

Ⓑ

|     |           |                |           |
|-----|-----------|----------------|-----------|
| $x$ | $-\infty$ | $\frac{5}{2}$  | $+\infty$ |
| $y$ | $+\infty$ | $-\frac{9}{4}$ | $+\infty$ |

Ⓒ

|     |           |               |           |
|-----|-----------|---------------|-----------|
| $x$ | $-\infty$ | $\frac{5}{2}$ | $+\infty$ |
| $y$ | $+\infty$ | $\frac{9}{4}$ | $+\infty$ |

Ⓓ

|     |           |               |           |
|-----|-----------|---------------|-----------|
| $x$ | $-\infty$ | $\frac{5}{2}$ | $+\infty$ |
| $y$ | $-\infty$ | $\frac{9}{4}$ | $-\infty$ |

🔗 **Lời giải.**

Hàm số  $y = -x^2 + 5x - 4$  ( $a = -1, b = 5, c = -4$ ) có

Hoành độ đỉnh là  $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{9}{4}$  và  $a = -1 < 0$ .

Nên hàm số đồng biến trên  $(-\infty; \frac{5}{2})$  và nghịch biến trên  $(\frac{5}{2}; +\infty)$ .

🔗 Chọn đáp án Ⓓ.

**Câu 62.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x) = 4x^2 - 4mx + m^2 - 2m$  trên đoạn  $[-2; 0]$  bằng 3. Tính tổng  $T$  các phần tử của  $S$ .

- Ⓐ  $T = -\frac{3}{2}$ . Ⓑ  $T = \frac{1}{2}$ . Ⓒ  $T = \frac{9}{2}$ . Ⓓ  $T = \frac{3}{2}$ .

🔗 **Lời giải.**

Ta có hàm số  $y = 4x^2 - 4mx + m^2 - 2m$  ( $a = 4, b = -4m, c = m^2 - 2m$ ) có

Hoành độ đỉnh là  $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4m}{8} \Leftrightarrow x = \frac{m}{2}$  và  $a = 4 > 0$ . Ta có các trường hợp sau

☑ Nếu  $\frac{m}{2} < -2 \Leftrightarrow m < -4$  thì giá trị nhỏ nhất của hàm số đạt tại  $x = -2$ .

Khi đó, ta có  $3 = 4(-2)^2 - 4 \cdot m \cdot (-2) + m^2 - 2m \Leftrightarrow 16 + 8m + m^2 - 2m = 3 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 13 = 0$  (phương trình vô nghiệm).

Do đó loại trường hợp này.

☑ Nếu  $x = \frac{m}{2} \in [-2; 0] \Leftrightarrow -2 \leq \frac{m}{2} \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 0$  thì giá trị nhỏ nhất của hàm số đạt tại  $x = \frac{m}{2}$ .

Khi đó, ta có  $3 = 4\left(\frac{m}{2}\right)^2 - 4 \cdot m \cdot \frac{m}{2} + m^2 - 2m \Leftrightarrow -2m = 3 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$  (nhận).

☑ Nếu  $\frac{m}{2} > 0 \Leftrightarrow m > 0$  thì giá trị nhỏ nhất của hàm số đạt tại  $x = 0$ .

Khi đó, ta có  $3 = 4(0)^2 - 4 \cdot m \cdot 0 + m^2 - 2m \Leftrightarrow m^2 - 2m = 3 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \text{ (loại)} \\ m = 3 \text{ (nhận)} \end{cases}$

Vậy  $T = -\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2}$ .

🔍 Chọn đáp án **A**.

**Câu 63.**

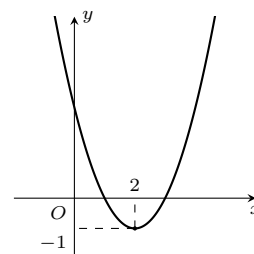
Cho hàm số  $f(x) = ax^2 + bx + c$  đồ thị như hình bên. Hỏi với những giá trị nào của tham số thực  $m$  thì phương trình  $|f(x)| = m$  có đúng 4 nghiệm thực phân biệt.

**A**  $0 < m < 1$ .

**B**  $m > 3$ .

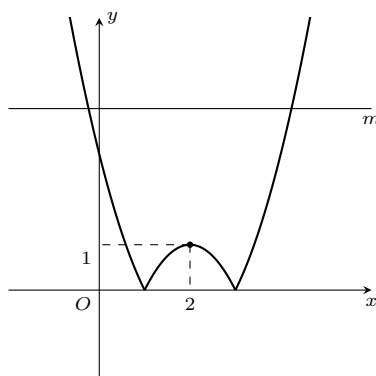
**C**  $m = -1, m = 3$ .

**D**  $-1 < m < 0$ .



🔍 **Lời giải.**

Ta có đồ thị của  $y = |f(x)|$  và đường thẳng  $y = m$  như sau



Rõ ràng, dựa vào đồ thị ta thấy  $0 < m < 1$  thì phương trình  $|f(x)| = m$  có 4 nghiệm.

🔍 Chọn đáp án **A**.

**Câu 64.** Cho  $(P): y = x^2 - 4x + 3$  và đường thẳng  $d: y = mx + 3$ . Tìm tất cả các giá trị thực của  $m$  để  $d$  cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  sao cho diện tích tam giác  $OAB$  bằng  $\frac{9}{2}$

**A**  $m = 7$ .

**B**  $m = -7$ .

**C**  $m = 1, m = -7$ .

**D**  $m = -1$ .

🔍 **Lời giải.**

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của  $(P)$  và  $(d)$  là

$$x^2 - 4x + 3 = mx + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m + 4 \quad (m \neq -4). \end{cases}$$

Suy ra  $A(0, 3), B(m + 4, m^2 + 4m + 3)$  là tọa độ giao điểm của đồ thị  $(P)$  và  $(d)$ .

Suy ra  $\overrightarrow{AB} = (m + 4, m^2 + 4m + 3)$ . Mặt khác  $S_{\triangle OAB} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot |m + 4| = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -7. \end{cases}$

🔍 Chọn đáp án **C**.



# PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

## §1 ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

### A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1 PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

Khái niệm **phương trình** thực ra đã có trong chương trình toán bậc THCS, bài này chỉ muốn trình bày lại theo cách nhìn của khái niệm **mệnh đề chứa biến**.

- ☑ Cho hai biểu thức  $f(x)$  và  $g(x)$ . **Mệnh đề chứa biến**  $f(x) = g(x)$  gọi là **phương trình một ẩn**.
- ☑  $x$  gọi là **ẩn số** (hay gọi tắt là **ẩn**).
- ☑  $f(x)$  gọi là **vế trái**,  $g(x)$  gọi là **vế phải**.
- ☑ Nếu có một số thực  $x_0$  sao cho  $f(x_0) = g(x_0)$  là mệnh đề đúng thì  $x_0$  gọi là một nghiệm của phương trình.
- ☑ Tập hợp tất cả các nghiệm của một phương trình gọi là tập nghiệm của phương trình đó.
- ☑ Giải phương trình là tìm tất cả các nghiệm của phương trình đó, nghĩa là tìm tập nghiệm của phương trình.
- ☑ Nếu phương trình không có nghiệm nào thì ta nói phương trình vô nghiệm (hoặc có tập nghiệm là **rỗng**).

 **Ví dụ 1.** Mệnh đề chứa biến  $x(x - 2) = 2x - 3$  là phương trình một ẩn.

- ☑ Với  $x = 3$  thế vào phương trình ta được  $3(3 - 2) = 2 \cdot 3 - 3 \Leftrightarrow 3 = 3$  là một mệnh đề đúng, do đó  $x = 3$  là một nghiệm của phương trình.
- ☑ Với  $x = 4$  thế vào phương trình ta được  $4(4 - 2) = 2 \cdot 4 - 3 \Leftrightarrow 8 = 5$  là một mệnh đề sai, nên  $x = 4$  không là nghiệm của phương trình.

#### 2 PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG VÀ PHƯƠNG TRÌNH HỆ QUẢ

Cho hai phương trình  $f(x) = g(x)$  (1) có tập nghiệm  $S_1$  và  $h(x) = k(x)$  (2) có tập nghiệm  $S_2$ .

- ☑ Nếu tập nghiệm  $S_1, S_2$  bằng nhau thì ta gọi (1) và (2) là hai phương trình tương đương. Kí hiệu

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow h(x) = k(x).$$

- ☑ Nếu  $S_1 \subset S_2$  thì ta gọi (2) là phương trình hệ quả của phương trình (1). Kí hiệu  $f(x) = g(x) \Rightarrow h(x) = k(x)$ .

Ở phương trình hệ quả có thể xuất hiện khả năng có 1 giá trị  $x_0 \in S_2$  nhưng  $x_0 \notin S_1$  (Nghĩa là  $x_0$  là nghiệm của (2) nhưng không là nghiệm của (1)). Ta gọi  $x_0$  là nghiệm ngoại lai.

#### 3 PHÉP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

Nếu thực hiện các phép biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện của nó thì ta được một phương trình mới tương đương (gọi là phép biến đổi tương đương).

- ① Cộng hay trừ hai vế cùng một số hoặc cùng một biểu thức.
- ② Nhân hoặc chia hai vế với cùng một số khác 0 hoặc với cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0.

## B PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- ☑ Phương trình đóng vai trò quan trọng trong chương trình toán bậc THPT. Do đó việc nắm vững các phép biến đổi là cần thiết.
- ☑ Các phép biến đổi không làm thay đổi tập nghiệm của phương trình gọi là **phép biến đổi tương đương**.
- ☑ Việc đặt điều kiện để được phép biến đổi tương đương đòi hỏi sự linh hoạt và nắm được bản chất vấn đề "**Không làm thay đổi tập nghiệm của phương trình**".
- ☑ Nếu chưa nắm rõ khi nào cần hoặc không cần đặt điều kiện cho phương trình, thì tốt hơn cả là cứ đặt điều kiện để an tâm.
- ☑ Nếu chưa thực sự biết một phép biến đổi nào đó có tương đương không, thì nên biến đổi thành phương trình hệ quả, sau đó thử các giá trị ẩn số tìm được vào phương trình đã cho để kết luận tập nghiệm của phương trình.
- ☑ Sau cùng, không được sử dụng tùy tiện các kí hiệu " $\Rightarrow$ " hoặc " $\Leftarrow$ " hoặc " $\Leftrightarrow$ " hoặc "để trống" trong các phép biến đổi phương trình này thành phương trình kia.

 **Ví dụ 1.** Giải phương trình  $\frac{x^2 - x - 4}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1}$ .

 **Lời giải.**

### Phân tích lời giải

Vài cách trình bày câu trả

① Ta có

$$\square \quad x^2 - x - 4 = x - 1 \Leftrightarrow \dots$$



Phương trình nào tương đương với  $x^2 - x - 4 = x - 1$ ?

② Ta có  $\frac{x^2 - x - 4}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2 - x - 4 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$  hay  $x = -1$ .

Sử dụng " $\Leftrightarrow$ ", " $\Rightarrow$ " tùy tiện.

③ Ta có:  $\frac{x^2 - x - 4}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2 - x - 4 = x - 1$

$$\square \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } x = 3$$



Tại sao lại "để trống"?

④ Điều kiện:  $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ .

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 4}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2 - x - 4 = x - 1$$



Quá sai lầm!

### Cách giải đúng

**Cách 1:** Không đặt điều kiện và sử dụng phép biến đổi hệ quả

☑ Ta có

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - x - 4}{\sqrt{x-1}} &= \sqrt{x-1} \Rightarrow x^2 - x - 4 = x - 1 \\ &\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \\ &\Rightarrow x = -1 \text{ hay } x = 3.\end{aligned}$$

☑ Thử lại

- Với  $x = -1$  phương trình đã cho trở thành  $\frac{1+1-4}{\sqrt{-2}} = \sqrt{-2}$  không thỏa vì  $\sqrt{-2}$  không tồn tại.
- Với  $x = 3$  phương trình đã cho trở thành  $\frac{9-3-4}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \sqrt{2}$  thỏa.

☑ Vậy phương trình có một nghiệm  $x = 3$ .

**Cách 2:** Đặt điều kiện và sử dụng phép biến đổi **tương đương**.

☑ Điều kiện  $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ .

☑ Ta có

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - x - 4}{\sqrt{x-1}} &= \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2 - x - 4 = x - 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } x = 3.\end{aligned}$$

☑ So với điều kiện  $x > 1$ , phương trình đã cho có một nghiệm  $x = 3$ .

## C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Giải phương trình sau

a.  $\frac{x^2 - 3x - 3}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

b.  $\frac{x^2 - 5x - 3}{\sqrt{x-3}} = \sqrt{x-3}$

c.  $\frac{2x}{x+1} - \frac{2x-5}{x-1} = \frac{4}{x^2-1}$

d.  $1 + \frac{1-2x}{x^2+x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}$

**Lời giải.**

- a. Điều kiện  $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$  Khi đó  
Ta có

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 3x - 3}{\sqrt{x-1}} &= \frac{1}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow x^2 - 3x - 3 = 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } x = 4.\end{aligned}$$

So với điều kiện  $x > 1$ , phương trình đã cho có một nghiệm  $x = 4$ .

- b. Điều kiện  $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$  Khi đó  
Ta có

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 5x - 3}{\sqrt{x-3}} &= \sqrt{x-3} \Leftrightarrow x^2 - 5x - 3 = x - 3 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x = 6.\end{aligned}$$

So với điều kiện  $x > 3$ , phương trình đã cho có một nghiệm  $x = 6$ .

c. Điều kiện  $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$  Khi đó

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{2x}{x+1} - \frac{2x-5}{x-1} &= \frac{4}{x^2-1} \Leftrightarrow 2x(x-1) - (2x-5)(x+1) = 4 \\ &\Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1.\end{aligned}$$

So với điều kiện  $x \neq \pm 1$ , phương trình đã cho vô nghiệm.

d. Điều kiện  $x^2 + x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$  và  $x \neq -1$  Khi đó

Ta có

$$\begin{aligned}1 + \frac{1-2x}{x^2+x} &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2+x+1-2x = x+x+1 \\ &\Leftrightarrow x^2-3x=0 \\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ hay } x=3.\end{aligned}$$

So với điều kiện  $x \neq 0$  và  $x \neq -1$ , phương trình đã cho có một nghiệm  $x=3$ .

### Bài đọc thêm

#### 1 ĐIỀU KIỆN CỦA MỘT PHƯƠNG TRÌNH

Thực ra, việc tìm điều kiện của một phương trình không đơn giản như tìm tập xác định của hàm số, hoặc tìm điều kiện của ẩn số  $x$  để các vế của phương trình có nghĩa, nó còn mang ý nghĩa rộng hơn, đó là tìm điều kiện để trong phương trình dấu "=" có thể xảy ra được, và đôi khi cũng không nhất thiết phải tìm cho đến điều kiện của ẩn số  $x$ , điều này đòi hỏi sự linh hoạt. Ta xem các ví dụ sau

 **Ví dụ 1.** Tìm điều kiện của phương trình  $\frac{x-3}{x-2} = x+1$ .

#### Lời giải.

Điều kiện  $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ .

 **Ví dụ 2.** Tìm điều kiện của phương trình  $\sqrt{x-1} = -x^3 + x^2 - x + 1$ .

#### Lời giải.

☑ Biểu thức trong căn không âm nên ta có điều kiện của phương trình là  $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ . (a)

☑ Mặt khác, với  $x \geq 1$  thì vế trái của phương trình không âm, nên để dấu "=" trong phương trình có thể xảy ra, ta có thêm điều kiện vế phải của phương trình cũng không âm, nghĩa là

$$\begin{aligned}-x^3 + x^2 - x + 1 \geq 0 &\Leftrightarrow -x^3 - x + x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -x(x^2+1) + (x^2+1) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2+1)(-x+1) \geq 0 \Leftrightarrow -x+1 \geq 0 \text{ (vì } (x^2+1) > 0) \Leftrightarrow x \leq 1. \text{ (b)}\end{aligned}$$

☑ Hai điều kiện (a) và (b) cho điều kiện chung của phương trình là  $x=1$ .

(Hơn nữa nhận thấy  $x=1$  là nghiệm của phương trình, nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $x=1$ .)

 **Ví dụ 3.** Tìm điều kiện của phương trình  $\sqrt{(x-1)^2(-x-3)} + \sqrt{x+2} = \sqrt{3}$ .

#### Lời giải.

Lời giải sai:

Điều kiện:

$$\begin{cases} (x-1)^2(-x-3) \geq 0 & (*) \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-3 \geq 0 \text{ (vì } (x-1)^2 \geq 0) \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

(Nghĩa là phương trình vô nghiệm)

Nhận xét Sai lầm ở biến đổi điều kiện (\*)  $A.B \geq 0$ .

- ☉ Trong Ví dụ 2.  $A = (x^2 + 1) > 0$  và  $B = -x + 1$  nên  
 $A \cdot B \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1) \cdot (-x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow -x + 1 \geq 0$  là **ĐÚNG**.
- ☉ Trong Ví dụ 3.  $A = (x - 1)^2 \geq 0$  và  $B = -x - 3$  nên  
 $A \cdot B \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \cdot (-x - 3) \geq 0 \Leftrightarrow -x - 3 \geq 0$  là **SAI**.

!

$$A^2 \cdot B \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 = 0 \\ B \text{ có nghĩa} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} B \geq 0 \\ A \text{ có nghĩa} \end{cases}.$$

Lời giải đúng.

Điều kiện

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (x - 1)^2(-x - 3) \geq 0 & (*) \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 = 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} -x - 3 \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 1 \\ x \geq -2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Vậy điều kiện của phương trình là  $x = 1$ .(Hơn nữa nhận thấy  $x = 1$  là nghiệm của phương trình, nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $x = 1$ .)

🧩 Ví dụ 4. Xét phương trình  $\frac{x^3 + 2x - 3}{x^3 - x + \sqrt{x - 1}} = 1$ .

🔗 Lời giải.

Điều kiện của phương trình là  $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^3 - x + \sqrt{x - 1} \neq 0. \end{cases} \quad (*)$

Việc giải điều kiện (\*) còn phức tạp hơn việc giải phương trình đã cho. Do vậy không cần thiết phải giải điều kiện (\*), hãy để nguyên điều kiện này và giải phương trình để tìm giá trị của  $x$ , sau đó xem những giá trị  $x$  nào thỏa điều kiện (\*) thì giá trị đó là nghiệm của phương trình.

## 2 PHÉP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

Để giải một phương trình, thông thường ta biến đổi phương trình đó thành một phương trình tương đương đơn giản hơn. Các phép biến đổi như vậy được gọi là **phép biến đổi tương đương**. Các phép biến đổi sau là **phép biến đổi tương đương**.

## 3 PHÉP CỘNG (TRỪ) HAI VẾ VỚI CÙNG MỘT BIỂU THỨC

Cho phương trình  $f(x) = g(x)$  có tập xác định là  $\mathcal{D}$  và  $h(x)$  là biểu thức xác định trên  $\mathcal{D}$ . Khi đó  $f(x) = g(x)$  và  $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$  là hai phương trình tương đương.

Ta viết  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$ .

Cộng hoặc trừ hai vế của phương trình với cùng một biểu thức ta được phương trình mới tương đương với phương trình đã cho.

Như vậy ta có

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0.$$

Chuyển  $g(x)$  sang vế trái là phép biến đổi **tương đương**.

$$f(x) = g(x) + h(x) \Leftrightarrow f(x) - h(x) = g(x).$$

Chuyển  $h(x)$  từ vế này sang vế kia là phép biến đổi **tương đương**.

🧩 Ví dụ 1. Giải phương trình  $(x + \sqrt{x - 1})x = 3x + 4 + x\sqrt{x - 1}$ .

### Lời giải.

#### Lời giải sai

Ta có

$$\begin{aligned}(x + \sqrt{x-1})x &= 3x + 4 + x\sqrt{x-1} \\ \Leftrightarrow x^2 + x\sqrt{x-1} &= 3x + 4 + x\sqrt{x-1} \quad (1) \\ \Leftrightarrow x^2 &= 3x + 4 \quad (2) \quad (\text{đơn giản cho } x\sqrt{x-1}) \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 &= 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } x = 4.\end{aligned}$$

Cách giải này **SAI** vì tập xác định của phương trình (1) là  $[1; +\infty)$ , còn tập xác định của phương trình (2) là  $\mathbb{R}$ . Phép biến đổi *đơn giản* cho  $x\sqrt{x-1}$  đã làm thay đổi điều kiện  $x \geq 1$  của phương trình (1) nên đây không là phép biến đổi tương đương.

#### Lời giải đúng

**Cách 1.** Đặt điều kiện để sử dụng phép biến đổi *tương đương*.

☑ Điều kiện  $x \geq 1$ .

☑ Ta có

$$\begin{aligned}(x + \sqrt{x-1})x &= 3x + 4 + x\sqrt{x-1} \\ \Leftrightarrow x^2 + x\sqrt{x-1} &= 3x + 4 + x\sqrt{x-1} \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 &= 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } x = 4.\end{aligned}$$

☑ So với điều kiện  $x \geq 1$ , phương trình đã cho có một nghiệm  $x = 4$ .

**Cách 2.** Không đặt điều kiện và sử dụng phép biến đổi *hệ quả*.

☑ Ta có

$$\begin{aligned}(x + \sqrt{x-1})x &= 3x + 4 + x\sqrt{x-1} \\ \Rightarrow x^2 + x\sqrt{x-1} &= 3x + 4 + x\sqrt{x-1} \\ \Rightarrow x^2 - 3x - 4 &= 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } x = 4.\end{aligned}$$

☑ Với  $x = -1$  phương trình đã cho trở thành  $(-1 + \sqrt{-2})(-1) = -3 + 4 - \sqrt{-2}$  vô nghĩa vì  $\sqrt{-2}$  không tồn tại. Suy ra loại  $x = -1$ .

☑ Với  $x = 4$  phương trình đã cho trở thành  $(4 + \sqrt{3})(4) = 12 + 4 + 4\sqrt{3} \Leftrightarrow 16 = 16$  thỏa. Suy ra nhận  $x = 4$ .

☑ Vậy phương trình đã cho có một nghiệm  $x = 4$ .

Chú thích:  $x = -1$  gọi là nghiệm ngoại lai.

**! Chú ý 1.**  $f(x) + h(x) = g(x) + h(x) \quad (1) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad (2)$ . Nếu hai phương trình (1) và (2) không cùng tập xác định thì *đơn giản* hai vế cho  $h(x)$  là **SAI**.

 **Ví dụ 2.** Giải phương trình  $(x + \sqrt{x^2 + 1})x = 3x + 4 + x\sqrt{x^2 + 1}$ .

### Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(x + \sqrt{x^2 + 1})x &= 3x + 4 + x\sqrt{x^2 + 1} \\ \Leftrightarrow x^2 + x\sqrt{x^2 + 1} &= 3x + 4 + x\sqrt{x^2 + 1} \quad (1) \\ \Leftrightarrow x^2 &= 3x + 4 \quad (2) \quad (\text{đơn giản cho } x\sqrt{x^2 + 1}) \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 &= 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } x = 4.\end{aligned}$$

Cách giải này **ĐÚNG** vì tập xác định của phương trình (1) và (2) cùng là  $\mathbb{R}$ . Phép biến đổi *đơn giản* cho  $x\sqrt{x^2 + 1}$  không làm thay đổi điều kiện  $x \in \mathbb{R}$  của phương trình (1) nên đây là phép biến đổi *tương đương*.

**! Chú ý 2.**  $f(x) + h(x) = g(x) + h(x) \quad (1) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad (2)$ . Nếu hai phương trình (1) và (2) có cùng tập xác định thì *đơn giản* hai vế cho  $h(x)$  là **ĐÚNG**.

4

**PHÉP NHÂN (CHIA) HAI VẾ VỚI CÙNG MỘT BIỂU THỨC KHÁC 0.**

Cho phương trình  $f(x) = g(x)$  có tập xác định là  $\mathcal{D}$  và  $h(x)$  là biểu thức xác định trên  $\mathcal{D}$ , thỏa  $h(x) \neq 0, \forall x \in \mathcal{D}$ . Khi đó  $f(x) = g(x)$  và  $f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$  là hai phương trình tương đương.

Ta viết  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$ .

Nhân hoặc chia hai vế của phương trình với cùng một biểu thức khác 0 ta được phương trình mới tương đương với phương trình đã cho.

Như vậy ta có

$$f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

(Với điều kiện hai phương trình có cùng tập xác định  $\mathcal{D}$  và  $h(x) \neq 0, \forall x \in \mathcal{D}$ .)

Đơn giản hai vế cho  $h(x) \neq 0$  là phép biến đổi **tương đương**.

$$\frac{f(x)}{h(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot h(x).$$

(Với điều kiện hai phương trình có cùng tập xác định  $\mathcal{D}$  và  $h(x) \neq 0, \forall x \in \mathcal{D}$ .)

$$f(x) = g(x) + h(x) \Leftrightarrow f(x) - h(x) = g(x).$$

Nhân hai vế cho  $h(x) \neq 0$  là phép biến đổi **tương đương**.

 **Ví dụ 1.** Giải phương trình  $x(\sqrt{x} + 1) = (\sqrt{x} + 1)(x^2 - x - 3)$ .

 **Lời giải.**

**Lời giải sai**

Vì  $\sqrt{x} > 0$  nên  $\sqrt{x} + 1 > 1$ . Do đó  $\sqrt{x} + 1 \neq 0$ . Vậy

$$x(\sqrt{x} + 1) = (\sqrt{x} + 1)(x^2 - x - 3) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x = x^2 - x - 3 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } x = 3.$$

Cách giải này **SAI** vì mặc dù  $\sqrt{x} + 1 \neq 0, \forall x \geq 0$ , nhưng tập xác định của phương trình (1) là  $[0; +\infty)$ , còn tập xác định của phương trình (2) là  $\mathbb{R}$ . Do đó phép biến đổi **đơn giản** cho  $(\sqrt{x} + 1)$  đã làm thay đổi điều kiện  $x \geq 0$  của phương trình (1) nên đây không là phép biến đổi tương đương.

**Lời giải đúng**

☑ Điều kiện  $x \geq 0$ , khi đó  $\sqrt{x} + 1 \neq 0$ .

☑ Do vậy

$$x(\sqrt{x} + 1) = (\sqrt{x} + 1)(x^2 - x - 3)$$

$$\Leftrightarrow x = x^2 - x - 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } x = 3.$$

☑ So với điều kiện  $x \geq 0$ , phương trình đã cho có một nghiệm  $x = 3$ .

 **Ví dụ 2.** Giải phương trình  $x^3 + 2x = (5x + 8)(x^2 + 2)$ .

 **Lời giải.**

Ta có

$$x^3 + 2x = (5x + 8)(x^2 + 2) \Leftrightarrow x(x^2 + 2) = (5x + 8)(x^2 + 2) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x = 5x + 8 \quad (2) \quad (\text{vì } x^2 + 2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ là nghiệm của phương trình đã cho.}$$

Cách giải này **ĐÚNG** vì tập xác định của phương trình (1) và (2) cùng là  $\mathbb{R}$ , đồng thời  $x^2 + 2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Do đó phép biến đổi *đơn giản* cho  $(x^2 + 2)$  không làm thay đổi điều kiện  $x \in \mathbb{R}$  của phương trình (1) nên đây là phép biến đổi tương đương.

 **Ví dụ 3.** Giải phương trình  $5x^3 - 20x = x^4 - 16$ .

 **Lời giải.**

**Lời giải sai**

Ta có

$$\begin{aligned} 5x^3 - 20x = x^4 - 16 &\Leftrightarrow 5x(x^2 - 4) = (x^2 - 4)(x^2 + 4) \\ &\Leftrightarrow 5x = x^2 + 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hay } x = 4. \end{aligned}$$

Cách giải này **SAI** vì mặc dù các phép biến đổi không làm thay đổi tập xác định  $\mathbb{R}$  của phương trình ban đầu nhưng biểu thức  $(x^2 - 4)$  không khác 0 với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

**Lời giải đúng**

Ta có

$$\begin{aligned} 5x^3 - 20x = x^4 - 16 &\Leftrightarrow 5x(x^2 - 4) = (x^2 - 4)(x^2 + 4) \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 5x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \text{ hay } x = 1 \text{ hay } x = 4. \end{aligned}$$

**Chú ý 3.**

$$f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x) \quad (1) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad (2).$$

! Nếu hai phương trình (1) và (2) không cùng tập xác định, hoặc  $h(x)$  không khác 0 với mọi  $x$  thuộc tập xác định của phương trình (1) thì *đơn giản* hai vế cho  $h(x)$  là **SAI**. Khi đó ta biến đổi (Đặt  $h(x)$  làm nhân tử chung)

$$f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x) \Leftrightarrow h(x) [f(x) - g(x)] = 0 \text{ là } \mathbf{ĐÚNG}$$

 **Ví dụ 4.** Giải phương trình  $\frac{x^3 - 3}{x^2 + 1} = x - 2$ .

 **Lời giải.**

Vì  $x^2 + 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  nên ta có

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - 3}{x^2 + 1} = x - 2 &\Leftrightarrow x^3 - 3 = (x^2 + 1)(x - 2) \\ &\Leftrightarrow x^3 - 3 = x^3 - 2x^2 + x - 2 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hay } x = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

! **Chú ý 4.** Nếu  $h(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  thì ta có  $\frac{f(x)}{h(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = h(x) \cdot g(x)$ .

 **Ví dụ 5.** Giải phương trình  $\frac{2x - 3}{x} = x - 2$ .

 **Lời giải.**

**Cách 1.**

Điều kiện  $x \neq 0$ . Khi đó

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{2x - 3}{x} = x - 2 &\Leftrightarrow 2x - 3 = x(x - 2) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hay } x = 3 \text{ (thỏa) } x \neq 0. \end{aligned}$$

**Cách 2.** Ta có

$$\frac{2x - 3}{x} = x - 2 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3 = x(x - 2) \quad (2) \text{ (vì } x = 0 \text{ không là nghiệm của phương trình)}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3 = x^2 - 2x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hay } x = 3.$$

**Nhận xét**

- ☑ Phương trình (1) có điều kiện  $x \neq 0$ .
- ☑ Thế  $x = 0$  vào phương trình (2) ta được  $-3 = 0$  là mệnh đề **sai**, nên  $x = 0$  không là nghiệm của (2), nghĩa là phương trình (2) hiển nhiên có  $x \neq 0$ . Mà nếu phương trình (2) có  $x \neq 0$  thì  $\frac{2x-3}{x} = x-2 \Leftrightarrow 2x-3 = x(x-2)$  là phép biến đổi tương đương.
- ☑ Có thể hiểu cách khác  $x = 0$  không thuộc tập nghiệm của (1) và (2), nên (1) và (2) là hai phương trình tương đương, do đó không cần điều kiện  $x \neq 0$  ta vẫn có phép biến đổi  $\frac{2x-3}{x} = x-2 \Leftrightarrow 2x-3 = x(x-2)$  là **ĐÚNG**.

**Chú ý 5.** Nếu mọi nghiệm của mẫu số  $h(x)$  không là nghiệm của tử số  $f(x)$  thì không cần điều kiện  $h(x) \neq 0$  ta vẫn được phép biến đổi tương đương

$$\frac{f(x)}{h(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = h(x) \cdot g(x).$$

**Ví dụ 6.** Giải phương trình  $\frac{x^3 + 3x}{x^2 - 2x - 3} = x - 2$ .

**Nhận xét**

- ☑ Cho mẫu số bằng 0:  $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$  hay  $x = 3$ .
- ☑ Thế  $x = -1$  vào tử số  $(-1)^3 + 3 \cdot (-1) = -4 \neq 0$  nên  $x = -1$  không là nghiệm của tử số.
- ☑ Thế  $x = 3$  vào tử số  $3^3 + 3 \cdot 3 = 36 \neq 0$  nên  $x = 3$  không là nghiệm của tử số.
- ☑ Mọi nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử nên không cần điều kiện mẫu khác 0.

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{x^3 + 3x}{x^2 - 2x - 3} = x - 2 \\ \Leftrightarrow & x^3 + 3x = (x^2 - 2x - 3)(x - 2) \quad (\text{Vì } x = -1, x = 3 \text{ không là nghiệm}) \\ \Leftrightarrow & x^3 + 3x = x^3 - 2x^2 - 3x - 2x^2 + 4x + 6 \\ \Leftrightarrow & 4x^2 + 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hay } x = -\frac{3}{2} \text{ là nghiệm của phương trình đã cho.} \end{aligned}$$

**Ví dụ 7.** Giải phương trình  $\frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1} = x - 2$ .

**Nhận xét**

- ☑ Cho mẫu số bằng 0:  $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ .
- ☑ Thế  $x = 1$  vào tử số  $2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 0$  nên  $x = 1$  là nghiệm của tử số.
- ☑ Vậy bài toán này phải có điều kiện mẫu số khác 0.

**Lời giải.**

☑ Điều kiện  $x \neq 1$ . Khi đó

☑ Ta có

$$\begin{aligned}\frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1} &= x - 2 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 &= (x - 1)(x - 2) \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 &= x^2 - 2x - x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } x = 1.\end{aligned}$$

☑ So với điều kiện  $x \neq 1$ , phương trình đã cho có một nghiệm  $x = -1$ .

**Chú ý 6.** Nếu có một nghiệm của mẫu số  $h(x)$  là nghiệm của tử số  $f(x)$  thì phải đặt điều kiện  $h(x) \neq 0$ .

!

$$\frac{f(x)}{h(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} h(x) \neq 0 \\ f(x) = h(x) \cdot g(x). \end{cases}$$

**Ví dụ 8.** Giải phương trình  $\frac{2x^3 - x + 14}{2x^2 + 3x - 2} = x - 7$ .

Nhận xét

- ☑ Cho mẫu số bằng 0:  $2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ hay } x = \frac{1}{2}$ .
- ☑ Thế  $x = -2$  vào tử số  $2 \cdot (-2)^3 - (-2) + 14 = 0$  nên  $x = -2$  là nghiệm của tử số.
- ☑ Có một nghiệm  $x = -2$  của mẫu là nghiệm của tử, nên phải có điều kiện mẫu khác 0.

**Lời giải.**

☑ Điều kiện  $2x^2 + 3x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$  và  $x \neq \frac{1}{2}$ . Khi đó

☑ Ta có

$$\begin{aligned}\frac{2x^3 - x + 14}{2x^2 + 3x - 2} &= x - 7 \\ \Leftrightarrow 2x^3 - x + 14 &= (2x^2 + 3x - 2)(x - 7) \\ \Leftrightarrow 11x^2 + 22x &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x = -2.\end{aligned}$$

☑ So với điều kiện  $x \neq -2$  và  $x \neq \frac{1}{2}$ , phương trình đã cho có một nghiệm  $x = 0$ .

**Ví dụ 9.** Giải phương trình  $\sqrt{x-2}(x^2 - x - 6) = 0$ .

**Lời giải.**

**Lời giải sai**

Ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{x-2}(x^2 - x - 6) &= 0 \quad (1) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 0 \\ x^2 - x - 6 = 0 \end{cases} \quad (*) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \\ x = -2. \end{cases}\end{aligned}$$

Cách giải này **sai** vì

☑ Phương trình (1) có điều kiện  $x \geq 2$ .

☑ Phương trình (\*) có điều kiện  $x \in \mathbb{R}$ .

☑ Phép biến đổi đã làm thay đổi điều kiện của phương trình ban đầu nên đây không là phép biến đổi tương đương.

**Lời giải đúng**

☑ Điều kiện  $x \geq 2$ . Khi đó

☑ Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x-2}(x^2-x-6) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 0 \\ x^2-x-6 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \\ x = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

☑ So với điều kiện  $x \geq 2$ , phương trình đã cho có hai nghiệm  $x = 2$  và  $x = 3$ .

**Chú ý 7.**

☑ Đặt điều kiện cho phương trình  $f(x) \cdot g(x) = 0$ . Khi đó

☑  $f(x) \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0. \end{cases}$

## D CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

**Câu 1.** Điều kiện của phương trình  $\frac{1}{\sqrt{x-3}} = x+3$  là

(A)  $x = 3$ .

(B)  $x \neq 3$ .

(C)  $x > 3$ .

(D)  $x \geq 3$ .

**Lời giải.**

Điều kiện của phương trình là  $x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$ .

☞ Chọn đáp án (C).

**Câu 2.** Trong bốn phép biến đổi sau, phép biến đổi nào là phép biến đổi tương đương?

(A)  $\frac{x(x-1)}{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ .

(B)  $|x| = 2 \Leftrightarrow x = 2$ .

(C)  $x + \sqrt{x-4} = 3 + \sqrt{x-4} \Leftrightarrow x = 3$ .

(D)  $x - \sqrt{x-5} = 3 \Leftrightarrow x-3 = \sqrt{x-5}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $x - \sqrt{x-5} = 3 \Leftrightarrow x-3 = \sqrt{x-5}$ .

Trong phép biến đổi trên ta cộng hai vế của phương trình đầu với cùng một lượng là  $-3 + \sqrt{x-5}$  và không làm thay đổi điều kiện của phương trình nên nhận được một phương trình mới tương đương.

☞ Chọn đáp án (D).

**Câu 3.** Nghiệm của phương trình  $\frac{x+2}{x} = \frac{2x+3}{2x-4}$  là

(A)  $x = -\frac{3}{8}$ .

(B)  $x = \frac{3}{8}$ .

(C)  $x = \frac{8}{3}$ .

(D)  $x = -\frac{8}{3}$ .

**Lời giải.**

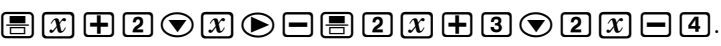
Điều kiện của phương trình là  $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2. \end{cases}$

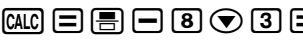
Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{(x+2)(2x-4) - x(2x+3)}{x(2x-4)} &= 0 \\ \Rightarrow -8 - 3x &= 0 \\ \Rightarrow x &= -\frac{8}{3} \text{ (thỏa điều kiện).} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là  $x = -\frac{8}{3}$ .

**Giải nhanh bằng Casio:**

☑ Nhập vào máy  $\frac{X+2}{X} - \frac{2X+3}{2X-4}$ : .

☑ Tính giá trị tại các phương án: Nhấn  hiện kết quả là 0 nên ta có nghiệm là  $-\frac{8}{3}$ .

🔍 Chọn đáp án **(D)**.....

**Câu 4.** Tập nghiệm của phương trình  $\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+1} = \frac{5}{x-1}$  là

**(A)**  $\left\{\frac{1}{2}; -6\right\}$ .

**(B)**  $\left\{-\frac{1}{2}; 6\right\}$ .

**(C)**  $\left\{-\frac{1}{4}; 3\right\}$ .

**(D)**  $\left\{\frac{1}{4}; -3\right\}$ .

🔗 **Lời giải.**

Với điều kiện  $x \neq \pm 1, x \neq 2$  thì phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\begin{aligned} 3(x^2 - 1) - 2(x - 1)(x - 2) &= 5(x + 1)(x - 2) \\ \Leftrightarrow -4x^2 + 11x + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ x = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Cả hai nghiệm trên đều thỏa điều kiện.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là  $S = \left\{-\frac{1}{4}; 3\right\}$ .

🔍 Chọn đáp án **(C)**.....

**Câu 5.** Số nghiệm của phương trình  $(x^2 + 1)(10x^2 - 31x + 24) = 0$  là

**(A)** 1.

**(B)** 2.

**(C)** 3.

**(D)** 4.

🔗 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} (x^2 + 1)(10x^2 - 31x + 24) &= 0 \\ \Leftrightarrow 10x^2 - 31x + 24 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{8}{5}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

🔍 Chọn đáp án **(B)**.....

**Câu 6.** Tìm điều kiện xác định của phương trình  $x + \frac{5}{x-4} = 12 + \frac{5}{x-4}$ .

**(A)**  $x \neq 4$ .

**(B)**  $x \in \mathbb{R}$ .

**(C)**  $x \neq \pm 4$ .

**(D)**  $x \neq 4$ .

🔗 **Lời giải.**

Điều kiện của phương trình là  $x \neq 4$ .

🔍 Chọn đáp án **(A)**.....

**Câu 7.** Tìm điều kiện xác định của phương trình  $\sqrt{x+1} = x+1$ .

**(A)**  $x \geq 1$ .

**(B)**  $x \geq -1$ .

**(C)**  $x \leq 1$ .

**(D)**  $x \in \mathbb{R}$ .

🔗 **Lời giải.**

Điều kiện của phương trình là  $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ .

🔍 Chọn đáp án **(B)**.....

**Câu 8.** Tìm điều kiện xác định của phương trình  $\frac{2x}{x^2+1} - 5 = \frac{3}{x^2+1}$ .

**(A)**  $x \neq 1$ .

**(B)**  $x \neq -1$ .

**(C)**  $x \neq \pm 1$ .

**(D)**  $x \in \mathbb{R}$ .

🔗 **Lời giải.**

Phương trình đã cho xác định với  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

🔍 Chọn đáp án **(D)**.....

**Câu 9.** Tìm điều kiện xác định của phương trình  $\frac{1}{x+2} - \frac{3}{x-2} = \frac{4}{x^2-4}$ .

(A)  $x > 2$ .

(B)  $x \neq \pm 2$ .

(C)  $x \geq 2$ .

(D)  $x \in \mathbb{R}$ .

 **Lời giải.**

Điều kiện của phương trình là  $\begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -2 \Leftrightarrow x \neq \pm 2. \\ x^2 \neq 4 \end{cases}$

 **Chọn đáp án (B).**

**Câu 10.** Tìm điều kiện xác định của phương trình  $\frac{x-2}{x+2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x-2)}$ .

(A)  $x \neq \pm 2; x \neq 0$ .

(B)  $x \geq 2$ .

(C)  $x > 2$ .

(D)  $x \neq 2; x \neq 0$ .

 **Lời giải.**

Điều kiện của phương trình là  $\begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -2 \Leftrightarrow x \neq \pm 2, x \neq 0. \\ x \neq 0 \end{cases}$

 **Chọn đáp án (A).**

**Câu 11.** Tìm điều kiện xác định của phương trình  $3x + \frac{5}{x-4} = 12 + \frac{5}{x-4}$ .

(A)  $x \neq 4$ .

(B)  $x \geq 4$ .

(C)  $x > 4$ .

(D)  $x \in \mathbb{R}$ .

 **Lời giải.**

Điều kiện của phương trình là  $x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$ .

 **Chọn đáp án (A).**

**Câu 12.** Tìm điều kiện xác định của phương trình  $\frac{2x}{3-x} + \frac{1}{2x-1} = \frac{6-5x}{3x-2}$ .

(A)  $x > 3$ .

(B)  $x \geq 3$ .

(C)  $x \neq \frac{1}{2}; x \neq 3; x \neq \frac{3}{2}$ .

(D)  $x \neq \frac{1}{2}; x \neq 3; x \neq \frac{2}{3}$ .

 **Lời giải.**

Điều kiện của phương trình là  $\begin{cases} 3-x \neq 0 \\ 2x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}; x \neq 3; x \neq \frac{2}{3}. \\ 3x-2 \neq 0 \end{cases}$

 **Chọn đáp án (C).**

**Câu 13.** Điều kiện xác định của phương trình  $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x^2-1} = 0$  là

(A)  $x \geq 0$ .

(B)  $x > 0$  và  $x^2 - 1 \geq 0$ .

(C)  $x > 0$ .

(D)  $x \geq 0$  và  $x^2 - 1 > 0$ .

 **Lời giải.**

Điều kiện của phương trình là  $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 1 > 0. \end{cases}$

 **Chọn đáp án (B).**

**Câu 14.** Tìm điều kiện xác định của phương trình  $\sqrt{3x-2} + \sqrt{4-3x} = 1$ .

(A)  $x > \frac{4}{3}$ .

(B)  $\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}$ .

(C)  $x \neq \frac{2}{3}; x \neq \frac{4}{3}$ .

(D)  $\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}$ .

 **Lời giải.**

Điều kiện của phương trình là  $\begin{cases} 3x-2 \geq 0 \\ 4-3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}$ .

 **Chọn đáp án (D).**

**Câu 15.** Tìm điều kiện xác định của phương trình  $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x-3}$ .

(A)  $x > 3$ .

(B)  $x \geq 2$ .

(C)  $x \geq 1$ .

(D)  $x \geq 3$ .

 **Lời giải.**

Điều kiện của phương trình là  $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3. \\ x-3 \geq 0 \end{cases}$

 **Chọn đáp án (D).**

**Câu 16.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A)  $3x + \sqrt{x-2} = x^2 \Leftrightarrow 3x = x^2 - \sqrt{x-2}$ .

(B)  $\sqrt{x-1} = 3x \Leftrightarrow x-1 = 9x^2$ .

Ⓒ  $3x + \sqrt{x-2} = x^2 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow 3x = x^2$ .

Ⓓ  $|x| = 2 \Leftrightarrow x = 2$ .

🔗 **Lời giải.**

Khi chuyển về (cộng hoặc trừ hai vế với cùng một biểu thức) mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình ta luôn nhận được một phương trình mới tương đương.

Vì vậy ta có  $3x + \sqrt{x-2} = x^2 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow 3x = x^2 - \sqrt{x-2}$ .

🔗 **Chọn đáp án Ⓐ**

**Câu 17.** Chỉ ra khẳng định sai.

Ⓐ  $\sqrt{x-2} = 3\sqrt{2-x} \Leftrightarrow x-2=0$ .

Ⓑ  $\sqrt{x-3} = 2 \Rightarrow x-3=4$ .

Ⓒ  $\frac{x(x-2)}{x-2} = 2 \Rightarrow x=2$ .

Ⓓ  $|x| = 2 \Leftrightarrow x = 2$ .

🔗 **Lời giải.**

Ta có  $|x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$ .

🔗 **Chọn đáp án Ⓓ**

**Câu 18.** Chỉ ra khẳng định sai.

Ⓐ  $\sqrt{x-1} = 2\sqrt{1-x} \Leftrightarrow x-1=0$ .

Ⓑ  $x + \sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow x=1$ .

Ⓒ  $|x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ .

Ⓓ  $|x-2| = x+1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = (x+1)^2$ .

🔗 **Lời giải.**

$x + \sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$  phương trình vô nghiệm.

Phương trình  $x + \sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{x-2}$  và  $x = 1$  là không tương đương vì không cùng tập nghiệm.

🔗 **Chọn đáp án Ⓑ**

**Câu 19.** Chỉ ra khẳng định sai.

Ⓐ  $\sqrt{x-2} = 3\sqrt{2-x} \Leftrightarrow x-2=0$ .

Ⓑ  $\sqrt{x-3} = 2 \Rightarrow x-3=4$ .

Ⓒ  $|x-2| = 2x+1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = (2x+1)^2$ .

Ⓓ  $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ .

🔗 **Lời giải.**

Khi bình phương hai vế phải có điều kiện để hai vế không âm. Khẳng định  $|x-2| = 2x+1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = (2x+1)^2$  là một phép biến đổi sai.

🔗 **Chọn đáp án Ⓒ**

**Câu 20.** Phương trình  $(x^2+1)(x-1)(x+1) = 0$  tương đương với phương trình

Ⓐ  $x-1=0$ .

Ⓑ  $x+1=0$ .

Ⓒ  $x^2+1=0$ .

Ⓓ  $(x+1)(x-1)=0$ .

🔗 **Lời giải.**

Ta có  $(x^2+1)(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1) = 0$ .

🔗 **Chọn đáp án Ⓓ**

**Câu 21.** Phương trình  $\frac{3x+1}{x-5} = \frac{16}{x-5}$  tương đương với phương trình

Ⓐ  $\frac{3x+1}{x-5} + 3 = \frac{16}{x-5} + 3$ .

Ⓑ  $\frac{3x+1}{x-5} - \sqrt{2-x} = \frac{16}{x-5} - \sqrt{2-x}$ .

Ⓒ  $\frac{3x+1}{x-5} + \sqrt{2-x} = \frac{16}{x-5} + \sqrt{2-x}$ .

Ⓓ  $\frac{3x+1}{x-5} \cdot 2x = \frac{16}{x-5} \cdot 2x$ .

🔗 **Lời giải.**

Khi cộng hai vế với cùng một biểu thức mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình thì ta nhận được một phương trình mới tương đương.

Vậy  $\frac{3x+1}{x-5} = \frac{16}{x-5} \Leftrightarrow \frac{3x+1}{x-5} + 3 = \frac{16}{x-5} + 3$ .

🔗 **Chọn đáp án Ⓐ**

**Câu 22.** Phương trình  $(x-4)^2 = x-2$  là phương trình hệ quả của phương trình nào sau đây?

Ⓐ  $x-4 = x-2$ .

Ⓑ  $\sqrt{x-2} = x-4$ .

Ⓒ  $\sqrt{x-4} = \sqrt{x-2}$ .

Ⓓ  $\sqrt{x-4} = x-2$ .

🔗 **Lời giải.**

Phép bình phương hai vế chỉ là một phép biến đổi hệ quả, nên ta có  $\sqrt{x-2} = x-4 \Rightarrow (x-4)^2 = x-2$ .

🔗 **Chọn đáp án Ⓑ**

**Câu 23.** Tìm điều kiện xác định của phương trình  $\sqrt{x-2} + \frac{x^2+5}{\sqrt{7-x}} = 0$ .

Ⓐ  $x > 2$ .

Ⓑ  $x \geq 7$ .

Ⓒ  $2 \leq x < 7$ .

Ⓓ  $2 \leq x \leq 7$ .

🔗 **Lời giải.**

Điều kiện của phương trình  $\sqrt{x-2} + \frac{x^2+5}{\sqrt{7-x}} = 0$  là  $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 7-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x < 7$ .

🔍 Chọn đáp án **C**.....

**Câu 24.** Tập nghiệm  $T$  của phương trình  $\sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{2x - x^2}$  là

**(A)**  $T = \{0\}$ .

**(B)**  $T = \emptyset$ .

**(C)**  $T = \{0; 2\}$ .

**(D)**  $T = \{2\}$ .

🔍 **Lời giải.**

Ngay từ điều kiện của phương trình  $\begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ 2x - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2$ .

Thay vào phương trình ta thấy cả hai giá trị thỏa mãn phương trình.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là  $T = \{0; 2\}$ .

🔍 Chọn đáp án **C**.....

**Câu 25.** Tập nghiệm  $T$  của phương trình  $\frac{\sqrt{x}}{x} = \sqrt{-x}$  là

**(A)**  $T = \{0\}$ .

**(B)**  $T = \emptyset$ .

**(C)**  $T = \{1\}$ .

**(D)**  $T = \{-1\}$ .

🔍 **Lời giải.**

Điều kiện của phương trình là  $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 0 \\ -x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$  không có giá trị  $x$  thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm, hay tập nghiệm là  $T = \emptyset$ .

🔍 Chọn đáp án **B**.....

**Câu 26.** Cho phương trình  $2x^2 - x = 0$  (1). Trong các phương trình sau, phương trình nào không phải là phương trình hệ quả của phương trình (1)?

**(A)**  $2x - \frac{x}{1-x} = 0$ .

**(B)**  $4x^3 - x = 0$ .

**(C)**  $(2x^2 - x)^2 = 0$ .

**(D)**  $x^2 - 2x + 1 = 0$ .

🔍 **Lời giải.**

Phương trình  $2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \frac{1}{2}$ .

Ta thấy phương trình  $x^2 - 2x + 1 = 0$  chỉ có nghiệm  $x = 1$  nên không thể là phương trình hệ quả của phương trình đã cho.

🔍 Chọn đáp án **D**.....

**Câu 27.** Phương trình  $x^2 = 3x$  tương đương với phương trình

**(A)**  $x^2 + \sqrt{x-2} = 3x + \sqrt{x-2}$ .

**(B)**  $x^2 + \frac{1}{x-3} = 3x + \frac{1}{x-3}$ .

**(C)**  $x^2\sqrt{x-3} = 3x\sqrt{x-3}$ .

**(D)**  $x^2 + \sqrt{x^2+1} = 3x + \sqrt{x^2+1}$ .

🔍 **Lời giải.**

Ta có  $x^2 + \sqrt{x^2+1} = 3x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x^2 = 3x$ .

🔍 Chọn đáp án **D**.....

**Câu 28.** Khẳng định nào sau đây sai?

**(A)**  $\sqrt{x-2} = 1 \Rightarrow x-2 = 1$ .

**(B)**  $\frac{x(x-1)}{(x-1)} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ .

**(C)**  $|3x-2| = x-3 \Rightarrow 8x^2 - 4x - 5 = 0$ .

**(D)**  $\sqrt{x-3} = \sqrt{9-2x} \Rightarrow 3x-12 = 0$ .

🔍 **Lời giải.**

Phương trình  $\frac{x(x-1)}{(x-1)} = 1$  chỉ có nghiệm  $x = 0$  nên không tương đương với phương trình  $x = 1$ .

Vậy khẳng định  $\frac{x(x-1)}{(x-1)} = 1 \Leftrightarrow x = 1$  là một khẳng định sai.

🔍 Chọn đáp án **B**.....

**Câu 29.** Khi giải phương trình  $\sqrt{3x^2+1} = 2x+1$  (1), ta tiến hành các bước sau

Bước 1: Bình phương hai vế của phương trình (1) ta được

$$3x^2 + 1 = (2x + 1)^2. \quad (2)$$

Bước 2: Khai triển và rút gọn (2) ta được  $x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$  hay  $x = -4$ .

Bước 3: Khi  $x = 0$ , ta có  $3x^2 + 1 > 0$ . Khi  $x = -4$ , ta có  $3x^2 + 1 > 0$ .

Vậy tập nghiệm của phương trình là  $\{0; -4\}$ .

Cách giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở bước nào?

**(A)** Đúng.

**(B)** Sai ở bước 1.

**(C)** Sai ở bước 2.

**(D)** Sai ở bước 3.

🔍 **Lời giải.**

Cách giải trên là sai ở bước 3. Khi thử nghiệm, ngoài việc kiểm tra điều kiện thì cần xem về phải có không âm hay không. Rõ ràng trong các giá trị ở bước 3 thì khi thay  $x = -4$  thì về phải âm nên  $x = -4$  không thể là nghiệm của phương trình đã cho.

🔍 Chọn đáp án **D** .....

**Câu 30.** Khi giải phương trình  $\sqrt{x^2 - 5} = 2 - x$  (1), một học sinh tiến hành các bước sau

Bước 1: Bình phương hai vế của phương trình (1) ta được

$$x^2 - 5 = (2 - x)^2. \quad (2)$$

Bước 2: Khai triển và rút gọn (2) ta được  $4x = 9$ .

Bước 3:  $(2) \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$ .

Vậy phương trình có một nghiệm là  $x = \frac{9}{4}$ .

Cách giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở bước nào?

**A** Đúng.

**B** Sai ở bước 1.

**C** Sai ở bước 2.

**D** Sai ở bước 3.

🔗 LỜI GIẢI.

Cách giải trên là sai ở bước 3. Sau khi giải phương trình hệ quả ta cần thử lại để loại nghiệm ngoại lai. Giá trị  $x = \frac{9}{4}$  hoàn toàn không thỏa mãn phương trình đã cho nên không phải là nghiệm.

🔍 Chọn đáp án **D** .....

**Câu 31.** Khi giải phương trình  $|x - 2| = 2x - 3$  (1), một học sinh tiến hành các bước sau

Bước 1: Bình phương hai vế của phương trình (1) ta được

$$x^2 - 4x + 4 = 4x^2 - 12x + 9. \quad (2)$$

Bước 2: Khai triển và rút gọn (2) ta được  $3x^2 - 8x + 5 = 0$ .

Bước 3:  $(2) \Leftrightarrow x = 1$  hoặc  $x = \frac{5}{3}$ .

Bước 4: Vậy phương trình có nghiệm là  $x = 1$  và  $x = \frac{5}{3}$ .

Cách giải trên sai từ bước nào?

**A** Sai ở bước 1.

**B** Sai ở bước 2.

**C** Sai ở bước 3.

**D** Sai ở bước 4.

🔗 LỜI GIẢI.

Cách giải trên là sai ở bước 4 vì ta đã bỏ qua thao tác thử nghiệm để loại nghiệm ngoại lai, dẫn tới việc lấy nhầm nghiệm  $x = 1$ .

🔍 Chọn đáp án **D** .....

**Câu 32.** Khi giải phương trình  $\frac{(x-3)(x-4)}{\sqrt{x}-2} = 0$  (1), một học sinh tiến hành các bước sau

Bước 1:  $(1) \Leftrightarrow \frac{(x-3)}{\sqrt{x}-2}(x-4) = 0. \quad (2)$

Bước 2:  $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-3)}{\sqrt{x}-2} = 0 \\ x-4 = 0 \end{cases}$

Bước 3:  $\Leftrightarrow x = 3$  hoặc  $x = 4$ .

Bước 4: Vậy phương trình có tập nghiệm là  $T = \{3; 4\}$ .

Cách giải trên sai từ bước nào?

**A** Sai ở bước 1.

**B** Sai ở bước 2.

**C** Sai ở bước 3.

**D** Sai ở bước 4.

🔗 LỜI GIẢI.

Cách giải trên là sai từ bước 2 vì khi biến đổi tương đương thì điều kiện  $x > 0, x \neq 4$  là điều kiện chung của cả phương trình. Như vậy từ bước 2 ta không thể nhận được một hệ hoặc tương đương được, từ đó dẫn tới việc nhận nhầm nghiệm  $x = 4$  không thỏa phương trình đã cho.

🔍 Chọn đáp án **B** .....

**Câu 33.**  $x = 9$  là nghiệm của phương trình nào sau đây?

- (A)  $\sqrt{2-x} = x$ . (B)  $\frac{2x^2}{\sqrt{x+1}} = \frac{8}{\sqrt{x+1}}$ . (C)  $\sqrt{2x+7} = x-4$ . (D)  $\sqrt{14-2x} = x-3$ .

**Lời giải.**

Ta thấy  $x = 9$  thỏa mãn phương trình  $\sqrt{2x+7} = x-4$  nên là một nghiệm của nó.

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 34.** Nghiệm của phương trình  $\sqrt{x+3} = 1$  (nếu có) là

- (A)  $x = 2$ . (B)  $x = -2$ . (C)  $x = -3$ . (D) vô nghiệm.

**Lời giải.**

Ta có  $\sqrt{x+3} = 1 \Leftrightarrow x+3 = 1 \Leftrightarrow x = -2$ .

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 35.** Khi giải phương trình  $\frac{(x-5)(x-4)}{\sqrt{x}-3} = 0$  (1), một học sinh tiến hành các bước sau

$$\text{Bước 1: } (1) \Leftrightarrow \frac{(x-5)}{\sqrt{x}-3}(x-4) = 0. \quad (2)$$

$$\text{Bước 2: } \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-5)}{\sqrt{x}-3} = 0 \\ x-4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Bước 3: } \Leftrightarrow x = 5 \text{ hoặc } x = 4.$$

Bước 4: Vậy phương trình có tập nghiệm là  $T = \{5; 4\}$ .

Cách giải trên sai từ bước nào?

- (A) Sai ở bước 1. (B) Sai ở bước 2. (C) Sai ở bước 3. (D) Sai ở bước 4.

**Lời giải.**

Ta thấy tập nghiệm của phương trình thì không thay đổi. Tuy nhiên, ngay từ bước 2 thì ta chỉ có thể nhận được một hệ điều kiện tương đương. Trong cách giải của học sinh trên vô tình đã loại đi điều kiện chung của phương trình. Các trường hợp khác nói chung là không đúng.

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 36.** Khi giải phương trình  $x + \frac{1}{x+2} = -\frac{2x+3}{x+2}$  (1), một học sinh tiến hành các bước sau

Bước 1: Điều kiện  $x \neq 2$ .

$$\text{Bước 2: với điều kiện trên } (1) \Leftrightarrow x(x+2) + 1 = -(2x+3). \quad (2)$$

$$\text{Bước 3: } (2) \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

Bước 4: Vậy phương trình có tập nghiệm là  $T = \{-2\}$ .

Cách giải trên sai từ bước nào?

- (A) Sai ở bước 1. (B) Sai ở bước 2. (C) Sai ở bước 3. (D) Sai ở bước 4.

**Lời giải.**

Ở bước 3, sau khi ta tìm nghiệm của phương trình hệ quả cần thử lại (với dạng này ta chỉ cần đối chiếu với điều kiện của phương trình). Ở đây học sinh trên đã bỏ qua thao tác đối chiếu với điều kiện của phương trình dẫn tới kết quả sai.

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 37.** Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm  $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$ ?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) vô số.

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} x \geq 0 \\ -x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Thế  $x = 0$  vào phương trình, ta thấy thỏa nên phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 0$ .

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 38.** Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm  $|x| = -x$ ?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) vô số.

**Lời giải.**

$$|x| = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x \text{ nếu } x \geq 0 \\ -x = -x \text{ nếu } x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{thỏa với mọi } x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 0.$$

☞ Chọn đáp án **(D)**.

**Câu 39.** Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm  $\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$ ?

- (A)** 0. **(B)** 1. **(C)** 2. **(D)** vô số.

☞ Lời giải.

Điều kiện xác định  $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$

Thế  $x = 2$  vào phương trình, ta thấy thỏa nên phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 2$ .

☞ Chọn đáp án **(B)**.

**Câu 40.** Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm  $|x-2| = 2-x$ ?

- (A)** 0. **(B)** 1. **(C)** 2. **(D)** vô số.

☞ Lời giải.

$|x-2| = 2-x$  có nghiệm thì điều kiện  $2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ . Khi đó, phương trình được viết lại

$$2-x = 2-x \text{ thỏa với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

So với điều kiện ta suy ra tập nghiệm của phương trình đã cho là  $S = (-\infty; 2]$ .

☞ Chọn đáp án **(D)**.

**Câu 41.** Phương trình  $\sqrt{-x^2+10x-25} = 0$

- (A)** vô nghiệm. **(B)** vô số nghiệm. **(C)** mọi  $x$  đều là nghiệm. **(D)** có nghiệm duy nhất.

☞ Lời giải.

$$\sqrt{-x^2+10x-25} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-(x-5)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 5.$$

☞ Chọn đáp án **(D)**.

**Câu 42.** Phương trình  $\sqrt{2x+5} = \sqrt{-2x-5}$  có nghiệm là

- (A)**  $x = \frac{5}{2}$ . **(B)**  $x = -\frac{5}{2}$ . **(C)**  $x = -\frac{2}{5}$ . **(D)**  $x = -\frac{2}{5}$ .

☞ Lời giải.

Điều kiện xác định  $\begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ -2x-5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}.$

Thế  $x = -\frac{5}{2}$  vào phương trình, ta thấy thỏa nên phương trình có nghiệm duy nhất  $x = -\frac{5}{2}$ .

☞ Chọn đáp án **(B)**.

**Câu 43.** Tập nghiệm của phương trình  $x - \sqrt{x-3} = \sqrt{3-x} + 3$  là

- (A)**  $S = \emptyset$ . **(B)**  $S = \{3\}$ . **(C)**  $S = [3; +\infty)$ . **(D)**  $S = \mathbb{R}$ .

☞ Lời giải.

Điều kiện xác định  $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$

Thế  $x = 3$  vào phương trình, ta thấy thỏa nên phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 3$ .

☞ Chọn đáp án **(B)**.

**Câu 44.** Tập nghiệm của phương trình  $x + \sqrt{x} = \sqrt{x} - 1$  là

- (A)**  $S = \emptyset$ . **(B)**  $S = \{-1\}$ . **(C)**  $S = \{0\}$ . **(D)**  $S = \mathbb{R}$ .

☞ Lời giải.

Tập xác định của phương trình  $\mathcal{D} = [0; +\infty)$ . Khi đó

$$x + \sqrt{x} = \sqrt{x} - 1 \Rightarrow x = -1 \text{ loại.}$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

☞ Chọn đáp án **(A)**.

**Câu 45.** Tập nghiệm của phương trình  $\sqrt{x-2}(x^2-3x+2) = 0$  là

- (A)**  $S = \emptyset$ . **(B)**  $S = \{1\}$ . **(C)**  $S = \{2\}$ . **(D)**  $S = \{1; 2\}$ .

☞ Lời giải.

Tập xác định của phương trình  $\mathcal{D} = [2; +\infty)$ . Khi đó

$$\sqrt{x-2}(x^2-3x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2 = 0 \\ x^2-3x+2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \text{ loại} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình có nghiệm là  $x = 2$ .

🔍 Chọn đáp án **C**.

**Câu 46.** Cho các phương trình  $\sqrt{x-1} = 3$ , (1) và  $(\sqrt{x-1})^2 = (-3)^2$  (2). Chọn khẳng định sai?

- (A) Phương trình (1) là phương trình hệ quả của phương trình (2).  
 (B) Phương trình (2) là phương trình hệ quả của phương trình (1).  
 (C) Phương trình (1) và phương trình (2) là hai phương trình tương đương.  
 (D) Phương trình (2) vô nghiệm.

🔗 Lời giải.

Ta có  $\sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow (\sqrt{x-1})^2 = 3^2$  vì  $(-3)^2 = 3^2$  nên hai phương trình (1) và (2) tương đương.

🔍 Chọn đáp án **C**.

**Câu 47.** Số nghiệm của phương trình  $\frac{x^2+6}{x-2} = \frac{5x}{x-2}$  là

- (A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

🔗 Lời giải.

Tập xác định của phương trình  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ . Khi đó phương trình

$$\frac{x^2+6}{x-2} = \frac{5x}{x-2} \Rightarrow x^2+6 = 5x \Leftrightarrow x^2-5x+6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=2 \end{cases} \text{ loại.}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 3$ .

🔍 Chọn đáp án **C**.

**Câu 48.** Tập nghiệm của phương trình  $\sqrt{2x-1} = x-1$  là

- (A)  $\{2+\sqrt{2}; 2-\sqrt{2}\}$ . (B)  $\{2-\sqrt{2}\}$ . (C)  $\{2+\sqrt{2}\}$ . (D)  $\emptyset$ .

🔗 Lời giải.

$$\sqrt{2x-1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x-1 = x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-4x+2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \begin{cases} x = 2+\sqrt{2} \\ x = 2-\sqrt{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+\sqrt{2} \\ x = 2-\sqrt{2} \end{cases}$$

🔍 Chọn đáp án **C**.

**Câu 49.** Số nghiệm của phương trình  $x\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$  là

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

🔗 Lời giải.

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Thế  $x = 2$  vào phương trình, ta thấy thỏa nên phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 2$ .

🔍 Chọn đáp án **B**.

**Câu 50.** Hãy chỉ ra khẳng định sai?

- (A)  $\sqrt{x-1} = 2\sqrt{1-x} \Leftrightarrow x-1 = 0$ . (B)  $x^2+1 = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} = 0$ .  
 (C)  $|x-2| = x+1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = (x+1)^2$ . (D)  $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1, x > 0$ .

🔗 Lời giải.

Ta có

- ☑  $\sqrt{x-1} = 2\sqrt{1-x} \Leftrightarrow x-1 = 0$  đúng.  
 ☑  $x^2+1 = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} = 0$  đúng.  
 ☑  $|x-2| = x+1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = (x+1)^2$  đúng.  
 ☑  $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1, x > 0$  sai vì phương trình đầu có hai nghiệm là  $\pm 1$ .

🔍 Chọn đáp án **D**.

**Câu 51.** Tập nghiệm của phương trình  $\frac{x^2}{\sqrt{x-1}} = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$  là

- (A)  $S = \{2\}$ . (B)  $S = \{-2; 2\}$ . (C)  $S = \{-2\}$ . (D)  $S = \emptyset$ .

🔗 Lời giải.

Tập xác định của phương trình  $\mathcal{D} = (1; +\infty)$ . Khi đó phương trình

$$\frac{x^2}{\sqrt{x-1}} = \frac{4}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

So với điều kiện suy ra tập nghiệm  $S = \{2\}$ .

🐭 Chọn đáp án **A**.

**Câu 52.** Tập nghiệm của phương trình  $\sqrt{3-x} + x = \sqrt{3-x} + 4$  là

**A**  $S = \{3\}$ .

**B**  $S = \{3; 4\}$ .

**C**  $S = \{4\}$ .

**D**  $S = \emptyset$ .

🔗 **Lời giải.**

Tập xác định của phương trình  $\mathcal{D} = (-\infty; 3]$ . Khi đó phương trình

$$\sqrt{3-x} + x = \sqrt{3-x} + 4 \Rightarrow x = 4.$$

So với điều kiện suy ra tập nghiệm  $S = \emptyset$ .

🐭 Chọn đáp án **D**.

**Câu 53.** Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình  $x^2 - 4 = 0$ ?

**A**  $(2+x)(-x^2+2x+1) = 0$ .

**B**  $(x-2)(x^2+3x+2) = 0$ .

**C**  $\sqrt{x^2-3} = 1$ .

**D**  $x^2 - 4x + 4 = 0$ .

🔗 **Lời giải.**

$$\sqrt{x^2-3} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 1 \Leftrightarrow x - 4 = 0.$$

🐭 Chọn đáp án **C**.

**Câu 54.** Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình  $x^2 - 3x = 0$ ?

**A**  $x^2 + \sqrt{x-2} = 3x + \sqrt{x-2}$ .

**B**  $x^2 + \frac{1}{x-3} = 3x + \frac{1}{x-3}$ .

**C**  $x^2\sqrt{x-3} = 3x\sqrt{x-3}$ .

**D**  $x^2 + \sqrt{x^2+1} = 3x + \sqrt{x^2+1}$ .

🔗 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3. \end{cases}$$

☑  $x^2 + \sqrt{x-2} = 3x + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 = 3x \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$

☑  $x^2 + \frac{1}{x-3} = 3x + \frac{1}{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x^2 = 3x \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$

☑  $x^2\sqrt{x-3} = 3x\sqrt{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 = 3x \end{cases}$

☑  $x^2 + \sqrt{x^2+1} = 3x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x^2 = 3x.$

Vậy phương trình  $x^2 - 3x = 0$  tương đương với  $x^2 + \sqrt{x^2+1} = 3x + \sqrt{x^2+1}$ .

🐭 Chọn đáp án **D**.

**Câu 55.** Phương trình nào sau đây **không** tương đương với phương trình  $x + \frac{1}{x} = 1$ ?

**A**  $x^2 + \sqrt{x} = -1$ .

**B**  $|2x-1| + \sqrt{2x+1} = 0$ .

**C**  $x\sqrt{x-5} = 0$ .

**D**  $7 + \sqrt{6x-1} = -18$ .

🔗 **Lời giải.**

$$x + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 - x + 1 = 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

☑  $x^2 + \sqrt{x} = -1$  vô nghiệm vì vế trái lớn hơn 0.

☑  $|2x-1| + \sqrt{2x+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |2x-1| = 0 \\ \sqrt{2x+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$

☑  $7 + \sqrt{6x-1} = -18$  vô nghiệm vì  $7 + \sqrt{6x-1} > 0$  và  $-18 < 0$ .

$$\textcircled{C} \quad x\sqrt{x-5} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x = 0 \Leftrightarrow x = 5. \\ x = 5 \end{cases}$$

Vậy  $x + \frac{1}{x} = 1$  không tương đương với  $x\sqrt{x-5} = 0$ .

🔍 Chọn đáp án **C**.....

**Câu 56.** Chọn cặp phương trình tương đương trong các cặp phương trình sau

$$\textcircled{A} \quad x + \sqrt{x-1} = 1 + \sqrt{x-1} \text{ và } x = 1.$$

$$\textcircled{B} \quad x + \sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{x-2} \text{ và } x = 1.$$

$$\textcircled{C} \quad \sqrt{x}(x+2) = \sqrt{x} \text{ và } x+2 = 1.$$

$$\textcircled{D} \quad x(x+2) = x \text{ và } x+2 = 1.$$

🔍 Lời giải.

$$\textcircled{A} \quad x + \sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 1 \end{cases} \text{ vô nghiệm nên } x + \sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{x-2} \text{ và } x = 1 \text{ không tương đương.}$$

$$\textcircled{B} \quad \sqrt{x}(x+2) = \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 0 \\ x+2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ nên } \sqrt{x}(x+2) = \sqrt{x} \text{ và } x+2 = 1 \text{ không tương đương.}$$

$$\textcircled{C} \quad x(x+2) = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \text{ nên } x(x+2) = x \text{ và } x+2 = 1 \text{ không tương đương.}$$

$$\textcircled{D} \quad x + \sqrt{x-1} = 1 + \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ nên } x + \sqrt{x-1} = 1 + \sqrt{x-1} \text{ và } x = 1 \text{ tương đương.}$$

Vậy  $x + \sqrt{x-1} = 1 + \sqrt{x-1}$  và  $x = 1$  là hai phương trình tương đương.

🔍 Chọn đáp án **A**.....

**Câu 57.** Chọn cặp phương trình tương đương trong các cặp phương trình sau

$$\textcircled{A} \quad 2x + \sqrt{x-3} = 1 + \sqrt{x-3} \text{ và } 2x = 1.$$

$$\textcircled{B} \quad \frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = 0 \text{ và } x = 0.$$

$$\textcircled{C} \quad \sqrt{x+1} = 2 - x \text{ và } x+1 = (2-x)^2.$$

$$\textcircled{D} \quad x + \sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{x-2} \text{ và } x = 1.$$

🔍 Lời giải.

$$\textcircled{A} \quad 2x + \sqrt{x-3} = 1 + \sqrt{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ vô nghiệm nên } 2x + \sqrt{x-3} = 1 + \sqrt{x-3} \text{ và } 2x = 1 \text{ không tương đương.}$$

$$\textcircled{B} \quad \sqrt{x+1} = 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x+1 = (2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 - 5x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \text{ nên } \sqrt{x+1} = 2 - x \text{ và } x+1 = (2-x)^2 \text{ không tương đương.}$$

$$\textcircled{C} \quad x + \sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 1 \end{cases} \text{ vô nghiệm nên } x + \sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{x-2} \text{ và } x = 1 \text{ không tương đương.}$$

$$\textcircled{D} \quad \frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ nên } \frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = 0 \text{ và } x = 0 \text{ tương đương.}$$

Vậy  $x + \sqrt{x-1} = 1 + \sqrt{x-1}$  và  $x = 1$  là hai phương trình tương đương.

🔍 Chọn đáp án **B**.....

**Câu 58.** Chọn cặp phương trình không tương đương trong các cặp phương trình sau

$$\textcircled{A} \quad x+1 = x^2 - 2x \text{ và } x+2 = (x-1)^2.$$

$$\textcircled{B} \quad 3x\sqrt{x+1} = 8\sqrt{3-x} \text{ và } 6x\sqrt{x+1} = 16\sqrt{3-x}.$$

$$\textcircled{C} \quad x\sqrt{3-2x} + x^2 = x^2 + x \text{ và } x\sqrt{3-2x} = x.$$

$$\textcircled{D} \quad \sqrt{x+2} = 2x \text{ và } x+2 = 4x^2.$$

🔍 Lời giải.

$$\textcircled{A} \quad x+1 = x^2 - 2x \Leftrightarrow x+2 = (x-1)^2 \text{ nên } x+1 = x^2 - 2x \text{ và } x+2 = (x-1)^2 \text{ tương đương.}$$

$$\textcircled{B} \quad 3x\sqrt{x+1} = 8\sqrt{3-x} \Leftrightarrow 6x\sqrt{x+1} = 16\sqrt{3-x} \text{ nên } 3x\sqrt{x+1} = 8\sqrt{3-x} \text{ và } 6x\sqrt{x+1} = 16\sqrt{3-x} \text{ tương đương.}$$

☑  $x\sqrt{3-2x} + x^2 = x^2 + x \Leftrightarrow x\sqrt{3-2x} = x$  nên  $x\sqrt{3-2x} + x^2 = x^2 + x$  và  $x\sqrt{3-2x} = x$  tương đương.

☑  $\sqrt{x+2} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x+2 = 4x^2 = 0 \end{cases}$  nên  $\sqrt{x+2} = 2x$  và  $x+2 = 4x^2$  không tương đương.

Vậy  $\sqrt{x+2} = 2x$  và  $x+2 = 4x^2$  không tương đương.

🔍 Chọn đáp án **D**.

**Câu 59.** Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để cặp phương trình sau tương đương  $2x^2 + mx - 2 = 0$  (1) và  $2x^3 + (m+4)x^2 + 2(m-1)x - 4 = 0$  (2).

**A**  $m = 2$ .

**B**  $m = 3$ .

**C**  $m = \frac{1}{2}$ .

**D**  $m = -2$ .

🔍 Lời giải.

$$2x^3 + (m+4)x^2 + 2(m-1)x - 4 = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 + mx - 2) + 4x^2 + 2mx - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + mx - 2 = 0 \\ x = -2. \end{cases}$$

Vậy đề (1) tương đương với (2) thì  $2x^2 + mx - 2 = 0$  có nghiệm  $x = -2$ , khi đó  $8 - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 3$ .

🔍 Chọn đáp án **B**.

**Câu 60.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để cặp phương trình sau tương đương  $mx^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$  (1) và  $(m-2)x^2 - 3x + m^2 - 15 = 0$  (2).

**A**  $m = -5$ .

**B**  $m = -5, m = 4$ .

**C**  $m = 4$ .

**D**  $m = 5$ .

🔍 Lời giải.

$$mx^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(mx - m - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ mx = m + 2. \end{cases}$$

Khi đó đề (1) tương đương với (2) thì điều kiện cần là (2) phải có nghiệm  $x = 1$ .

$$\text{Khi đó (2) suy ra } m - 2 - 3 + m^2 - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -5. \end{cases}$$

Khi đó

TH 1. Với  $m = 4$  thì (1)  $\Rightarrow 4x^2 - 6x + 2 = 0$

Và (2)  $\Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (1)$ .

$$\text{TH 2. Với } m = -5 \text{ thì (1) } \Rightarrow -5x^2 + 12x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{7}{5}. \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow -7x^2 - 3x + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{10}{7}. \end{cases}$$

Suy ra (1) không tương đương (2).

Vậy giá trị  $m$  cần tìm là  $m = 4$ .

🔍 Chọn đáp án **C**.

**Câu 61.** Khẳng định nào sau đây là sai?

**A**  $\sqrt{x-2} = 1 \Rightarrow x - 2 = 1$ .

**B**  $\frac{x(x-1)}{x-1} = 1 \Rightarrow x = 1$ .

**C**  $|3x-2| = x-3 \Rightarrow 8x^2 - 4x - 5 = 0$ .

**D**  $\sqrt{x-3} = \sqrt{9-2x} \Rightarrow 3x-12 = 0$ .

🔍 Lời giải.

$$|3x-2| = x-3 \Rightarrow 9x^2 - 12x + 4 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow 8x^2 - 6x - 5 = 0.$$

Vậy  $|3x-2| = x-3 \Rightarrow 8x^2 - 4x - 5 = 0$  sai.

🔍 Chọn đáp án **C**.

**Câu 62.** Cho phương trình  $2x^2 - x = 0$ . Trong các phương trình sau đây, phương trình nào không phải là hệ quả của phương trình đã cho?

**A**  $2x - \frac{x}{1-x} = 0$ .

**B**  $4x^3 - x = 0$ .

**C**  $(2x^2 - x)^2 + (x-5)^2 = 0$ .

**D**  $2x^3 + x^2 - x = 0$ .

🔍 Lời giải.

Ta có

$$\text{☑ } 2x^2 - x = 0 \Rightarrow \frac{-2x^2 + x}{1-x} = 0 \Rightarrow 2x - \frac{x}{1-x} = 0.$$

$$\text{☑ } 2x^2 - x = 0 \Rightarrow (2x^2 - x) \cdot (2x + 1) = 0 \Rightarrow 4x^3 - x = 0.$$

☑  $2x^2 - x = 0 \Rightarrow (2x^2 - x) \cdot (x - 1) = 0 \Rightarrow 2x^3 + x^2 - x = 0.$

☑  $(2x^2 - x)^2 + (x - 5)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - x = 0 \\ x - 5 = 0 \end{cases}$  vô nghiệm.

Vậy  $2x^3 + x^2 - x = 0$  không phải là hệ quả của phương trình đã cho.

🔍 Chọn đáp án (C).

**Câu 63.** Tập nghiệm của phương trình  $\sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{2x - x^2}$  là

(A)  $S = \{0\}.$

(B)  $S = \emptyset.$

(C)  $S = \{0; 2\}.$

(D)  $S = \{2\}.$

🔍 Lời giải.

$$\sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{2x - x^2} \Leftrightarrow 2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$$

🔍 Chọn đáp án (C).

**Câu 64.** Phương trình  $x(x^2 - 1)\sqrt{x - 1} = 0$  có bao nhiêu nghiệm?

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

🔍 Lời giải.

$$x(x^2 - 1)\sqrt{x - 1} = 0 \begin{cases} x \geq 1 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow x = 1$$

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất.

🔍 Chọn đáp án (B).

**Câu 65.** Phương trình  $\sqrt{-x^2 + 6x - 9} + x^3 = 27$  có bao nhiêu nghiệm?

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

🔍 Lời giải.

Điều kiện xác định của phương trình

$$-x^2 + 6x - 9 \geq 0 \Leftrightarrow -(x - 3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Thế  $x = 3$  vào phương trình, ta thấy thỏa.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 3$ .

🔍 Chọn đáp án (B).

**Câu 66.** Phương trình  $\sqrt{(x - 3)^2(5 - 3x)} + 2x = \sqrt{3x - 5} + 4$  có bao nhiêu nghiệm?

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

🔍 Lời giải.

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} 5 - 3x \geq 0 \\ 3x - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}.$$

Thế  $x = \frac{5}{3}$  vào phương trình, ta thấy  $2 \cdot \frac{5}{3} = 4$  vô lý.

Vậy phương trình vô nghiệm.

🔍 Chọn đáp án (A).

**Câu 67.** Phương trình  $x + \sqrt{x - 1} = \sqrt{1 - x}$  có bao nhiêu nghiệm?

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

🔍 Lời giải.

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Thế  $x = 1$  vào phương trình, ta thấy  $1 = 0$  vô lý.

Vậy phương trình vô nghiệm.

🔍 Chọn đáp án (A).

**Câu 68.** Phương trình  $\sqrt{2x} + \sqrt{x - 2} = \sqrt{2 - x} + 2$  có bao nhiêu nghiệm?

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

🔍 Lời giải.

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \text{ thay vào phương trình, ta thấy không thỏa.}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

🔍 Chọn đáp án (A).

**Câu 69.** Phương trình  $\sqrt{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} + x = \sqrt{2 - x}$  có bao nhiêu nghiệm?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

**Lời giải.**

$$\sqrt{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} + x = \sqrt{2 - x} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2(x-2)} + x = \sqrt{2-x} \text{ có điều kiện xác định } \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Thay  $x = 2$  vào phương trình, ta thấy  $2 = 0$  vô lý.

Vậy phương trình vô nghiệm.

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 70.** Phương trình  $x + \frac{1}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1}$  có bao nhiêu nghiệm?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

**Lời giải.**

$$x + \frac{1}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - x + 1 = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 2$ .

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 71.** Phương trình  $(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-3} = 0$  có bao nhiêu nghiệm?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

**Lời giải.**

$$(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 3$ .

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 72.** Phương trình  $(x^2 - x - 2)\sqrt{x+1} = 0$  có bao nhiêu nghiệm?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

**Lời giải.**

$$(x^2 - x - 2)\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Phương trình có hai nghiệm  $x = -1, x = 2$ .

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 73.** Phương trình  $\frac{x^2 - 4x - 2}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x-2}$  có tất cả bao nhiêu nghiệm?

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 5.

**Lời giải.**

$$\frac{x^2 - 4x - 2}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x^2 - 4x - 2 = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x^2 - 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$

Vậy phương trình có tất cả là một nghiệm

**Chọn đáp án (A).**

## §2 PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

### A CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP - VÍ DỤ - BÀI TẬP RÈN LUYỆN

#### ☐ Dạng 1. Giải và biện luận phương trình bậc nhất một ẩn

Cách giải và biện luận phương trình  $ax = b$ .

- ☑ Trường hợp 1:  $a \neq 0$ . Phương trình có nghiệm duy nhất  $x = \frac{b}{a}$ .
- ☑ Trường hợp 2:  $a = 0$ . Giải để tìm tham số, thế tham số vào phương trình  $ax = b$ .
  - + Nếu được  $0x = 0$  thì phương trình có vô số nghiệm (tập nghiệm  $S = \mathbb{R}$ ).
  - + Nếu được  $0x = b$  ( $b \neq 0$ ) thì phương trình vô nghiệm.

!

- ☑ Phương trình  $ax = b$  có nghiệm duy nhất  $\Leftrightarrow a \neq 0$ .
- ☑ Phương trình  $ax = b$  vô nghiệm  $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0. \end{cases}$
- ☑ Phương trình  $ax = b$  có tập nghiệm là  $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0. \end{cases}$

#### 1 VÍ DỤ

🧩 Ví dụ 1. Giải và biện luận theo tham số  $m$  phương trình  $(2m - 4)x = m - 2$ .

🔗 Lời giải.

- ☑  $2m - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$  thì phương trình có nghiệm duy nhất  $x = \frac{m - 2}{2m - 4} = \frac{1}{2}$ .
- ☑  $2m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2$  thì phương trình đã cho trở thành  $0x = 0 \Rightarrow$  Phương trình có vô số nghiệm.

🧩 Ví dụ 2. Giải và biện luận theo tham số  $m$  phương trình  $(m^2 - 1)x + 1 = m$ .

🔗 Lời giải.

$$(m^2 - 1)x + 1 = m \Leftrightarrow (m^2 - 1)x = m - 1$$

- ☑  $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -1 \end{cases}$  thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $x = \frac{m - 1}{m^2 - 1} = \frac{1}{m + 1}$ .
- ☑  $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1. \end{cases}$ 
  - Với  $m = 1$  thì phương trình đã cho trở thành  $0x = 0 \Rightarrow$  Phương trình có vô số nghiệm.
  - Với  $m = -1$  thì phương trình đã cho trở thành  $0x = -2 \Rightarrow$  Phương trình vô nghiệm.

🧩 Ví dụ 3. Giải và biện luận theo tham số  $m$  phương trình  $m^3x = m^2 + 4 + 4m(x - 1)$ .

🔗 Lời giải.

$$m^3x = m^2 + 4 + 4m(x - 1) \Leftrightarrow (m^3 - 4m)x = m^2 - 4m + 4.$$

$$\textcircled{v} m^3 - 4m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \\ m \neq -2 \end{cases} \text{ thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất } x = \frac{m^3 - 4m}{m^2 - 4m + 4} = \frac{m(m+2)}{m-2}.$$

$$\textcircled{v} m^3 - 4m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \\ m = -2. \end{cases}$$

- Với  $m = 0$  thì phương trình đã cho trở thành  $0x = 4 \Rightarrow$  Phương trình vô nghiệm.
- Với  $m = 2$  thì phương trình đã cho trở thành  $0x = 0 \Rightarrow$  Phương trình vô số nghiệm.
- Với  $m = -2$  thì phương trình đã cho trở thành  $0x = 16 \Rightarrow$  Phương trình vô nghiệm.

**Ví dụ 4.** Giải và biện luận theo tham số  $a$  và  $b$  phương trình  $a(ax + 2b^2) - a^3 = b^2(x + a)$ .

**Lời giải.**

$$a(ax + 2b^2) - a^3 = b^2(x + a) \Leftrightarrow (a^2 - b^2)x = a^3 - ab^2.$$

$$\textcircled{v} a^2 - b^2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq b \\ a \neq -b \end{cases} \text{ thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất } x = \frac{a^3 - ab^2}{a^2 - b^2} = a.$$

$$\textcircled{v} a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases}$$

- Với  $a = b$  thì phương trình đã cho trở thành  $0x = 0 \Rightarrow$  Phương trình có vô số nghiệm.
- Với  $a = -b$  thì phương trình đã cho trở thành  $0x = 0 \Rightarrow$  Phương trình có vô số nghiệm.

**Ví dụ 5.** Giải và biện luận theo tham số  $m$  phương trình  $\frac{m(x-1)-3}{x+1} = 2$ .

**Lời giải.**

$$\frac{m(x-1)-3}{x+1} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m(x-1)-3 = 2x+2 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)x = m+5 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)x = m+5 \\ m \neq \frac{-3}{2}. \end{cases}$$

$$\textcircled{v} \begin{cases} m-2 \neq 0 \\ m \neq \frac{-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq \frac{-3}{2} \end{cases} \text{ thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất } x = \frac{m+5}{m-2}.$$

$$\textcircled{v} \begin{cases} m-2 = 0 \\ m \neq \frac{-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 \text{ thì phương trình đã cho trở thành } 0x = 7 \Rightarrow \text{Phương trình vô nghiệm.}$$

**Ví dụ 6.** Tìm tham số  $m$  để phương trình  $m^2x + 2 = x + 2m$  có nghiệm duy nhất.

**Lời giải.**

$$m^2x + 2 = x + 2m \Leftrightarrow (m^2 - 1)x = 2m - 2 \quad (1)$$

$$(1) \text{ có nghiệm duy nhất } \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1.$$

**Ví dụ 7.** Tìm tham số  $m$  để phương trình  $m^2x + 6 = 4x + 3m$  vô nghiệm.

**Lời giải.**

$$m^2x + 6 = 4x + 3m \Leftrightarrow (m^2 - 4)x = 3m - 6 \quad (1)$$

$$(1) \text{ vô nghiệm } \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ 3m - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

**Ví dụ 8.** Tìm tham số  $m$  để phương trình  $m^2(x-1) + m = x(3m-2)$  có tập nghiệm là  $\mathbb{R}$ .

**Lời giải.**

$$m^2(x-1) + m = x(3m-2) \Leftrightarrow (m^2 - 3m + 2)x = m^2 - m \quad (1)$$

$$(1) \text{ có tập nghiệm là } \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ m^2 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

## 2 BÀI TẬP TỰ RÈN LUYỆN

**Bài 1.** Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số  $m$

①  $m(x-m) = x + m - 2$

②  $2(m-1)x - m(x-1) = 2m + 3$

③  $2m^2(x-1) + 7 = 2(x+1) + 3m$

④  $(m^2 + 3)(x-1) - m = (3-2m)x - 5$

**Lời giải.**

①  $m(x-m) = x + m - 2 \Leftrightarrow (m-1)x = m^2 + m - 2.$

☉  $m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$  thì phương trình đã cho trở thành  $x = \frac{m^2 + m - 2}{m-1} = m + 2.$

☉  $m-1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$  thì phương trình đã cho trở thành  $0x = 0 \Rightarrow$  Phương trình có vô số nghiệm.

②  $2(m-1)x - m(x-1) = 2m + 3 \Leftrightarrow (m-2)x = m + 3.$

☉  $m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$  thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $x = \frac{m+3}{m-2}.$

☉  $m-2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$  thì phương trình đã cho trở thành  $0x = 5 \Rightarrow$  Phương trình vô nghiệm.

③  $2m^2(x-1) + 7 = 2(x+1) + 3m \Leftrightarrow (2m^2 - 2)x = 2m^2 + 3m - 5.$

☉  $2m^2 - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -1 \end{cases}$  thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $x = \frac{2m^2 + 3m - 5}{2m^2 - 2} = \frac{2m-5}{2m+2}.$

☉  $2m^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}.$

• Với  $m = 1$ , phương trình đã cho trở thành  $0x = 0 \Rightarrow$  Phương trình có tập nghiệm là  $\mathbb{R}$ .

• Với  $m = -1$ , phương trình đã cho trở thành  $0x = -6 \Rightarrow$  Phương trình vô nghiệm.

④  $(m^2 + 3)(x-1) - m = (3-2m)x - 5 \Leftrightarrow (m^2 + 2m)x = m^2 + m - 2.$

☉  $m^2 + 2m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -2 \end{cases}$  thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $x = \frac{m^2 + m - 2}{m^2 + 2m} = \frac{m-1}{m}.$

☉  $m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \end{cases}.$

• Với  $m = 0$  thì phương trình đã cho trở thành  $0x = -2 \Rightarrow$  Phương trình vô nghiệm.

• Với  $m = -2$  thì phương trình đã cho trở thành  $0x = 0 \Rightarrow$  Phương trình có tập nghiệm là  $\mathbb{R}$ .

**Bài 2.** Giải và biện luận theo tham số  $a$  và  $b$  các phương trình

①  $a^2x = a(x+b) - b$

②  $(a+b)^2x + 2a^2 = 2a(a+b) + (a^2 + b^2)x$

③  $\frac{a(x-2a)}{12} + \frac{b^2}{4} = \frac{bx-a^2}{12} + \frac{b^2}{6}$

**Lời giải.**

①  $a^2x = a(x+b) - b \Leftrightarrow (a^2 - a)x = ab - b.$

☉  $a^2 - a \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$  thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $x = \frac{ab-b}{a^2-a} = \frac{b}{a}.$

$$\textcircled{1} a^2 - a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}.$$

- Với  $a = 0$  thì phương trình đã cho trở thành  $0x = -b$  có vô số nghiệm khi  $b = 0$ , vô nghiệm khi  $b \neq 0$ .
- Với  $a = -1$  thì phương trình đã cho trở thành  $0x = 0 \Rightarrow$  Phương trình có tập nghiệm là  $\mathbb{R}$ .

$$\textcircled{2} (a+b)^2x + 2a^2 = 2a(a+b) + (a^2 + b^2)x \Leftrightarrow abx = ab$$

- $ab \neq 0$  thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $x = 1$ .
- $ab \neq 0$  thì phương trình đã cho trở thành  $0x = 0 \Rightarrow$  Phương trình có tập nghiệm là  $\mathbb{R}$ .

$$\textcircled{3} \frac{a(x-2a)}{12} + \frac{b^2}{4} = \frac{bx-a^2}{12} + \frac{b^2}{6} \Leftrightarrow (a-b)x = a^2 - b^2.$$

- $a-b \neq 0 \Leftrightarrow a \neq b$  thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $x = \frac{a^2 - b^2}{a-b} = a+b$ .
- $a-b = 0 \Leftrightarrow a = b$  thì phương trình đã cho trở thành  $0x = 0 \Rightarrow$  Phương trình có tập nghiệm là  $\mathbb{R}$ .

**Bài 3.** Giải và biện luận theo tham số  $m$  các phương trình

$$\textcircled{1} \frac{3}{2x-2} = m+1$$

$$\textcircled{2} \frac{m(x+4)-1}{x+2} = 1$$

$$\textcircled{3} \frac{m}{mx+3} = 2$$

**Lời giải.**

$$\textcircled{1} \frac{3}{2x-2} = m+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = (2x-2)(m+1) \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2(m+1)x = 2m+5$$

- $m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$  thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $x = \frac{2m+5}{2m+2}$ .
- $m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$  thì phương trình đã cho trở thành  $0x = 5 \Rightarrow$  Phương trình vô nghiệm.

$$\textcircled{2} \frac{m(x+4)-1}{x+2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m(x+4)-1 = x+2 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)x = -4m+3 \quad (*) \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

- $m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$  thì phương trình (\*) có nghiệm duy nhất  $x = \frac{-4m+3}{m-1}$ .
- $m-1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$  thì phương trình (\*) trở thành  $0x = -1 \Rightarrow$  Phương trình vô nghiệm.

$$\textcircled{3} \frac{m}{mx+3} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3(mx+3) \\ x \neq -\frac{3}{m} \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3mx = m-9 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m-9}{3m} \\ m \neq 0 \end{cases} \text{ Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi } m \neq 0, \text{ vô nghiệm khi } m = 0.$$

**Bài 4.** Tìm tất cả giá trị của  $m$  để phương trình

$$\textcircled{1} m^2x - m = 4x - 2 \text{ có nghiệm duy nhất.}$$

$$\textcircled{2} m(mx-1) = 1+x \text{ có tập nghiệm là } \mathbb{R}.$$

$$\textcircled{3} (m+1)^2x + 1 - m = (7m-5)x \text{ vô nghiệm.}$$

**Lời giải.**

$$\textcircled{1} m^2x - m = 4x - 2 \Leftrightarrow (m^2 - 4)x = m - 2 \quad (*)$$

$$(*) \text{ có nghiệm duy nhất} \Leftrightarrow m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq -2 \end{cases}.$$

$$\textcircled{2} m(mx-1) = 1+x \Leftrightarrow (m^2 - 1)x = m+1 \quad (*)$$

$$(*) \text{ có tập nghiệm là } \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ m+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

$$\textcircled{3} (m+1)^2x + 1 - m = (7m-5)x \Leftrightarrow (m^2 - 5m + 6)x = m - 1 \quad (*)$$

$$(*) \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 5m + 6 = 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 3. \end{cases}$$

**Bài 5.** Chứng minh rằng phương trình  $m(m-1)x + 2mx = (2m-1)x + m$  có nghiệm duy nhất với mọi  $m \in \mathbb{R}$ .

**Lời giải.**

$$m(m-1)x + 2mx = (2m-1)x + m \Leftrightarrow (m^2 - m + 1)x = m.$$

$$\text{Ta có } m^2 - m + 1 = m^2 - m + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Suy ra phương trình đã cho luôn có nghiệm duy nhất với mọi  $m \in \mathbb{R}$ .

### Dạng 2. Giải và biện luận phương trình bậc hai một ẩn

Cách giải và biện luận phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Trường hợp 1.  $a = 0$ , giải tìm tham số. Thế tham số này vào phương trình đã cho để có kết luận.

Trường hợp 2.  $a \neq 0$ .

Tính  $\Delta = b^2 - 4ac$ . (Nếu  $b$  chẵn thì tính  $\Delta' = b'^2 - ac$  với  $b' = \frac{b}{2}$ )

 Nếu  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$  thì phương trình vô nghiệm.

 Nếu  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$  thì phương trình có nghiệm kép  $x = -\frac{b}{2a}$ . (Nếu tính  $\Delta'$  thì  $x = -\frac{b'}{a}$ ).

 Nếu  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$  thì phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ .  
(Nếu tính  $\Delta'$  thì  $x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$ ).

### 1 ví dụ

 **Ví dụ 1.** Tìm tham số  $m$  để phương trình  $mx^2 - 2(m+3)x + m + 1 = 0 \quad (*)$  vô nghiệm.

**Lời giải.**

Trường hợp 1.  $a = 0 \Leftrightarrow m = 0$ . Thay vào phương trình  $(*)$  ta được  $-6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$ .

Suy ra phương trình có một nghiệm  $x = \frac{1}{6}$  nên  $m = 0$  không thỏa mãn.

Trường hợp 2.  $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ .

Ta có  $\Delta' = (m+3)^2 - m(m+1) = 5m + 9$ . Phương trình  $(*)$  vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow 5m + 9 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{9}{5}.$$

Vậy  $m < -\frac{9}{5}$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

 **Ví dụ 2.** Tìm tham số  $m$  để phương trình  $(2-m)x^2 - 4x + 3 = 0 \quad (*)$  có nghiệm kép. Tính nghiệm kép này.

**Lời giải.**

Ta có  $\Delta' = (-2)^2 - 3(2-m) = 3m - 2$ .

Phương trình  $(*)$  có nghiệm kép khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-m \neq 0 \\ 3m-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}.$$

Khi đó phương trình (\*) có nghiệm kép là  $x = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2-m} = \frac{3}{2}$ .

**Ví dụ 3.** Tìm tham số  $m$  để phương trình  $(2m-1)x^2 - 2(m-1)x - 1 = 0$  (\*) có hai nghiệm phân biệt. Tính hai nghiệm này.

**Lời giải.**

Ta có  $\Delta' = (m-1)^2 - (2m-1)(-1) = m^2$ .

Phương trình (\*) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 \neq 0 \\ m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

Khi đó phương trình (\*) có nghiệm phân biệt là  $x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{(m-1) \pm m}{2m-1} \Leftrightarrow x_1 = 1; x_2 = -\frac{1}{2m-1}$ .

**Nhận xét:**

Ta có thể tính nhanh hai nghiệm bằng cách: phương trình này có các hệ số  $a, b, c$  thỏa mãn điều kiện  $a + b + c = 0$  nên phương trình có một nghiệm  $x_1 = 1$  và nghiệm  $x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2m-1}$ .

**Ví dụ 4.** Tìm tham số  $m$  để phương trình  $(m+2)x^2 - 2mx + m - 3 = 0$  (\*) có nghiệm phân biệt. Tính các nghiệm này.

**Lời giải.**

Ta có  $\Delta' = m^2 - (m+2)(m-3) = m + 6$ .

Phương trình (\*) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 \neq 0 \\ m+6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m > -6 \end{cases}.$$

Khi đó phương trình (\*) có nghiệm phân biệt là  $x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{m \pm \sqrt{m+6}}{m+2}$ .

**Ví dụ 5.** Giải và biện luận theo tham số  $m$  phương trình

$$(m-3)x^2 - 2(m-2)x + m = 0 (*).$$

**Lời giải.**

Trường hợp 1.  $a = 0 \Leftrightarrow m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$ . Thay vào phương trình (\*) ta được  $-2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ .

Suy ra phương trình có một nghiệm  $x = \frac{3}{2}$ .

Trường hợp 2.  $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$ .

Ta có  $\Delta' = (m-2)^2 - m(m-3) = -m + 4$ .

☉ Nếu  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ -m + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 4$  thì phương trình (\*) vô nghiệm.

☉ Nếu  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ -m + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4$  thì phương trình (\*) có nghiệm kép

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{m-2}{m-3} = 2.$$

☉ Nếu  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ -m + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m < 4 \end{cases}$  thì phương trình (\*) có hai nghiệm phân biệt

$$x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{m-2 \pm \sqrt{-m+4}}{m-3}.$$

## 2 BÀI TẬP TỰ RÈN LUYỆN

**Bài 1.** Tìm tham số  $m$  để phương trình

- ①  $(m-1)x^2 + 3x - 1 = 0$  vô nghiệm.
- ②  $mx^2 - (2m+3)x + m = 0$  có nghiệm kép. Tính nghiệm kép này.
- ③  $mx^2 - 2(m+3)x + m + 1 = 0$  có hai nghiệm phân biệt. Tính các nghiệm này.
- ④  $(m-1)x^2 + 7x - 12 = 0$  có nghiệm. Tính các nghiệm này.

**Lời giải.**

- ①  $(m-1)x^2 + 3x - 1 = 0$  (1) vô nghiệm.

Trường hợp 1.  $a = 0 \Leftrightarrow m = 1$ . Thay vào phương trình (1) ta được  $3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ .

Suy ra phương trình có một nghiệm  $x = \frac{1}{3}$  nên  $m = 1$  không thỏa mãn.

Trường hợp 2.  $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ .

Ta có  $\Delta = 3^2 - 4(m-1)(-1) = -4m + 13$ . Phương trình (1) vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow -4m + 13 < 0 \Leftrightarrow m > \frac{13}{4}.$$

Vậy  $m > \frac{13}{4}$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- ②  $mx^2 - (2m+3)x + m = 0$  (2) có nghiệm kép. Tính nghiệm kép này.

Ta có  $\Delta = (2m+3)^2 - 4m \cdot m = 12m + 9$ .

Phương trình (2) có nghiệm kép khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 12m + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m = -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{3}{4}.$$

Khi đó phương trình (2) có nghiệm kép là  $x = -\frac{b}{2a} = \frac{2m+3}{2m} = -1$ .

- ③  $mx^2 - 2(m+3)x + m + 1 = 0$  (3) có hai nghiệm phân biệt. Tính các nghiệm này.

Ta có  $\Delta' = (m+3)^2 - m(m+1) = 5m + 9$ .

Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 5m + 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{9}{5} \end{cases}.$$

Khi đó phương trình (3) có nghiệm phân biệt là  $x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{m+3 \pm \sqrt{5m+9}}{m+2}$ .

- ④  $(m-1)x^2 + 7x - 12 = 0$  (4) có nghiệm. Tính các nghiệm này.

Trường hợp 1.  $a = 0 \Leftrightarrow m = 1$ . Thay vào phương trình (4) ta được  $7x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12}{7}$ .

Suy ra phương trình có một nghiệm  $x = \frac{12}{7}$ .

Trường hợp 2.  $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ .

Ta có  $\Delta = 7^2 - 4(m-1)(-12) = 48m - 1$ . Phương trình (4) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 48m - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \geq \frac{1}{48} \end{cases}.$$

Khi đó phương trình đã cho có hai nghiệm là

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{48m-1}}{2(m-1)}.$$

**Bài 2.** Giải và biện luận theo tham số  $m$  phương trình

①  $x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 7 = 0$ .

②  $(2-m)x^2 - 4x + 3 = 0$ .

 **Lời giải.**

①  $x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 7 = 0$  (1).

Ta có  $\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 7) = 2m - 6$ .

☉ Nếu  $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 2m - 6 < 0 \Leftrightarrow m < 3$  thì phương trình (1) vô nghiệm.

☉ Nếu  $\Delta' = 0 \Leftrightarrow 2m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 3$  thì phương trình (1) có nghiệm kép

$$x = -\frac{b}{2a} = -(m+1) = -4.$$

☉  $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 2m - 6 > 0 \Leftrightarrow m > 3$  thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = -m - 1 \pm \sqrt{2m - 6}.$$

②  $(2-m)x^2 - 4x + 3 = 0$  (2).

Trường hợp 1.  $a = 0 \Leftrightarrow 2 - m = 0 \Leftrightarrow m = 2$ . Thay vào phương trình (2) ta được  $-4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$ .

Suy ra phương trình có một nghiệm  $x = \frac{3}{4}$ .

Trường hợp 2.  $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ .

Ta có  $\Delta' = 2^2 - 3(2-m) = 3m - 2$ .

☉ Nếu  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ 3m - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{2}{3}$  thì phương trình (2) vô nghiệm.

☉ Nếu  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ 3m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$  thì phương trình (2) có nghiệm kép

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2-m} = \frac{3}{2}.$$

☉ Nếu  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ 3m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m > \frac{2}{3} \end{cases}$  thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt

$$x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{2 \pm \sqrt{3m-2}}{2-m}.$$

### Dạng 3. Định lý Vi-ét

Nếu phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  có hai nghiệm  $x_1$  và  $x_2$  thì  $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  và  $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ .

!

① Phương trình  $7x^2 - 2x + 3 = 0$  có  $S = -\frac{b}{a} = \frac{2}{7}$  và  $P = \frac{c}{a} = \frac{3}{7}$  là **SAI** vì phương trình này vô nghiệm.

② Phương trình  $x^2 - 2x - 5 = 0$  có  $S = -\frac{b}{a} = 2$  và  $P = -5$  là **ĐÚNG** vì phương trình này có nghiệm.

**Tìm hiểu thêm về định lý Viète cho phương trình bậc 3**

Nếu phương trình  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  có ba nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  và  $x_3$  thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1 = \frac{c}{a} \\ x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}. \end{cases}$$

### 1 ví dụ

**Ví dụ 1.** Tìm tham số  $m$  để phương trình  $x^2 + mx + 15 = 0$  có một nghiệm là 5. Tính nghiệm còn lại.

#### Lời giải.

Vì phương trình  $x^2 + mx + 15 = 0$  có một nghiệm là 5 nên ta có

$$5^2 + 5m + 15 = 0 \Leftrightarrow m = -8.$$

Với  $m = -8$ , ta có phương trình

$$x^2 - 8m + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 5. \end{cases}$$

Vậy nghiệm còn lại là  $x = 5$ .

**Ví dụ 2.** Tìm giá trị tham số  $m$  để phương trình  $x^2 - mx + 36 = 0$  có hai nghiệm  $x_1$  và  $x_2$  thỏa hệ thức  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{5}{12}$ .

#### Lời giải.

Phương trình  $x^2 - mx + 36 = 0$  có hai nghiệm  $x_1$  và  $x_2$  khi và chỉ khi  $m^2 - 4 \cdot 36 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -12 \\ m \geq 12 \end{cases}$ .

Áp dụng định lý Viète, ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = 36. \end{cases}$

Khi đó,

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{m}{36} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow m = 15 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy  $m = 15$ .

**Ví dụ 3.** Tìm tham số  $m$  để phương trình  $mx^2 + 2(1 - m)x + 3(m - 2) = 0$  có hai nghiệm  $x_1$  và  $x_2$  thỏa hệ thức  $x_1 + 2x_2 = 2$ .

#### Lời giải.

Phương trình  $mx^2 + 2(1 - m)x + 3(m - 2) = 0$  có hai nghiệm  $x_1$  và  $x_2$  khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ (1 - m)^2 - 3m(m - 2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m^2 + 4m + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \frac{2 - \sqrt{6}}{2} \leq m \leq \frac{2 + \sqrt{6}}{2}. \end{cases}$$

Áp dụng định lý Viète, ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m - 1}{m} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{3(m - 2)}{m}. \end{cases}$

Từ hệ phương trình,  $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m - 1}{m} \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$ , ta có  $\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{m} \\ x_2 = \frac{m + 1}{m}. \end{cases}$

Suy ra

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{3(m - 2)}{m} \Leftrightarrow -\frac{2}{m} \cdot \frac{m + 1}{m} = \frac{3(m - 2)}{m} \Leftrightarrow 3m^2 - 4m + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm)}.$$

Vậy không tồn tại  $m$  thỏa yêu cầu bài toán.

**Ví dụ 4.** Tìm tham số  $m$  để phương trình  $x^2 - x + m - 2 = 0$ .

- ① Giải phương trình khi  $m = 1$ .
- ② Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm bằng 2. Tìm nghiệm còn lại của phương trình.
- ③ Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm kép. Tìm nghiệm kép đó theo  $m$ .

**Lời giải.**

- ① Với  $m = 1$ , ta có phương trình

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Vậy  $S = \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$ .

- ② Vì phương trình  $x^2 - x + m - 2 = 0$  có nghiệm bằng 2 nên ta có

$$2^2 - 2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

Với  $m = 0$ , ta có phương trình

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Nghiệm còn lại của phương trình là  $x = -1$ .

- ③ Phương trình  $x^2 - x + m - 2 = 0$  có nghiệm kép khi và chỉ khi  $\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 - 4(m - 2) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$ . Khi đó, nghiệm kép của phương trình là  $x = -\frac{1}{2}$ .

**2**

## BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 8.** Tìm tham số  $m$  để phương trình  $(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x - 1 = 0$  có một nghiệm là 3. Tính nghiệm còn lại.

**Lời giải.**

Phương trình  $(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x - 1 = 0$  có một nghiệm là 3 nên ta có

$$(m - 1)3^2 - 6(m + 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow 3m - 16 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{16}{3}.$$

Với  $m = \frac{16}{3}$ , ta có phương trình

$$\frac{13}{3}x^2 - \frac{38}{3}x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{1}{13} \end{cases}.$$

Vậy  $m = \frac{16}{3}$ .

**Bài 9.** Tìm tham số  $m$  để phương trình

- ①  $x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1$  và  $x_2$  đồng thời thỏa hệ thức  $x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 = 5$ .
- ②  $x^2 - (m + 2)x + 2 = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1$  và  $x_2$  đồng thời thỏa hệ thức  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{9}{2}$ .
- ③  $x^2 - 4x + m - 1 = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1$  và  $x_2$  đồng thời thỏa hệ thức  $x_1^3 + x_2^3 = 40$ .
- ④  $x^2 - (m + 1)x + 10 = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1$  và  $x_2$  đồng thời thỏa hệ thức  $x_1 = 3x_2$ .

**Lời giải.**

- ① Phương trình  $x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1$  và  $x_2$  khi và chỉ khi

$$m^2 - (3m - 2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 2. \end{cases}$$

Áp dụng định lý Viète, ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 3m - 2 \end{cases}$ .

Khi đó,

$$x_1^2 + x_2^2 + 3x_1 x_2 = 5 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + x_1 x_2 = 5 \Leftrightarrow 4m^2 + 3m - 2 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 & \text{(loại)} \\ m = -\frac{7}{4} & \text{(thỏa mãn).} \end{cases}$$

Vậy  $m = -\frac{7}{4}$ .

- ② Phương trình  $x^2 - (m + 2)x + 2 = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1$  và  $x_2$  khi và chỉ khi

$$(m + 2)^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 - 2\sqrt{2} \\ m > -2 + 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Áp dụng định lý Viète, ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 2 \\ x_1 x_2 = 2 \end{cases}$ .

Khi đó,

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} &= \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{9}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{(m + 2)^2 - 4}{2} &= \frac{9}{2} \Leftrightarrow (m + 2)^2 = 13 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 - \sqrt{13} & \text{(thỏa mãn)} \\ m = -2 + \sqrt{13} & \text{(thỏa mãn).} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy  $m = -2 \pm \sqrt{13}$ .

- ③ Phương trình  $x^2 - 4x + m - 1 = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1$  và  $x_2$  khi và chỉ khi

$$4 - (m - 1) > 0 \Leftrightarrow m < 5.$$

Áp dụng định lý Viète, ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$ .

Khi đó,

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= 40 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 \cdot (x_1 + x_2) = 40 \\ \Leftrightarrow 4^3 - 12(m - 1) &= 40 \Leftrightarrow m = 3 \text{ (thỏa mãn).} \end{aligned}$$

Vậy  $m = 3$ .

- ④ Phương trình  $x^2 - (m + 1)x + 10 = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1$  và  $x_2$  khi và chỉ khi

$$(m + 1)^2 - 40 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 - 2\sqrt{10} \\ m > -1 + 2\sqrt{10}. \end{cases}$$

Áp dụng định lý Viète, ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 1 \\ x_1 x_2 = 10 \end{cases}$ .

Từ hệ phương trình  $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 1 \\ x_1 = 3x_2 \end{cases}$ , ta có  $\begin{cases} x_1 = \frac{3m + 3}{4} \\ x_2 = \frac{m + 1}{4}. \end{cases}$

Suy ra

$$x_1 x_2 = 10 \Leftrightarrow 3(m + 1)^2 = 160 \Leftrightarrow 3m^2 + 6m - 157 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-3 + 4\sqrt{30}}{3} & \text{(thỏa mãn)} \\ m = \frac{-3 - 4\sqrt{30}}{3} & \text{(thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy  $m = \frac{-3 \pm 4\sqrt{30}}{3}$ .

#### Dạng 4. Phương trình vô tỷ

$$\sqrt{A} = B$$

##### Phương pháp giải toán

Biến đổi phương trình về dạng  $\sqrt{A} = B$ .

Cách1. Sử dụng phép biến đổi **tương đương**.

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2. \end{cases}$$

Cách2. Sử dụng phép biến đổi hệ quả.

- $\sqrt{A} = B \Rightarrow A = B^2$ . (1)
- Giải phương trình (1) tìm được ẩn số  $x$  và thế vào phương trình đã cho để nhận nghiệm.

#### 1 VÍ DỤ

 **Ví dụ 1.** Giải phương trình  $\sqrt{4x^2 + 2x + 10} - 3x = 1$ .

##### Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2 + 2x + 10} - 3x = 1 &\Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + 2x + 10} = 3x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ 4x^2 + 2x + 10 = (3x + 1)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ 5x^2 + 4x - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ \begin{cases} x = 1 \quad (\text{nhận}) \\ x = -\frac{9}{5} \quad (\text{loại}). \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = 1$ .

 **Ví dụ 2.** Giải phương trình  $\sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} = x + 1$ .

##### Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} = x + 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2x + \sqrt{6x^2 + 1} = (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \sqrt{6x^2 + 1} = x^2 + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 6x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^4 - 4x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2(x^2 - 4) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} x = 0 \quad (\text{nhận}) \\ x = 2 \quad (\text{nhận}) \\ x = -2 \quad (\text{loại}). \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = 0$  và  $x = 2$ .

 **Ví dụ 3.** Giải phương trình  $x + 3\sqrt{x^2 - 3} = 7$ .

##### Lời giải.

Ta có

$$x + 3\sqrt{x^2 - 3} = 7 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3} = \frac{7 - x}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7 - x}{3} \geq 0 \\ x^2 - 3 = \left(\frac{7 - x}{3}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7 - x \geq 0 \\ 9(x^2 - 3) = (7 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7 \\ 4x^2 + 7x - 38 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7 \\ \begin{cases} x = \frac{-7 + 3\sqrt{73}}{8} \quad (\text{nhận}) \\ x = \frac{-7 - 3\sqrt{73}}{8} \quad (\text{nhận}). \end{cases} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = \frac{-7 + 3\sqrt{73}}{8}$  và  $x = \frac{-7 - 3\sqrt{73}}{8}$ .

 **Ví dụ 4.** Giải phương trình  $\frac{\sqrt{x+1}}{x-2} = 2$ .

 **Lời giải.**

Điều kiện:  $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 2. \end{cases}$

Ta có

$$\frac{\sqrt{x+1}}{x-2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2(x-2) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x + 1 = 4(x-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 4x^2 - 17x + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x = 3 \quad (\text{nhận}) \\ x = \frac{5}{4} \quad (\text{loại}). \end{cases} \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là  $x = 3$ .

 **Ví dụ 5.** Giải phương trình  $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{4-x} = 2$ .

 **Lời giải.**

Điều kiện:  $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 4 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$ .

Ta có

$$\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{4-x} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1) \cdot (4-x)} = 2 \Leftrightarrow (x+1) \cdot (4-x) = 4$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad (\text{nhận}) \\ x = 3 \quad (\text{nhận}). \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là  $x = 0$  và  $x = 3$ .

## 2 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 1.** Giải các phương trình sau:

①  $x + \sqrt{5x + 10} = 8$

②  $x - \sqrt{2x + 7} = 4$

③  $2x - \sqrt{-x^2 + 6x - 5} = 6$

 **Lời giải.**

a) Ta có

$$x + \sqrt{5x + 10} = 8 \Leftrightarrow \sqrt{5x + 10} = 8 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - x \geq 0 \\ 5x + 10 = (8 - x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ x^2 - 21x + 54 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ \begin{cases} x = 3 \quad (\text{nhận}) \\ x = 18 \quad (\text{loại}). \end{cases} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = 3$ .

b) Ta có

$$\begin{aligned}
 x - \sqrt{2x+7} = 4 &\Leftrightarrow \sqrt{2x+7} = x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \geq 0 \\ 2x+7 = (x-4)^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 - 10x + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ \begin{cases} x = 9 \text{ (nhận)} \\ x = 1 \text{ (loại)} \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = 9$ .

c) Ta có

$$\begin{aligned}
 2x - \sqrt{-x^2 + 6x - 5} = 6 &\Leftrightarrow \sqrt{-x^2 + 6x - 5} = 2x - 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 6 \geq 0 \\ -x^2 + 6x - 5 = (2x - 6)^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 5x^2 - 30x + 41 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x = \frac{15 + 2\sqrt{5}}{5} \text{ (nhận)} \\ x = \frac{15 - 2\sqrt{5}}{5} \text{ (loại)} \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = \frac{15 + 2\sqrt{5}}{5}$ .**Bài 2.** Giải các phương trình sau:

①  $\sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} = x + 1$

②  $\sqrt{x + \sqrt{5x + 10}} = 2\sqrt{2}$

③  $\sqrt{x^2 + \sqrt{x + 8}} - x = 1$

**Lời giải.**

a) Ta có

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} = x + 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2x + \sqrt{6x^2 + 1} = (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \sqrt{6x^2 + 1} = x^2 + 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 6x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^4 - 4x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2(x^2 - 4) = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} x = 0 \text{ (nhận)} \\ x = 2 \text{ (nhận)} \\ x = -2 \text{ (loại)} \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = 0$  và  $x = 2$ .

b) Ta có

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x + \sqrt{5x + 10}} = 2\sqrt{2} &\Leftrightarrow x + \sqrt{5x + 10} = 8 \Leftrightarrow \sqrt{5x + 10} = 8 - x \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 8 - x \geq 0 \\ 5x + 10 = (8 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ x^2 - 21x + 54 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ \begin{cases} x = 3 \text{ (nhận)} \\ x = 18 \text{ (loại)} \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = 3$ .

c) Ta có

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x^2 + \sqrt{x + 8}} - x = 1 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + \sqrt{x + 8}} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x^2 + \sqrt{x + 8} = (x + 1)^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \sqrt{x + 8} = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ x + 8 = (2x + 1)^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 4x^2 + 3x - 7 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ \begin{cases} x = 1 \text{ (nhận)} \\ x = -\frac{7}{4} \text{ (loại)} \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = 1$ .

$$\sqrt{A} = \sqrt{B}$$

### Phương pháp giải

Cách 1. Sử dụng phép biến đổi **tương đương**.

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \text{ (hoặc } B \geq 0) \\ A = B \end{cases}$$

Cách 2. Sử dụng phép biến đổi **hệ quả**.

- $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Rightarrow A = B$
- Giải phương trình (1) tìm được ẩn số  $x$  và thế vào phương trình đã cho để nhận nghiệm. (1)

## 1 ví dụ

 **Ví dụ 1.** Giải phương trình  $\sqrt{2x^2 - 5x + 2} - \sqrt{6 - 3x} = 0$ .

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 - 5x + 2} - \sqrt{6 - 3x} = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = \sqrt{6 - 3x} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 3x \geq 0 \\ 2x^2 - 5x + 2 = 6 - 3x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ \begin{cases} x = -1 \text{ (nhận)} \\ x = 2 \text{ (nhận)} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = -1$  và  $x = 2$ .

 **Ví dụ 2.** Giải phương trình  $\sqrt{x^2 + 3x} = 2\sqrt{3x - 2}$ .

 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \sqrt{x^2 + 3x} = 2\sqrt{3x - 2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2 \geq 0 \\ x^2 + 3x = 4(3x - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x^2 - 9x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ \begin{cases} x = 1 \text{ (nhận)} \\ x = 8 \text{ (nhận)} \end{cases} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = 1$  và  $x = 8$ .

## 2 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 1.** Giải các phương trình sau:

$$\textcircled{1} \sqrt{2x - 1} - \frac{1}{2}\sqrt{x + 3} = 0. \quad \textcircled{2} \sqrt{x^2 + 3x} = \sqrt{2(x + 1)}. \quad \textcircled{3} \sqrt{2x^2 - 3x + 4} = \frac{3}{2}\sqrt{x + 5}.$$

 **Lời giải.**

a) Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{2x - 1} - \frac{1}{2}\sqrt{x + 3} = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{2x - 1} = \frac{1}{2}\sqrt{x + 3} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ 2x - 1 = \frac{1}{4}(x + 3) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ 4(2x - 1) = x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ 7x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = 1$ .

b) Ta có

$$\sqrt{x^2 + 3x} = \sqrt{2(x+1)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+1) \geq 0 \\ x^2 + 3x = 2(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} x = 1 \text{ (nhận)} \\ x = -2 \text{ (loại)} \end{cases} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = 1$ .

c) Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 - 3x + 4} &= \frac{3}{2}\sqrt{x+5} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 \geq 0 \\ 2x^2 - 3x + 4 = \frac{9}{4}(x+5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ 4(2x^2 - 3x + 4) = 9(x+5) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ 8x^2 - 21x - 29 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ \begin{cases} x = -1 \text{ (nhận)} \\ x = \frac{29}{8} \text{ (nhận)} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = -1$  và  $x = \frac{29}{8}$ .**Bài 2.** Giải các phương trình sau:

①  $\sqrt{2x^2 + x} - \sqrt{3} = 0$ .

②  $2\sqrt{(x+1)^2 + 7} = \sqrt{7(x+5)}$ .

③  $\sqrt{(x+1)(x-3)} - \sqrt{x} = 0$ .

**Lời giải.**

a) Ta có

$$\sqrt{2x^2 + x} - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2x^2 + x = 3 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = 1$  và  $x = -\frac{3}{2}$ .

b) Ta có

$$\begin{aligned} 2\sqrt{(x+1)^2 + 7} &= \sqrt{7(x+5)} \Leftrightarrow \begin{cases} 7(x+5) \geq 0 \\ 4[(x+1)^2 + 7] = 7(x+5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 \geq 0 \\ 4(x^2 + 2x + 8) = 7x + 35 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ 4x^2 + x - 3 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ \begin{cases} x = -1 \text{ (nhận)} \\ x = \frac{3}{4} \text{ (nhận)} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = -1$  và  $x = \frac{3}{4}$ .

c) Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+1)(x-3)} - \sqrt{x} &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(x-3)} = \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x+1)(x-3) = x \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 3x - 3 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{21}}{2} \text{ (nhận)} \\ x = \frac{3-\sqrt{21}}{2} \text{ (loại)} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$ .

! Thiếu dạng 3,4,5,6,7,8

## NHÂN LƯỢNG LIÊN HỢP (NÂNG CAO)

## 1 VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP RÈN LUYỆN

🔗 Ví dụ 1. Giải phương trình  $3(2 + \sqrt{x-2}) = 2x + \sqrt{x+6}$ .

🔗 Lời giải.

☑ Điều kiện cho phương trình có nghĩa:  $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$ .☑ Ta có  $3(2 + \sqrt{x-2}) = 2x + \sqrt{x+6} \Leftrightarrow 2(3-x) = \sqrt{x+6} - 3\sqrt{x-2}$ . (\*)☑ Nhân hai vế của phương trình cho  $\sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2} \neq 0$  ta được:

$$(*) \Leftrightarrow 2(3-x) [\sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2}] = (x+6) - 9(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 2(3-x) [\sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2}] = 8(3-x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 & (\text{thỏa } x \geq 2) \\ \sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2} = 4. & (1) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow (x+6) + 9(x-2) + 6\sqrt{(x+6)(x-2)} = 16$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+4x-12} = 14-5x \Leftrightarrow \begin{cases} 14-5x \geq 0 \\ 9(x^2+4x-12) = (14-5x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{14}{5} \\ 16x^2 - 176x + 304 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{14}{5} \\ x = \frac{11 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{11-3\sqrt{5}}{2} (\text{thỏa } x \geq 2).$$

☑ Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm  $x = 3$  hay  $x = \frac{11-3\sqrt{5}}{2}$ .

Bài 1. Giải phương trình sau.

a.  $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} = \frac{x+3}{5}$

b.  $\sqrt{3x^2-5x+1} - \sqrt{x^2-2} = \sqrt{3(x^2-x-1)} - \sqrt{x^2-3x+4}$ .

Lời giải:

a.  $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} = \frac{x+3}{5}$

☑ Phương trình xác định khi và chỉ khi  $\begin{cases} 4x+1 \geq 0 \\ 3x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{4} \\ x \geq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$ .☑ Nhân hai vế của phương trình cho  $\sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2}$ . Ta được

$$\begin{aligned} x+3 &= \frac{x+3}{5} (\sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2}) \\ \Leftrightarrow (x+3) \cdot \left(1 - \frac{1}{5} (\sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2})\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \quad (l) \\ 1 - \frac{1}{5}(\sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2}) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Giải (2):

$$\begin{aligned} & \sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2} = 5 \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{12x^2 - 5x - 2} = 26 - 7x \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 26 - 7x \geq 0 \\ 4(12x^2 - 5x - 2) = 49x^2 - 364x + 676 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \leq \frac{26}{7} \\ x^2 - 344x + 684 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \leq \frac{26}{7} \\ \begin{cases} x = 342 \quad (l) \\ x = 2 \quad (n) \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm  $x = 2$ .

b.  $\sqrt{3x^2 - 5x + 1} - \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{3(x^2 - x - 1)} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}$ .

☉ Phương trình xác định khi và chỉ khi  $\begin{cases} 3x^2 - 5x + 1 \geq 0 \\ x^2 - 2 \geq 0 \\ 3(x^2 - x - 1) \geq 0 \\ x^2 - 3x + 4 \geq 0. \end{cases}$

Đề ý rằng:

☉  $(3x^2 - 5x + 1) - 3(x^2 - x - 1) = -2(x - 2).$   
 ☉  $(x^2 - 2) - (x^2 - 3x + 4) = 3(x - 2).$

Do đó phương trình đã cho được biến đổi như sau:

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 1} - \sqrt{3(x^2 - x - 1)} = \sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}$$

Nhân lượng liên hợp cho vế trái và nhân lượng liên hợp cho vế phải. Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{-2(x-2)}{\sqrt{3x^2 - 5x + 1} + \sqrt{3(x^2 - x - 1)}} = \frac{3(x-2)}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 - 3x + 4}} \\ \Leftrightarrow & (x-2) \left( \frac{-2}{\sqrt{3x^2 - 5x + 1} + \sqrt{3(x^2 - x - 1)}} - \frac{3}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 - 3x + 4}} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \quad (n) \\ \frac{-2}{\sqrt{3x^2 - 5x + 1} + \sqrt{3(x^2 - x - 1)}} - \frac{3}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 - 3x + 4}} = 0 \quad (1) \end{cases} \end{aligned}$$

Để thấy (1) vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho có một nghiệm  $x = 2$ .

 **Ví dụ 2.** Giải phương trình  $\sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2 + 5}$ .

 **Lời giải.**

**Nhận xét**

☉ Dùng máy tính cầm tay nhận thấy  $x = 2$  là một nghiệm của phương trình. Do đó phương trình đã cho có thể phân tích thành  $(x - 2) \cdot P(x) = 0$ . Để thực hiện điều đó, ta biến đổi sao cho mỗi biểu thức trong phương trình đều xuất hiện thừa số  $x - 2$  bằng cách:

- Thế  $x = 2$  vào biểu thức  $\sqrt{x^2 + 12}$  ta được:  $\sqrt{x^2 + 12} = \sqrt{2^2 + 12} = 4$ .

- Thế  $x = 2$  vào biểu thức  $3x$  ta được:  $3 \cdot x = 3 \cdot 2 = 6$ .
- Thế  $x = 2$  vào biểu thức  $\sqrt{x^2 + 5}$  ta được:  $\sqrt{x^2 + 5} = \sqrt{2^2 + 5} = 3$ .

Từ đó có hướng biến đổi hằng số 5 trong phương trình thành:

$$\sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2 + 5} \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 12} - 4) = (3x - 6) + (\sqrt{x^2 + 5} - 3).$$

**Giải**

- ☑ Phương trình đã cho xác định trên  $\mathbb{R}$ .
- ☑ Ta có:

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2 + 5} \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{x^2 + 12} - 4) = (3x - 6) + (\sqrt{x^2 + 5} - 3) \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} = 3(x - 2) + \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} \\ \Leftrightarrow & (x - 2) \left( \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} - \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} - 3 \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 2 \\ \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} - \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} - 3 = 0. \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

- ☑ Từ phương trình đã cho ta lại có:

$$\sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2 + 5} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 12} - \sqrt{x^2 + 5} = 3x - 5.$$

Vì  $\sqrt{x^2 + 12} > \sqrt{x^2 + 5}$  nên điều kiện để phương trình có nghiệm là  $3x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$ .

Suy ra  $x + 2 > 0$  và hiển nhiên  $\sqrt{x^2 + 12} + 4 > \sqrt{x^2 + 5} + 3$

Do đó:  $\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} - \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} - 3 < 0$ , nghĩa là phương trình (1) vô nghiệm.

- ☑ Vậy phương trình đã cho có một nghiệm  $x = 2$ .

**Bài 2.** Giải các phương trình sau:

- ①  $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{6 - x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0.$       ②  $\frac{1}{\sqrt{x - 1}} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{2x} = \frac{7}{4}.$
- ③  $\sqrt{x + 3} = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2x} + 5.$       ④  $\sqrt[3]{x + 8} + \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x} + x^2 = \frac{1}{x + 1} + 2.$

**Lời giải.**

1.  $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{6 - x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0.$

- ☑ Phương trình đã cho xác định khi  $-\frac{1}{3} \leq x \leq 6$ .

☑ Phương trình  $\Leftrightarrow (\sqrt{3x + 1} - 4) - (\sqrt{6 - x} - 1) + (3x^2 - 14x - 5) = 0.$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \frac{3x - 15}{\sqrt{3x + 1} + 4} - \frac{5 - x}{\sqrt{6 - x} + 1} + (x - 5)(3x + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x - 5) \left( \frac{3}{\sqrt{3x + 1} + 4} + \frac{1}{\sqrt{6 - x} + 1} + (3x + 1) \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \quad (n) \\ \frac{3}{\sqrt{3x + 1} + 4} + \frac{1}{\sqrt{6 - x} + 1} + (3x + 1) = 0 \text{ (VN do vế trái } \geq 0). \end{cases} \end{aligned}$$

- ☑ Vậy phương trình đã cho có một nghiệm  $x = 5$ .

$$2. \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{2x} = \frac{7}{4}.$$

☑ Phương trình đã cho xác định khi  $\begin{cases} x > 1 \\ x \neq 0. \end{cases}$

☑ Phương trình  $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}} - 1 = \frac{3x^2 - 2x - 8}{4x^2}.$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = \frac{3x^2 - 2x - 8}{4x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-x}{\sqrt{x-1}(1+\sqrt{x-1})} = \frac{(x-2)(3x+4)}{4x^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left( \frac{3x+4}{4x^2} + \frac{1}{\sqrt{x-1}(1+\sqrt{x-1})} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \\ \frac{3x+4}{4x^2} + \frac{1}{\sqrt{x-1}(1+\sqrt{x-1})} = 0 \text{ (VN do vế trái } \geq 0). \end{cases}$$

☑ Vậy phương trình đã cho có một nghiệm  $x = 2$ .

$$3. \sqrt{x+3} = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2x} + 5.$$

☑ Phương trình đã cho xác định khi  $\begin{cases} x \geq -3 \\ x \neq 0. \end{cases}$

☑ Phương trình  $\Leftrightarrow \sqrt{x+3} - 2 = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2x} + 3.$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{x^2+6x-7}{2x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{(x-1)(x+7)}{2x}$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \left( \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} - \frac{x+7}{2x} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \quad (\text{n}) \\ \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} - \frac{x+7}{2x} = 0 \quad (\text{VN}). \end{cases}$$

☑ Vậy phương trình đã cho có một nghiệm  $x = 1$ .

$$4. \sqrt[3]{x+8} + \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x} + x^2 = \frac{1}{x+1} + 2.$$

☑ Phương trình đã cho xác định khi  $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq -1. \end{cases}$

☑ Phương trình  $\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+8} - 2) + (\sqrt{x^2+1} - 1) + (\sqrt{x} + x^2) = \frac{1}{x+1} - 1.$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+8} - 2) + (\sqrt{x^2+1} - 1) + (\sqrt{x} + x^2) = \frac{1}{x+1} - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{(\sqrt[3]{x+8})^2 + 2\sqrt[3]{x+8} + 4} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1} + 1} + \frac{x-x^2}{\sqrt{x}-x^2} + \frac{x}{x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow x \left( \frac{1}{(\sqrt[3]{x+8})^2 + 2\sqrt[3]{x+8} + 4} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + 1} + \frac{1-x}{\sqrt{x}-x^2} + \frac{1}{x+1} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \frac{1}{(\sqrt[3]{x+8})^2 + 2\sqrt[3]{x+8} + 4} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + 1} + \frac{1-x}{\sqrt{x}-x^2} + \frac{1}{x+1} = 0 \quad (\text{VN}). \end{cases}$$

☑ Vậy phương trình đã cho có một nghiệm  $x = 0$ .

**Ví dụ 3.** Giải phương trình  $\sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4} = 3x^2 - x + 3$ .

**Lời giải.**

**Nhận xét**

- ☑ Dùng máy tính cầm tay nhận thấy  $x = 0$  hay  $x = 1$  là hai nghiệm của phương trình. Do đó phương trình đã cho có thể phân tích thành  $x \cdot (x - 1) \cdot P(x) = 0$ . Để thực hiện điều đó, ta biến đổi sao cho mỗi biểu thức trong phương trình đều xuất hiện thừa số  $x(x - 2)$  bằng cách:

- Xét  $\sqrt{3x+1} = mx + n$ . Thế  $x = 0$  và  $x = 1$  ta được  $\begin{cases} 1 = n \\ 2 = m + n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ m = 1. \end{cases}$
- Xét  $\sqrt{5x+4} = px + q$ . Thế  $x = 0$  và  $x = 1$  ta được  $\begin{cases} 2 = q \\ 3 = p + q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ p = 1. \end{cases}$

**Giải**

- ☑ Phương trình đã cho xác định khi  $x \geq -\frac{1}{3}$ .

- ☑ Ta có:

$$\begin{aligned} & \sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4} = 3x^2 - x + 3. \\ \Leftrightarrow & \left[ \sqrt{3x+1} - (x+1) \right] + \left[ \sqrt{5x+4} - (x+2) \right] = (3x^2 - x + 3) - (x-1) - (x-2) \\ \Leftrightarrow & \frac{(3x+1) - (x+1)^2}{\sqrt{3x+1} + (x+1)} + \frac{(5x+4) - (x+2)^2}{\sqrt{5x+4} + (x+2)} = 3x^2 - 3x \\ \Leftrightarrow & \frac{-x^2 + x}{\sqrt{3x+1} + (x+1)} + \frac{-x^2 + x}{\sqrt{5x+4} + (x+2)} = 3(x^2 - x) \\ \Leftrightarrow & (-x^2 + x) \left[ \frac{1}{\sqrt{3x+1} + (x+1)} + \frac{1}{\sqrt{5x+4} + (x+2)} + 3 \right] = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -x^2 + x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3x+1} + (x+1)} + \frac{1}{\sqrt{5x+4} + (x+2)} + 3 = 0 \quad (\text{vô nghiệm vì } VT > 0) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 0 \\ x = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

- ☑ Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm  $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1. \end{cases}$

**Bài 3.** Giải các phương trình sau:

- $\sqrt{x^2 + 3x - 9} + \sqrt{3x - 5} = x^2 - 2x + 2$ , biết  $x \geq \frac{5}{3}$ .
- $5\sqrt{x+3} + 5\sqrt{3x-2} = 5x^2 - 31x + 41$ .
- $4\sqrt{3x-2} + 4\sqrt{10-x} + 4\sqrt{5x+4} = 4x^2 - 37x + 61$ .
- $2\sqrt{3x+4} + 3\sqrt{5x+9} = x^2 + 6x + 13$ .
- $(x+3)\sqrt{x^2+x+2} = x^2 + 3x + 4$ .

**Lời giải.**

- $\sqrt{x^2 + 3x - 9} + \sqrt{3x - 5} = x^2 - 2x + 2$ , biết  $x \geq \frac{5}{3}$ .

- ☑ Phương trình đã cho xác định khi  $x \geq -\frac{1}{3}$ .

- ☑ Nhận thấy  $\begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$  là nghiệm

☺ Phương trình  $\Leftrightarrow [\sqrt{x^2 + 3x - 9} - (2x - 3)] + [\sqrt{3x - 5} - (x - 1)] = x^2 - 5x + 6.$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 3x - 9 - (2x - 3)^2}{\sqrt{x^2 + 3x - 9} + (2x - 3)} + \frac{3x - 5 - (x - 1)^2}{\sqrt{3x - 5} + (x - 1)} = x^2 - 5x + 6 \\ &\Leftrightarrow \frac{-3x^2 + 15x - 18}{\sqrt{x^2 + 3x - 9} + (2x - 3)} + \frac{-x^2 + 5x - 6}{\sqrt{3x - 5} + (x - 1)} = x^2 - 5x + 6 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 5x + 6) \left( \frac{3}{\sqrt{x^2 + 3x - 9} + (2x - 3)} + \frac{1}{\sqrt{3x - 5} + (x - 1)} + 1 \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ \frac{3}{\sqrt{x^2 + 3x - 9} + (2x - 3)} + \frac{1}{\sqrt{3x - 5} + (x - 1)} + 1 = 0 \quad (\text{vô nghiệm vì } VT > 0) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 & (n) \\ x = 2 & (n). \end{cases} \end{aligned}$$

☺ Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm  $x = 3$  hoặc  $x = 2$ .

b.  $5\sqrt{x+3} + 5\sqrt{3x-2} = 5x^2 - 31x + 41.$

☺ Nhận thấy  $\begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$  là nghiệm.

☺ Phương trình  $\Leftrightarrow [5\sqrt{x+3} - (x+9)] + [5\sqrt{3x-2} - (3x+2)] = 5x^2 - 35x + 30.$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 7x - 6}{5\sqrt{x+3} + (x+9)} + \frac{-9x^2 + 63x - 54}{5\sqrt{3x-2} + (3x+2)} = 5x^2 - 35x + 30 \\ &\Leftrightarrow \frac{-(x-1)(x-6)}{5\sqrt{x+3} + (x+9)} + \frac{-9(x-1)(x-6)}{5\sqrt{3x-2} + (3x+2)} = 5(x-1)(x-6) \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x-6) \left( 5 + \frac{1}{5\sqrt{x+3} + (x+9)} + \frac{9}{5\sqrt{3x-2} + (3x+2)} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(n) \\ x = 6(n) \\ 5 + \frac{1}{5\sqrt{x+3} + (x+9)} + \frac{9}{5\sqrt{3x-2} + (3x+2)} = 0 \quad (VN). \end{cases} \end{aligned}$$

☺ Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm  $x = 1$  hoặc  $x = 6$ .

c.  $4\sqrt{3x-2} + 4\sqrt{10-x} + 4\sqrt{5x+4} = 4x^2 - 37x + 61.$

☺ Nhận thấy  $\begin{cases} x = 1 \\ x = 9 \end{cases}$  là nghiệm

☺ Phương trình

$$\Leftrightarrow [4\sqrt{3x-2} - (2x+2)] + [4\sqrt{10-x} - (-x+13)] + [4\sqrt{5x+4} - (2x+10)] = 4x^2 - 40x + 36.$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{-4x^2 + 40x - 36}{4\sqrt{3x-2} + 2x + 2} + \frac{-x^2 + 10x - 9}{4\sqrt{10-x} - x + 13} + \frac{-4x^2 + 40x - 36}{4\sqrt{5x+4} + 2x + 10} = 4x^2 - 40x + 36 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 10x + 9) \left( 4 + \frac{4}{4\sqrt{3x-2} + 2x + 2} + \frac{1}{4\sqrt{10-x} - x + 13} + \frac{4}{4\sqrt{5x+4} + 2x + 10} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (n) \\ x = 9 & (n) \\ 4 + \frac{4}{4\sqrt{3x-2} + 2x + 2} + \frac{1}{4\sqrt{10-x} - x + 13} + \frac{4}{4\sqrt{5x+4} + 2x + 10} = 0 \quad (VN). \end{cases} \end{aligned}$$

☺ Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm  $x = 1$  hoặc  $x = 9$ .

d.  $2\sqrt{3x+4} + 3\sqrt{5x+9} = x^2 + 6x + 13.$

☺ Nhận thấy  $\begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$  là nghiệm

☑ Phương trình  $\Leftrightarrow [2\sqrt{3x+4} - (2x+4)] + [3\sqrt{5x+9} - (3x+9)] = x^2 + x$ .

$$\Leftrightarrow \frac{-4x^2 - 4x}{2\sqrt{3x+4} + 2x + 4} + \frac{-9x^2 - 9x}{3\sqrt{5x+9} + 3x + 9} = x^2 + x$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x) \left( 1 + \frac{4}{2\sqrt{3x+4} + 2x + 4} + \frac{9}{3\sqrt{5x+9} + 3x + 9} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (n) \\ x = -1 & (n) \\ 1 + \frac{4}{2\sqrt{3x+4} + 2x + 4} + \frac{9}{3\sqrt{5x+9} + 3x + 9} = 0 & (VN). \end{cases}$$

☑ Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm  $x = -1$  hoặc  $x = 0$ .

e.  $(x+3)\sqrt{x^2+x+2} = x^2+3x+4$ .

☑ Nhận thấy  $\begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$  là nghiệm

☑ Phương trình  $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+2} = \frac{x^2+3x+4}{x+3} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+2} - 2 = \frac{x^2+3x+4}{x+3} - 2$ .

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x-2}{\sqrt{x^2+x+2}+2} = \frac{x^2+x-2}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x-2) \left( \frac{1}{\sqrt{x^2+x+2}+2} - \frac{1}{x+3} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+x+2}+2} - \frac{1}{x+3} = 0 & (VN) \end{cases}$$

☑ Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm  $x = 1$  hoặc  $x = -2$ .

#### Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

**Ghi chú:** Theo công văn số 5842/BGDĐT-VP ngày 01/09/2011 của BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO, từ năm học 2011, phần "Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối" là nội dung "đọc thêm".

$$|A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases} \quad |A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = \pm B \end{cases} \quad |A| = |B| \Leftrightarrow A = \pm B.$$

### B CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

**Câu 1.** Phương trình  $-2x^2 - 4x + 3 = m$  có nghiệm khi

Ⓐ  $m \leq 5$ .

Ⓑ  $m \geq 5$ .

Ⓒ  $m > 5$ .

Ⓓ  $m < 5$ .

🔗 **Lời giải.**

Ta có  $-2x^2 - 4x + 3 = m \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + m - 3 = 0$  Để phương trình có nghiệm thì  $\Delta' = 4 - 2(m-3) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 5$

🔗 Chọn đáp án Ⓐ.....

**Câu 2.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $m^2(x+m) = x+m$  có vô số nghiệm ?

Ⓐ  $m = \pm 1$ .

Ⓑ  $m = 0$  hoặc  $m = -1$ .

Ⓒ  $m = 0$  hoặc  $m = 1$ .

Ⓓ  $-1 < m < 1, m \neq 0$ .

🔗 **Lời giải.**

Ta có  $m^2(x+m) = x+m \Leftrightarrow (m^2-1)(x+m) = 0$

Để phương trình trên có vô số nghiệm thì  $m = \pm 1$

🔗 Chọn đáp án Ⓐ.....

**Câu 3.** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình  $x^2 - 2x - 8 = 0$  là

Ⓐ 17.

Ⓑ 20.

Ⓒ 12.

Ⓓ 10.

🔗 **Lời giải.**

Theo định lí Viet ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -8 \end{cases}$ . Do đó  $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 20$

Chọn đáp án **(B)**.

**Câu 4.** Tổng lập phương hai nghiệm của phương trình  $x^2 - 2x - 8 = 0$  là

**(A)** 40.

**(B)** -40.

**(C)** 52.

**(D)** 56.

Lời giải.

Theo định lí Viet ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -8 \end{cases}$ . Do đó  $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 56$

Chọn đáp án **(D)**.

**Câu 5.** Phương trình  $x^4 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})x^2 = 0$  có bao nhiêu nghiệm ?

**(A)** 1.

**(B)** 2.

**(C)** 3.

**(D)** 4.

Lời giải.

Ta có  $x^4 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2[x^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \end{cases}$

Chọn đáp án **(C)**.

**Câu 6.** Phương trình  $1,5x^4 - 2,6x^2 - 1 = 0$  có bao nhiêu nghiệm ?

**(A)** 1.

**(B)** 2.

**(C)** 3.

**(D)** 4.

Lời giải.

Đặt  $t = x^2 \geq 0$ , khi đó phương trình đã cho được viết lại  $1,5t^2 - 2,6t - 1 = 0$ .

Dễ thấy phương trình trên có hai nghiệm trái dấu, do đó phương trình đã cho chỉ có 2 nghiệm.

Chọn đáp án **(B)**.

**Câu 7.** Với giá trị nào của  $m$  để phương trình  $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0$  có hai nghiệm thỏa  $x_1^2 + x_2^2 = 8$  ?

**(A)**  $\begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}$ .

**(B)**  $\begin{cases} m = -2 \\ m = -1 \end{cases}$ .

**(C)**  $\begin{cases} m = 2 \\ m = 1 \end{cases}$ .

**(D)**  $\begin{cases} m = -2 \\ m = 1 \end{cases}$ .

Lời giải.

Để phương trình có nghiệm là  $\Delta' = (m-1)^2 - (m^2 - 3m) = m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$ .

Theo định lí Viet ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1x_2 = m^2 - 3m \end{cases}$ .

Ta có  $x_1^2 + x_2^2 = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 8 \Leftrightarrow 2[2(m-1)^2 - (m^2 - 3m)] = 8 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$

Chọn đáp án **(A)**.

**Câu 8.** Tìm điều kiện xác định của phương trình  $1 + \frac{2}{x-2} = \frac{10}{x+3} - \frac{50}{(2-x)(x+3)}$

**(A)**  $\begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 3 \end{cases}$ .

**(B)**  $\begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -3 \end{cases}$ .

**(C)**  $\begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq -3 \end{cases}$ .

**(D)**  $\begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$ .

Lời giải.

Điều kiện xác định  $\begin{cases} x-2 \neq 0 \\ x+3 \neq 0 \\ (x-2)(x+3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -3 \end{cases}$

Chọn đáp án **(B)**.

**Câu 9.** Nghiệm của phương trình  $\frac{2x}{x-3} + \frac{5x+3}{x+3} = 1$  là

**(A)**  $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ .

**(B)**  $x = -1$ .

**(C)**  $x = 0$ .

**(D)**  $x = 1$ .

Lời giải.

Ta có  $\frac{2x}{x-3} + \frac{5x+3}{x+3} = 1 \Leftrightarrow 2x(x+3) + (x-3)(5x+3) = x^2 - 9 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Chọn đáp án **(A)**.

**Câu 10.** Cho phương trình  $\frac{1}{4}x^2 - (m-3)x + m^2 - 2m + 7 = 0$ . Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

**(A)**  $m \geq \frac{1}{2}$ .

**(B)**  $m < -\frac{1}{2}$ .

**(C)**  $m > \frac{1}{2}$ .

**(D)**  $m < \frac{1}{2}$ .

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta = (m-3)^2 - (m^2 - 2m + 7) > 0 \Leftrightarrow -4m + 2 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$$

🔍 Chọn đáp án **(D)**.

**Câu 11.** Cho phương trình  $x^2 - 2mx + m^2 - m = 0$ . Tất cả các tham số  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1^2 + x_2^2 = 3x_1x_2$ .

- (A)  $\begin{cases} m = 0 \\ m = 5 \end{cases}$  (B)  $\begin{cases} m = 0 \\ m = 5 \end{cases}$  (C)  $m = 0$ . (D)  $m = 5$ .

🔍 Lời giải.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì  $\Delta' = m^2 - (m^2 - m) = m > 0$ .

Theo định lý Viet ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - m \end{cases}$ . Khi đó ta có

$$x_1^2 + x_2^2 = 3x_1x_2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 = 5x_1x_2 \Leftrightarrow 4m^2 = 5(m^2 - m) \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (loại)} \\ m = 5 \end{cases}$$

🔍 Chọn đáp án **(D)**.

**Câu 12.** Nghiệm của phương trình  $|3x - 1| = 5$  là

- (A)  $x = 2$ . (B)  $x = \frac{1}{3}$ . (C)  $\begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$ . (D)  $\begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases}$ .

🔍 Lời giải.

$$\text{Để thấy rằng } |3x - 1| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

🔍 Chọn đáp án **(D)**.

**Câu 13.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m + 4 = 0$ . Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa  $x_1^2 + x_2^2 = 20$ .

- (A)  $\begin{cases} m = -3 \\ m = 4 \end{cases}$  (B)  $m = 4$ . (C)  $m = -3$ . (D)  $\begin{cases} m = 3 \\ m = -4 \end{cases}$ .

🔍 Lời giải.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì  $\Delta' = (m-1)^2 - (m^2 - 3m + 4) = m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > 3$ .

Theo định lý Viet ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 3m + 4 \end{cases}$ . Khi đó

$$x_1^2 + x_2^2 = 20 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 20 \Leftrightarrow 2m^2 - 2m - 4 = 20 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = 4 \end{cases}$$

🔍 Chọn đáp án **(A)**.

**Câu 14.** Phương trình  $x^2 - 2x + m = 0$  có nghiệm khi

- (A)  $m \leq 1$ . (B)  $m \geq 1$ . (C)  $m \geq -1$ . (D)  $m \leq -1$ .

🔍 Lời giải.

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi  $\Delta = 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$

🔍 Chọn đáp án **(A)**.

**Câu 15.** Phương trình  $x^2 - 2x - m = 0$  có nghiệm khi

- (A)  $m \leq 1$ . (B)  $m \geq 1$ . (C)  $m \geq -1$ . (D)  $m \leq -1$ .

🔍 Lời giải.

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi  $\Delta = 1 + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$

🔍 Chọn đáp án **(C)**.

**Câu 16.** Phương trình  $4x^2 - 4x + m + 1 = 0$  có nghiệm khi

- (A)  $m \leq 0$ . (B)  $m \geq 0$ . (C)  $m \geq 1$ . (D)  $m \leq -1$ .

🔍 Lời giải.

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi  $\Delta' = -4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$

🔍 Chọn đáp án **(A)**.

**Câu 17.** Phương trình  $4x^2 - 4x + m + 1 = 0$  vô nghiệm khi

- (A)  $m < 0$ . (B)  $m > 0$ . (C)  $m > 1$ . (D)  $m < 1$ .

**Lời giải.**

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi  $\Delta' = -4m < 0 \Leftrightarrow m > 0$

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 18.** Cho phương trình  $ax + b = 0$ . Chọn mệnh đề đúng ?

- (A) Nếu phương trình có nghiệm thì  $a \neq 0$ . (B) Nếu phương trình vô nghiệm thì  $a = 0$ .  
(C) Nếu phương trình vô nghiệm thì  $b = 0$ . (D) Nếu phương trình có nghiệm thì  $b \neq 0$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $ax + b = 0$  có nghiệm khi và chỉ khi  $\begin{cases} a \neq 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ .

Phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi  $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 19.** Phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

- (A)  $a = 0$ . (B)  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ .  
(C)  $a = b = 0$ . (D)  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \\ a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ .

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 20.** Phương trình  $x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0$

- (A) Có 2 nghiệm trái dấu. (B) Có hai nghiệm âm phân biệt.  
(C) Có hai nghiệm dương phân biệt. (D) Vô nghiệm.

**Lời giải.**

Để thấy rằng phương trình có hai nghiệm  $x = \sqrt{3}$  và  $x = 2$  nên có hai nghiệm dương phân biệt.

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 21.** Phương trình  $x^2 + m = 0$  có nghiệm khi và chỉ khi

- (A)  $m > 0$ . (B)  $m < 0$ . (C)  $m \leq 0$ . (D)  $m \geq 0$ .

**Lời giải.**

Ta có  $x^2 + m = 0 \Leftrightarrow x^2 = -m$ . Để phương trình này có nghiệm thì  $-m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 22.** Cho phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  (1). Hãy chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau ?

- (A) Nếu  $P < 0$  thì (1) có hai nghiệm trái dấu.  
(B) Nếu  $P > 0$  và  $S < 0$  thì (1) có hai nghiệm.  
(C) Nếu  $P > 0$ ,  $S < 0$  và  $\Delta > 0$  thì (1) có 2 nghiệm âm.  
(D) Nếu  $P > 0$ ,  $S > 0$  và  $\Delta > 0$  thì (1) có 2 nghiệm dương.

**Lời giải.**

Mệnh đề "Nếu  $P > 0$  và  $S < 0$  thì (1) có hai nghiệm" sai vì phương trình  $x^2 + x + 2021 = 0$  vô nghiệm thực

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 23.** Cho phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  (với  $a \neq 0$ ). Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi

- (A)  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$ . (B)  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$ . (C)  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$ . (D)  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 24.** Cho phương trình  $(\sqrt{3} + 1)x^2 + (2 - \sqrt{5})x + \sqrt{2} - \sqrt{3} = 0$ . Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- (A) Phương trình vô nghiệm. (B) Phương trình có hai nghiệm dương.  
(C) Phương trình có hai nghiệm trái dấu. (D) Phương trình có hai nghiệm âm.

**Lời giải.**

Ta có  $P = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} < 0$  nên phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu.

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 25.** Hai số  $1 - \sqrt{2}$  và  $1 + \sqrt{2}$  là hai nghiệm của phương trình

- (A)  $x^2 - 2x - 1 = 0$ . (B)  $x^2 + 2x - 1 = 0$ . (C)  $x^2 + 2x + 1 = 0$ . (D)  $x^2 - 2x + 1 = 0$ .

**Lời giải.**

Ta có  $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = 2$  và  $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = 3$  nên phương trình nhận hai số  $1 - \sqrt{2}$  và  $1 + \sqrt{2}$  làm hai nghiệm là  $x^2 - 2x + 3 = 0$ .

**Câu 26.**  $\sqrt{2}$  và  $\sqrt{3}$  là hai nghiệm của phương trình

- (A)  $x^2 - (\sqrt{2} - \sqrt{3})x - \sqrt{6} = 0$ . (B)  $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$ .  
(C)  $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$ . (D)  $x^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})x - \sqrt{6} = 0$ .

**Lời giải.**

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 27.** Phương trình  $(m^2 - m)x + m - 3 = 0$  là phương trình bậc nhất khi và chỉ khi

- (A)  $m \neq 0$ . (B)  $m \neq 1$ . (C)  $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$ . (D)  $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

Để phương trình đã cho là phương trình bậc nhất thì  $m^2 - m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$

**Chọn đáp án (D).**

**Câu 28.** Khẳng định nào trong các khẳng định sau là sai

- (A) Phương trình  $3x + 5 = 0$  có nghiệm là  $x = -\frac{5}{3}$ .  
(B) Phương trình  $0x - 7 = 0$  vô nghiệm.  
(C) Phương trình  $0x + 0 = 0$  có tập nghiệm là  $\mathbb{R}$ .  
(D) Phương trình  $m^2x = 1$  có nghiệm duy nhất với mọi  $m \in \mathbb{R}$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $m^2x = 1$  có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi  $m \neq 0$  và vô nghiệm khi  $m = 0$ .

**Chọn đáp án (D).**

**Câu 29.** Phương trình  $(a - 3)x + b = 0$  vô nghiệm với giá trị  $a, b$  là

- (A)  $a = 3, b$  tùy ý. (B)  $a$  tùy ý,  $b = 2$ . (C)  $a = 3, b = 2$ . (D)  $a = 3, b \neq 2$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $(a - 3)x + b = 0$  vô nghiệm khi và chỉ khi  $\begin{cases} a = 3 \\ b \neq 0 \end{cases}$ .

**Câu 30.** Cho phương trình  $x^2 + 7x - 260 = 0$  (1). Biết rằng phương trình có nghiệm  $x_1 = 13$ . Hỏi  $x_2$  bằng bao nhiêu

- (A) -27. (B) -20. (C) 20. (D) 8.

**Lời giải.**

Theo định lí Viet ta có  $x_1 + x_2 = -7$  mà  $x_1 = 13$  nên  $x_2 = -20$

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 31.** Phương trình  $(m^2 - 4m + 3)x = m^2 - 3m + 2$  có nghiệm duy nhất khi

- (A)  $m \neq 1$ . (B)  $m \neq 3$ . (C)  $m \neq 1$  và  $m \neq 3$ . (D)  $m = 1$  và  $m = 3$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $(m^2 - 4m + 3)x = m^2 - 3m + 2$  có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi  $m^2 - 4m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 3 \end{cases}$ .

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 32.** Phương trình  $(m^2 - 2m)x = m^2 - 3m + 2$  có nghiệm khi

- (A)  $m = 0$ . (B)  $m = 2$ . (C)  $m \neq 0$  và  $m \neq 2$ . (D)  $m \neq 0$ .

 **Lời giải.**

Phương trình  $(m^2 - 2m)x = m^2 - 3m + 2$  vô nghiệm khi và chỉ khi  $\begin{cases} m^2 - 2m = 0 \\ m^2 - 3m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \\ m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$ .

Do đó phương trình có nghiệm khi  $m \neq 0$ .

 **Chọn đáp án D** .....

**Câu 33.** Tìm  $m$  để phương trình  $(m^2 - 4)x = m(m + 2)$  có tập nghiệm  $\mathbb{R}$ .

**(A)**  $m = 2$ .

**(B)**  $m = -2$ .

**(C)**  $m = 0$ .

**(D)**  $m \neq -2$  và  $m \neq 2$ .

 **Lời giải.**

Phương trình  $(m^2 - 4)x = m(m + 2)$  có tập nghiệm  $\mathbb{R}$  khi và chỉ khi  $\begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ m(m + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$ .

 **Chọn đáp án B** .....

**Câu 34.** Phương trình  $(m^2 - 3m + 2)x + m^2 + 4m + 5 = 0$  có tập nghiệm là  $\mathbb{R}$  khi

**(A)**  $m = -2$ .

**(B)**  $m = -5$ .

**(C)**  $m = 1$ .

**(D)** Không tồn tại  $m$ .

 **Lời giải.**

Phương trình  $(m^2 - 3m + 2)x + m^2 + 4m + 5 = 0$  có tập nghiệm là  $\mathbb{R}$  khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ m^2 + 4m + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \\ m \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

 **Chọn đáp án D** .....

**Câu 35.** Phương trình  $(m^2 - 5m + 6)x = m^2 - 2m$  vô nghiệm khi

**(A)**  $m = 1$ .

**(B)**  $m = 6$ .

**(C)**  $m = 2$ .

**(D)**  $m = 3$ .

 **Lời giải.**

Phương trình  $(m^2 - 5m + 6)x = m^2 - 2m$  vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2 - 5m + 6 = 0 \\ m^2 - 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \\ m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

 **Chọn đáp án D** .....

**Câu 36.** Phương trình  $(m + 1)^2x + 1 = (7m - 5)x + m$  vô nghiệm khi

**(A)**  $m = 2$  hoặc  $m = 3$ .

**(B)**  $m = 2$ .

**(C)**  $m = 1$ .

**(D)**  $m = 3$ .

 **Lời giải.**

Phương trình  $(m + 1)^2x + 1 = (7m - 5)x + m \Leftrightarrow (m^2 - 5m + 6)x = m - 1$  (1).

Phương trình (1) vô nghiệm khi và chỉ khi  $\begin{cases} m^2 - 5m + 6 = 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \\ m \neq 1 \end{cases}$ .

 **Chọn đáp án A** .....

**Câu 37.** Điều kiện để phương trình  $m(x - m + 3) = m(x - 2) + 6$  vô nghiệm là

**(A)**  $m = 2$  hoặc  $m = 3$ .

**(B)**  $m \neq 2$  và  $m \neq 3$ .

**(C)**  $m \neq 2$  hoặc  $m = 3$ .

**(D)**  $m = 2$  hoặc  $m \neq 3$ .

 **Lời giải.**

Phương trình  $m(x - m + 3) = m(x - 2) + 6 \Leftrightarrow mx - m^2 + 3m = mx - 2m + 6 \Leftrightarrow 0x = m^2 - 5m + 6$  (1).

Phương trình (1) vô nghiệm khi và chỉ khi  $m^2 - 5m + 6 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq 3 \end{cases}$ .

 **Chọn đáp án B** .....

**Câu 38.** Phương trình  $(m - 1)x^2 + 3x - 1 = 0$  có nghiệm khi

**(A)**  $m \geq -\frac{5}{4}$ .

**(B)**  $m \leq -\frac{5}{4}$ .

**(C)**  $m = -\frac{5}{4}$ .

**(D)**  $m = \frac{5}{4}$ .

 **Lời giải.**

 Với  $m = 1$ , ta có  $3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$  (nhận).

☉ Với  $m \neq 1$ , ta có phương trình bậc hai  $(m-1)x^2 + 3x - 1 = 0$  có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 9 - 4(m-1)(-1) \geq 0 \Leftrightarrow 4m + 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{4}.$$

Vậy phương trình  $(m-1)x^2 + 3x - 1 = 0$  có nghiệm khi  $m \geq -\frac{5}{4}$ .

🔍 Chọn đáp án **(A)**.

**Câu 39.** Cho phương trình  $x^2 + 2(m+2)x - 2m - 1 = 0$ . Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình đã cho có nghiệm?

**(A)**  $m \leq -5$  hoặc  $m \geq -1$ .

**(B)**  $m < -5$  hoặc  $m > -1$ .

**(C)**  $-5 \leq m \leq -1$ .

**(D)**  $m \leq 1$  hoặc  $m \geq 5$ .

🔍 Lời giải.

Phương trình  $x^2 + 2(m+2)x - 2m - 1 = 0$  có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 - (-2m-1) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 5 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -5 \\ m \geq -1. \end{cases}$$

🔍 Chọn đáp án **(A)**.

**Câu 40.** Cho phương trình  $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$ . Khẳng định nào sau đây sai?

**(A)** Nếu  $m > 4$  thì phương trình vô nghiệm.

**(B)** Nếu  $m \leq 4$  và  $m \neq 0$  thì phương trình có nghiệm  $x = \frac{m-2-\sqrt{4-m}}{m}$ ,  $x = \frac{m-2+\sqrt{4-m}}{m}$ .

**(C)** Nếu  $m = 0$  thì phương trình có nghiệm  $x = \frac{3}{4}$ .

**(D)** Nếu  $m = 4$  thì phương trình có nghiệm kép  $x = \frac{3}{4}$ .

🔍 Lời giải.

☉ Với  $m = 0$ , ta có phương trình:  $4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$ .

☉ Với  $m \neq 0$ , ta có phương trình bậc hai  $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$  có  $\Delta' = (m-2)^2 - m(m-3) = -m + 4$ .

•  $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > 4$ : Phương trình vô nghiệm.

•  $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 4$ : Phương trình có nghiệm kép  $x = \frac{m-2}{m} = \frac{1}{2}$ .

•  $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 4$ : Phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x = \frac{m-2-\sqrt{4-m}}{m}$ ,  $x = \frac{m-2+\sqrt{4-m}}{m}$ .

🔍 Chọn đáp án **(D)**.

**Câu 41.** Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình  $mx^2 + 2(m-2)x + m - 3 = 0$  có hai nghiệm phân biệt?

**(A)**  $m \leq 4$ .

**(B)**  $m < 4$ .

**(C)**  $m < 4$  và  $m \neq 0$ .

**(D)**  $m \neq 0$ .

🔍 Lời giải.

Phương trình  $mx^2 + 2(m-2)x + m - 3 = 0$  có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -m + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < 4. \end{cases}$$

🔍 Chọn đáp án **(C)**.

**Câu 42.** Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình  $(m+1)x^2 - 6(m+1)x + 2m + 3 = 0$  có nghiệm kép?

**(A)**  $m = \frac{7}{6}$ .

**(B)**  $m = \frac{6}{7}$ .

**(C)**  $m = -\frac{6}{7}$ .

**(D)**  $m = -1$ .

🔍 Lời giải.

Phương trình  $(m+1)x^2 - 6(m+1)x + 2m + 3 = 0$  có nghiệm kép khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m+1 \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ 9(m+1)^2 - (m+1)(2m+3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ 7m^2 + 13m + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ \begin{bmatrix} m = -\frac{6}{7} \\ m = -1 \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{6}{7}.$$

🔍 Chọn đáp án **(C)**.

**Câu 43.** Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình  $2(x^2 - 1) = x(mx + 1)$  có nghiệm duy nhất?

- (A)  $m = \frac{17}{8}$ . (B)  $m = 2$  hoặc  $m = \frac{17}{8}$ . (C)  $m = 2$ . (D)  $m = 0$ .

**Lời giải.**

Ta có  $2(x^2 - 1) = x(mx + 1) \Leftrightarrow (m - 2)x^2 + x + 2 = 0$ .

☑ Với  $m = 2$ , ta có phương trình  $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$  (nhận).

☑ Với  $m \neq 2$ , phương trình bậc hai có nghiệm duy nhất  $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow -8m + 17 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{17}{8}$ .

Vậy  $m = 2$  hoặc  $m = \frac{17}{8}$ .

☞ Chọn đáp án (B).

**Câu 44.** Để hai đồ thị  $y = -x^2 - 2x + 3$  và  $y = x^2 - m$  có hai điểm chung thì

- (A)  $m = -3, 5$ . (B)  $m < -3, 5$ . (C)  $m > -3, 5$ . (D)  $m \geq -3, 5$ .

**Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm:  $-x^2 - 2x + 3 = x^2 - m \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - m - 3 = 0$  (1).

Để hai đồ thị có hai điểm chung thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 2m + 7 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{7}{2} = -3,5.$$

☞ Chọn đáp án (C).

**Câu 45.** Nghiệm của phương trình  $x^2 - 3x + 5 = 0$  có thể xem là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số

- (A)  $y = x^2$  và  $y = -3x + 5$ . (B)  $y = x^2$  và  $y = -3x - 5$ .  
(C)  $y = x^2$  và  $y = 3x - 5$ . (D)  $y = x^2$  và  $y = 3x + 5$ .

**Lời giải.**

Ta có  $x^2 - 3x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3x - 5$ .

☞ Chọn đáp án (C).

**Câu 46.** Gọi  $x_1, x_2$  là các nghiệm của phương trình  $x^2 - 3x - 1 = 0$ . Ta có tổng  $x_1^2 + x_2^2$  bằng

- (A) 8. (B) 9. (C) 10. (D) 11.

**Lời giải.**

Ta có  $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3^2 - 2(-1) = 11$ .

☞ Chọn đáp án (D).

**Câu 47.** Gọi  $x_1, x_2$  là các nghiệm của phương trình  $2x^2 - 4x - 1 = 0$ . Khi đó giá trị của  $T = |x_1 - x_2|$  bằng

- (A)  $\sqrt{2}$ . (B) 2. (C)  $\sqrt{6}$ . (D) 4.

**Lời giải.**

Ta có  $T^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 2^2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 6$ . Suy ra  $T = \sqrt{6}$ .

☞ Chọn đáp án (C).

**Câu 48.** Phương trình  $3(m + 4)x + 1 = 2x + 2(m - 3)$  có nghiệm duy nhất với giá trị của  $m$  bằng

- (A)  $m = \frac{4}{3}$ . (B)  $m = -\frac{3}{4}$ . (C)  $m \neq -\frac{10}{3}$ . (D)  $m \neq \frac{4}{3}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $3(m + 4)x + 1 = 2x + 2(m - 3) \Leftrightarrow (3m + 10)x = 2m - 7$ .

Phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi  $3m + 10 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\frac{10}{3}$ .

☞ Chọn đáp án (C).

**Câu 49.** Tìm  $m$  để phương trình  $(m^2 - 2)(x + 1) = x + 2$  vô nghiệm.

- (A)  $m = 0$ . (B)  $m = \pm 1$ . (C)  $m = \pm 2$ . (D)  $m = \pm\sqrt{3}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $(m^2 - 2)(x + 1) = x + 2 \Leftrightarrow (m^2 - 3)x = 4 - m^2$  vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2 - 3 = 0 \\ 4 - m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm\sqrt{3} \\ m \neq \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}.$$

☞ Chọn đáp án (D).

**Câu 50.** Tập nghiệm của phương trình  $(m^2 - 9)x + 6 - 2m = 0$  trong trường hợp  $m^2 - 9 \neq 0$  là  
 (A)  $\mathbb{R}$ . (B)  $\emptyset$ . (C)  $\left\{\frac{2}{m-3}\right\}$ . (D)  $\left\{\frac{2}{m+3}\right\}$ .

**Lời giải.**

Với  $m^2 - 9 \neq 0$ , ta có  $x = \frac{2m-6}{m^2-9} = \frac{2}{m+3}$ .

**Chọn đáp án (D).**

**Câu 51.** Hiện tại tuổi cha của An gấp 3 lần tuổi của An, 5 năm trước tuổi cha An gấp 4 lần tuổi An. Hỏi cha An sinh An lúc bao nhiêu tuổi?

(A) 30. (B) 25. (C) 35. (D) 28.

**Lời giải.**

Gọi  $x$  là số tuổi của An hiện tại ( $x \in \mathbb{N}$ ). Suy ra số tuổi của cha An hiện tại là  $3x$ .

5 năm trước tuổi cha An gấp 4 lần tuổi An nên ta có phương trình:  $3x - 5 = 4(x - 5)$ .

Giải phương trình trên ta được  $x = 15$ . Suy ra hiện tại An 15 tuổi và cha An 45 tuổi.

Như vậy cách đây 15 năm, cha An sinh ra An nên lúc đó ông 30 tuổi.

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 52.** Tập nghiệm của phương trình  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$  là

(A)  $S = \{1, 4\}$ . (B)  $S = \{1, 2, -2\}$ . (C)  $S = \{-1, 1, 2, -2\}$ . (D)  $S = \{1, 2\}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$ .

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 53.** Tìm giá trị của  $m$  để phương trình  $2x^2 - 3x + m = 0$  có một nghiệm bằng 1. Tìm nghiệm còn lại.

(A)  $m = 1$  và  $x_2 = \frac{1}{2}$ . (B)  $m = -1$  và  $x_2 = \frac{1}{2}$ . (C)  $m = -1$  và  $x_2 = -\frac{1}{2}$ . (D)  $m = 1$  và  $x_2 = -\frac{1}{2}$ .

**Lời giải.**

Thay  $x = 1$  vào phương trình ta được:  $2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + m = 0 \Leftrightarrow m = 1$ .

Khi đó ta có phương trình:  $2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$ .

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 54.** Tìm giá trị  $m$  để phương trình  $mx^2 - 3x - 5 = 0$  có một nghiệm bằng  $-1$ .

(A)  $m = 4$ . (B)  $m = -4$ . (C)  $m = 2$ . (D)  $m = -2$ .

**Lời giải.**

Thay  $x = -1$  vào phương trình ta được:  $m(-1)^2 - 3(-1) - 5 = 0 \Leftrightarrow m = 2$ .

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 55.** Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình  $(m-1)x^2 + 3x - 1 = 0$  có hai nghiệm phân biệt trái dấu?

(A)  $m > 1$ . (B)  $m < 1$ . (C) Với mọi  $m$ . (D) Không tồn tại  $m$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $(m-1)x^2 + 3x - 1 = 0$  có hai nghiệm phân biệt trái dấu  $\Leftrightarrow (m-1)(-1) < 0 \Leftrightarrow m > 1$ .

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 56.** Cho phương trình  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) (1). Đặt  $\Delta = b^2 - 4ac$ ,  $S = \frac{-b}{a}$ ,  $P = \frac{c}{a}$ . Phương trình (1) vô nghiệm khi và chỉ khi

(A)  $\Delta < 0$ . (B)  $\Delta < 0$  hoặc  $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$ . (C)  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ . (D)  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

Đặt  $x^2 = t$  ( $t \geq 0$ ). Khi đó (1)  $\Leftrightarrow at^2 + bt + c = 0$  (2).

Phương trình (1) vô nghiệm khi và chỉ khi (2) vô nghiệm hoặc có nghiệm âm.

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 57.** Cho phương trình  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) (1). Đặt  $\Delta = b^2 - 4ac$ ,  $S = \frac{-b}{a}$ ,  $P = \frac{c}{a}$ . Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

(A)  $\Delta > 0$ . (B)  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$ . (C)  $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$ . (D)  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

Đặt  $x^2 = t$  ( $t \geq 0$ ). Khi đó (1)  $\Leftrightarrow at^2 + bt + c = 0$  (2).

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có 2 nghiệm dương phân biệt  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0. \end{cases}$

**Chọn đáp án B.**

**Câu 58.** Để phương trình  $m^2(x-1) = 4x + 5m + 4$  có nghiệm âm thì giá trị thích hợp cho tham số  $m$  là

**A**  $m < -4$  hay  $m > -2$ .

**B**  $-4 < m < -2$  hay  $-1 < m < 2$ .

**C**  $m < -2$  hay  $m > 2$ .

**D**  $m < -4$  hay  $m > -1$ .

**Lời giải.**

Ta có  $m^2(x-1) = 4x + 5m + 4 \Leftrightarrow (m^2 - 4)x = m^2 + 5m + 4$ .

Phương trình có nghiệm duy nhất  $\Leftrightarrow m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$ . Khi đó nghiệm của phương trình là  $x = \frac{m^2 + 5m + 4}{m^2 - 4}$ .

Để phương trình có nghiệm âm thì  $\frac{m^2 + 5m + 4}{m^2 - 4} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < -2 \\ -1 < m < 2. \end{cases}$

**Chọn đáp án B.**

**Câu 59.** Điều kiện cho tham số  $m$  để phương trình  $(m-1)x = m-2$  có nghiệm âm là

**A**  $m < 1$ .

**B**  $m = 1$ .

**C**  $1 < m < 2$ .

**D**  $m > 2$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $(m-1)x = m-2$  có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi  $m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ . Khi đó nghiệm  $x = \frac{m-2}{m-1}$ .

Để phương trình có nghiệm âm thì  $\frac{m-2}{m-1} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 < 0 \\ m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2$ .

**Chọn đáp án C.**

**Câu 60.** Cho phương trình  $m^3x = mx + m^2 - m$ . Tìm các giá trị của tham số  $m$  để phương trình có vô số nghiệm.

**A**  $m = 0$  hay  $m = 1$ .

**B**  $m = 0$  hay  $m = -1$ .

**C**  $m = -1$  hay  $m = 1$ .

**D** Không có giá trị nào của  $m$ .

**Lời giải.**

Ta có  $m^3x = mx + m^2 - m \Leftrightarrow (m^3 - m)x = m^2 - m$ .

Phương trình có vô số nghiệm  $\Leftrightarrow \begin{cases} m^3 - m = 0 \\ m^2 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1. \end{cases}$

**Chọn đáp án A.**

**Câu 61.** Cho phương trình bậc hai  $x^2 - 2(m+6)x + m^2 = 0$ . Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình có nghiệm kép và tìm nghiệm kép đó?

**A**  $m = -3, x_1 = x_2 = 3$ .

**B**  $m = -3, x_1 = x_2 = -3$ .

**C**  $m = 3, x_1 = x_2 = 3$ .

**D**  $m = 3, x_1 = x_2 = -3$ .

**Lời giải.**

Phương trình có nghiệm kép khi  $\Delta' = 0 \Leftrightarrow (m+6)^2 - m^2 = 0 \Leftrightarrow 12m + 36 = 0 \Leftrightarrow m = -3$ . Khi đó phương trình trở thành  $x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ .

**Chọn đáp án A.**

**Câu 62.** Cho phương trình  $(m-1)x^2 - 6(m-1)x + 2m - 3 = 0$ . Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình có nghiệm kép?

**A**  $m = \frac{7}{6}$ .

**B**  $m = -\frac{6}{7}$ .

**C**  $m = \frac{6}{7}$ .

**D**  $m = -1$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $(m-1)x^2 - 6(m-1)x + 2m - 3 = 0$  có nghiệm kép khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 9(m-1)^2 - (m-1)(2m-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 7m^2 - 13m + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \begin{cases} m = \frac{6}{7} \\ m = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{6}{7} \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{6}{7}.$$

**Chọn đáp án C.**

**Câu 63.** Để phương trình  $mx^2 + 2(m-3)x + m - 5 = 0$  vô nghiệm, với giá trị của  $m$  là

**A**  $m > 9$ .

**B**  $m \geq 9$ .

**C**  $m < 9$ .

**D**  $m < 9$  và  $m \neq 0$ .

**Lời giải.**

☑ Với  $m = 0$ , phương trình trở thành  $-6x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{6}$ . Vậy  $m = 0$  không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

☑ Phương trình  $mx^2 + 2(m-3)x + m-5 = 0$  vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m-3)^2 - m(m-5) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 9.$$

🔍 Chọn đáp án (A).....

**Câu 64.** Phương trình  $\frac{b}{x+1} = a$  có nghiệm duy nhất khi

(A)  $a \neq 0$ .

(B)  $a = 0$ .

(C)  $a \neq 0$  và  $b \neq 0$ .

(D)  $a = b = 0$ .

🔍 Lời giải.

Điều kiện  $x \neq -1$ . Phương trình đã cho tương đương  $ax + a - b = 0$ .

Yêu cầu bài toán tương đương phương trình  $ax + a - b = 0$  có nghiệm duy nhất khác  $-1$ .

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a \neq 0 \\ a(-1) + a - b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0. \end{cases}$$

🔍 Chọn đáp án (C).....

**Câu 65.** Với giá trị nào của tham số  $a$  thì phương trình  $(x^2 - 5x + 4)\sqrt{x-a} = 0$  có hai nghiệm phân biệt?

(A)  $a < 1$ .

(B)  $1 \leq a < 4$ .

(C)  $a \geq 4$ .

(D) không có  $a$ .

🔍 Lời giải.

Điều kiện  $x \geq a$ . Ta có

$$(x^2 - 5x + 4)\sqrt{x-a} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \\ x = a. \end{cases}$$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt, suy ra  $1 \leq a < 4$ .

🔍 Chọn đáp án (B).....

**Câu 66.** Số nghiệm của phương trình  $\sqrt{x-4}(x^2 - 3x + 2) = 0$  là

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

🔍 Lời giải.

Điều kiện  $x \geq 4$ . Ta có

$$\sqrt{x-4}(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 4. \end{cases}$$

So sánh với điều kiện ta được  $x = 4$  là nghiệm của phương trình.

**Câu 67.** Phương trình  $(x^2 - 3x + m)(x - 1) = 0$  có 3 nghiệm phân biệt khi

(A)  $m < \frac{9}{4}$ .

(B)  $m \leq \frac{9}{4}$  và  $m \neq 2$ .

(C)  $m < \frac{9}{4}$  và  $m \neq 2$ .

(D)  $m \geq \frac{9}{4}$ .

🔍 Lời giải.

Ta có

$$(x^2 - 3x + m)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + m = 0 \\ x - 1 = 0. \end{cases}$$

Để phương trình có ba nghiệm phân biệt, suy ra phương trình  $x^2 - 3x + m = 0$  có hai nghiệm phân biệt khác 1. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ 1 - 3 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 4m > 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{4} \\ m \neq 2. \end{cases}$$

🔍 Chọn đáp án (C).....

**Câu 68.** Phương trình  $x^6 + 2003x^3 - 2005 = 0$  có bao nhiêu nghiệm âm?

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 6.

🔍 Lời giải.

Đặt  $t = x^3$ . Khi đó phương trình trở thành  $t^2 + 2003t - 2005 = 0$ . Ta có  $ac = -2005 < 0$ , do đó phương trình có hai nghiệm trái dấu. Suy ra phương trình có một nghiệm âm.

🔍 Chọn đáp án (B).....

**Câu 69.** Cho phương trình  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  (1) ( $a \neq 0$ ). Đặt  $\Delta = b^2 - 4ac$ ,  $S = -\frac{b}{a}$ ,  $P = \frac{c}{a}$ . Phương trình (1) vô nghiệm khi và chỉ khi

- (A)  $\Delta < 0$ .                      (B)  $\Delta < 0$  hoặc  $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$ .                      (C)  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ .                      (D)  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P < 0 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

Đặt  $t = x^2$ ,  $t \geq 0$ . Phương trình trở thành  $at^2 + bt + c = 0$  (2).

Phương trình (1) vô nghiệm khi phương trình (2) vô nghiệm hoặc phương trình (2) có hai nghiệm âm. Điều này

tương đương với  $\Delta < 0$  hoặc  $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$ .

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 70.** Phương trình  $x^4 + (\sqrt{65} - \sqrt{3})x^2 + 2(8 + \sqrt{63}) = 0$  có bao nhiêu nghiệm?

- (A) 2.                      (B) 3.                      (C) 4.                      (D) 0.

**Lời giải.**

Ta có  $\Delta = (\sqrt{65} - \sqrt{3})^2 - 4 \cdot 2(8 + \sqrt{63}) < 0$ . Do đó phương trình vô nghiệm.

**Chọn đáp án (D).**

**Câu 71.** Phương trình  $-x^4 - 2(\sqrt{2} - 1)x^2 + 2(3 - 2\sqrt{2}) = 0$  (1) có bao nhiêu nghiệm?

- (A) 2.                      (B) 3.                      (C) 4.                      (D) 0.

**Lời giải.**

Đặt  $t = x^2$ ,  $t \geq 0$ . Phương trình (1) trở thành  $-t^2 - 2(\sqrt{2} - 1)t + 2(3 - 2\sqrt{2}) = 0$  (2). Vì  $ac = 2\sqrt{2} - 3 < 0$  nên phương trình (2) có hai nghiệm trái dấu. Do đó phương trình (1) có hai nghiệm.

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 72.** Phương trình  $-x^4 + \sqrt{2} - \sqrt{3}x^2 = 0$  (1) có bao nhiêu nghiệm?

- (A) 2.                      (B) 3.                      (C) 4.                      (D) 1.

**Lời giải.**

Đặt  $t = x^2$ ,  $t \geq 0$ . Phương trình (1) trở thành  $-t^2 - \sqrt{3}t + \sqrt{2} = 0$  (2). Vì  $ac = 2\sqrt{2} - 3 < 0$  nên phương trình (2) có hai nghiệm trái dấu. Do đó phương trình (1) có hai nghiệm.

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 73.** Phương trình  $x^4 - 2005x^2 - 13 = 0$  (1) có bao nhiêu nghiệm âm?

- (A) 2.                      (B) 3.                      (C) 0.                      (D) 1.

**Lời giải.**

Đặt  $t = x^2$ ,  $t \geq 0$ . Phương trình (1) trở thành  $t^2 - 2005t - 13 = 0$  (2). Vì  $ac = -13 < 0$  nên phương trình (2) có hai nghiệm trái dấu. Do đó phương trình (1) có hai nghiệm gồm 1 nghiệm âm và 1 nghiệm dương.

**Chọn đáp án (D).**

**Câu 74.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $(m^2 - 4)x = 3m + 6$  vô nghiệm.

- (A)  $m = 1$ .                      (B)  $m = 2$ .                      (C)  $m = \pm 2$ .                      (D)  $m = -2$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $(m^2 - 4)x = 3m + 6$  vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ 3m + 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 75.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $mx - m = 0$  vô nghiệm.

- (A)  $m \in \emptyset$ .                      (B)  $m = \{0\}$ .                      (C)  $m \in \mathbb{R}^+$ .                      (D)  $m \in \mathbb{R}$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $mx - m = 0$  vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 76.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $(m^2 - 5m + 6)x = m^2 - 3m$  vô nghiệm.

(A)  $m = 1$ .

(B)  $m = 2$ .

(C)  $m = 3$ .

(D)  $m = 6$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $(m^2 - 5m + 6)x = m^2 - 3m$  vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2 - 5m + 6 = 0 \\ m^2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \\ m \neq 0 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 77.** Cho phương trình  $(m + 1)^2x + 2 = (7m - 5)x + m$ . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình đã cho vô nghiệm

(A)  $m = 1$ .

(B)  $m = 2; m = 3$ .

(C)  $m = 2$ .

(D)  $m = 3$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $(m + 1)^2x + 2 = (7m - 5)x + m \Leftrightarrow (m^2 - 5m + 6)x = m - 2$  (1).

Phương trình (1) vô nghiệm khi và chỉ khi  $\begin{cases} m^2 - 5m + 6 = 0 \\ m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$ .

**Chọn đáp án (D).**

**Câu 78.** Cho hai hàm số  $y = (m + 1)x^2 + 3m^2x + m$  và  $y = (m + 1)x^2 + 12x + 2$ . Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hai hàm số đã cho không cắt nhau.

(A)  $m = 2$ .

(B)  $m = \pm 2$ .

(C)  $m = -2$ .

(D)  $m = 1$ .

**Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm  $(m + 1)x^2 + 3m^2x + m = (m + 1)x^2 + 12x + 2 \Leftrightarrow (3m^2 - 12)x + m - 2 = 0$

Đồ thị hai hàm số đã cho không cắt nhau khi và chỉ khi phương trình hoành độ giao điểm vô nghiệm. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} 3m^2 - 12 = 0 \\ m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 79.** Tìm tất cả giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $(2m - 4)x = m - 2$  có nghiệm duy nhất

(A)  $m = -1$ .

(B)  $m = 2$ .

(C)  $m \neq -1$ .

(D)  $m \neq 2$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $(2m - 4)x = m - 2$  có nghiệm duy nhất khi  $2m - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ . Vậy  $m \neq 2$  là các giá trị cần tìm.

**Chọn đáp án (D).**

**Câu 80.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-10; 10]$  để phương trình  $(m^2 - 9)x = 3m(m - 3)$  có nghiệm duy nhất?

(A) 2.

(B) 19.

(C) 20.

(D) 21.

**Lời giải.**

Phương trình  $(m^2 - 9)x = 3m(m - 3)$  có nghiệm duy nhất khi  $m^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 3$ .

Vì  $m \in [-10; 10]$  và  $m$  nguyên nên  $m \in \{-10; -9; \dots; -4; -2; -1; 0; 1; 2; 4; \dots; 10\}$ . Vậy có 19 giá trị cần tìm.

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 81.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-5; 10]$  để phương trình  $(m + 1)x = (3m^2 - 1)x + m - 1$  có nghiệm duy nhất. Tổng các phần tử trong  $S$  bằng

(A) 15.

(B) 16.

(C) 39.

(D) 40.

**Lời giải.**

Phương trình  $(m + 1)x = (3m^2 - 1)x + m - 1 \Leftrightarrow (3m^2 - m - 2)x + m - 1 = 0$  có nghiệm duy nhất khi

$$3m^2 - m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -\frac{2}{3} \end{cases}.$$

Vì  $m \in [-5; 10]$  và  $m$  nguyên nên  $m \in S = \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 2; 3; 4; \dots; 10\}$ . Vậy các phần tử của  $S$  bằng  $-1 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 39$ .

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 82.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $(m^2 + m)x = m + 1$  có nghiệm duy nhất  $x = 1$ .

- ☐ A  $m = -1$ .     
 ☐ B  $m \neq 0$ .     
 ☐ C  $m \neq -1$ .     
 ☐ D  $m = 1$ .

**Lời giải.**

Phương trình có nghiệm  $x = 1$ , suy ra  $(m^2 + m) \cdot 1 = m + 1 \Rightarrow m = \pm 1$ .

- ☒ Với  $m = 1$ , phương trình trở thành  $2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$  là nghiệm duy nhất, do đó  $m = 1$  thỏa mãn.  
☒ Với  $m = -1$ , phương trình trở thành  $0x = 0$ , phương trình vô số nghiệm, do đó  $m = -1$  không thỏa mãn.

**Chọn đáp án D**

**Câu 83.** Cho hai hàm số  $y = (m + 1)^2x - 2$  và  $y = (3m + 7)x + m$ . Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hai hàm số đã cho cắt nhau.

- ☐ A  $m \neq 2$ .     
 ☐ B  $m \neq -3$ .     
 ☐ C  $m \neq -2, m \neq 3$ .     
 ☐ D  $m = -2, m = 3$ .

**Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm  $(m + 1)^2x - 2 = (3m + 7)x + m \Leftrightarrow (m^2 - m - 6)x = m + 2$

Đồ thị hai hàm số đã cho cắt nhau khi và chỉ khi phương trình hoành độ giao điểm có nghiệm duy nhất. Điều này tương đương với

$$m^2 - m - 6 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 3 \end{cases}$$

**Chọn đáp án C**

**Câu 84.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $(m^2 - 1)x = m - 1$  có nghiệm đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

- ☐ A  $m = 1$ .     
 ☐ B  $m = \pm 1$ .     
 ☐ C  $m = -1$ .     
 ☐ D  $m = 0$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $(m^2 - 1)x = m - 1$  có nghiệm đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$  khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

**Chọn đáp án A**

**Câu 85.** Cho phương trình  $m^2x + 6 = 4x + 3m$ . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình đã cho có nghiệm.

- ☐ A  $m = 2$ .     
 ☐ B  $m \neq -2$ .     
 ☐ C  $m \neq -2, m \neq 2$ .     
 ☐ D  $m \in \mathbb{R}$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $m^2x + 6 = 4x + 3m \Leftrightarrow (m^2 - 4)x = 3m - 6$ .

Phương trình  $(m^2 - 4)x = 3m - 6$  vô nghiệm khi và chỉ khi  $\begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ 3m - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$ .

Do đó phương trình có nghiệm khi  $m \neq -2$ .

**Chọn đáp án B**

**Câu 86.** Cho phương trình  $(m^2 - 3m + 2)x + m^2 - 5m + 4 = 0$ . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

- ☐ A  $m = -2$ .     
 ☐ B  $m = -5$ .     
 ☐ C  $m = 1$ .     
 ☐ D Không tồn tại.

**Lời giải.**

Phương trình  $(m^2 - 3m + 2)x + m^2 - 5m + 4 = 0$  có nghiệm đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$  khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ m^2 - 5m + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \\ m = 1 \\ m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

**Chọn đáp án C**

**Câu 87.** Cho phương trình  $(m^2 - m)x = m^2 - 3m$ . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình đã cho có nghiệm.

(A)  $m = 0$ .

(B)  $m = 1$ .

(C)  $m \neq 0, m \neq 3$ .

(D)  $m \neq 1$ .

 **Lời giải.**

$$\text{Phương trình } (m^2 - 2m)x = m^2 - 3m \text{ vô nghiệm khi và chỉ khi } \begin{cases} m^2 - m = 0 \\ m^2 - 3m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m \neq 0 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Do đó phương trình có nghiệm khi  $m \neq 1$ .

 **Chọn đáp án (D)**

**Câu 88.** Cho hai hàm số  $y = (m + 1)x + 1$  và  $y = (3m^2 - 1)x + m$ . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hai hàm số đã cho trùng nhau.

(A)  $m = 1, m = -\frac{2}{3}$ .

(B)  $m \neq 1, m \neq -\frac{2}{3}$ .

(C)  $m = 1$ .

(D)  $m = -\frac{2}{3}$ .

 **Lời giải.**

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm } (m + 1)x + 1 = (3m^2 - 1)x + m \Leftrightarrow (3m^2 - m - 2)x = -m + 1$$

Đồ thị hai hàm số đã cho trùng nhau khi và chỉ khi phương trình hoành độ giao điểm có vô số nghiệm. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} 3m^2 - m - 2 = 0 \\ -m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{2}{3} \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

 **Chọn đáp án (C)**

**Câu 89.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-10; 10]$  để phương trình  $x^2 - x + m = 0$  vô nghiệm?

(A) 10.

(B) 9.

(C) 20.

(D) 21.

 **Lời giải.**

Phương trình  $x^2 - x + m = 0$  vô nghiệm khi và chỉ khi  $\Delta < 0 \Leftrightarrow 1 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$ . Vì  $m \in [-10; 10]$  và  $m$  nguyên nên  $m \in \{1; 2; \dots; 10\}$ . Vậy có 10 giá trị cần tìm.

 **Chọn đáp án (A)**

**Câu 90.** Phương trình  $2(x^2 - 1) = x(mx + 1)$  có nghiệm duy nhất khi

(A)  $m = \frac{17}{8}$ .

(B)  $m = 2; m = \frac{17}{8}$ .

(C)  $m = 2$ .

(D)  $m = -1$ .

 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } 2(x^2 - 1) = x(mx + 1) \Leftrightarrow (m - 2)x^2 + x + 2 = 0.$$

☉ Với  $m = 2$ , phương trình trở thành  $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ , phương trình có nghiệm duy nhất.

☉ Với  $m \neq 2$ , phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi  $\Delta = 0 \Leftrightarrow 17 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{17}{8}$ .

Vậy  $m = 2; m = \frac{17}{8}$  là hai giá trị cần tìm.

 **Chọn đáp án (B)**

**Câu 91.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $(m - 2)x^2 - 2x + 1 - 2m = 0$  có nghiệm duy nhất. Tổng các phần tử trong  $S$  bằng

(A)  $\frac{5}{2}$ .

(B) 3.

(C)  $\frac{7}{2}$ .

(D)  $\frac{9}{2}$ .

 **Lời giải.**

TH1.  $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$ . Khi đó phương trình trở thành  $-2x - 3 = 0$ . Phương trình này có duy nhất một nghiệm. Vậy nhận  $m = 2$ .

TH2.  $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ . Ta có  $\Delta' = 1 - (m - 2)(1 - 2m) = 2m^2 - 5m + 3$ .

$$\text{Phương trình có nghiệm duy nhất khi } \Delta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Vậy  $S = \left\{2; 1; \frac{3}{2}\right\}$ . Tổng các phần tử trong  $S$  bằng  $\frac{9}{2}$ .

🐞 Chọn đáp án **D**.

**Câu 92.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-5; 5]$  để phương trình  $mx^2 - 2(m+2)x + m - 1 = 0$  có hai nghiệm phân biệt?

**A** 5.

**B** 6.

**C** 9.

**D** 10.

🔗 Lời giải.

TH1.  $m = 0$ . Phương trình đã cho trở thành  $-4x - 1 = 0$ . Phương trình này có duy nhất một nghiệm. Vậy loại  $m = 0$ .

TH2.  $m \neq 0$ . Ta có  $\Delta' = (m+2)^2 - m(m-1) = 5m + 4$ .

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi  $\Delta > 0 \Leftrightarrow -3m + 4 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{4}{3}$ .

Vì  $m \in [-5; 5]$  nên ta nhận  $m \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ . Vậy có 6 giá trị  $m$  thỏa mãn.

🐞 Chọn đáp án **B**.

**Câu 93.** Phương trình  $(m^2 + 2)x^2 + (m - 2)x - 3 = 0$  có hai nghiệm phân biệt khi

**A**  $0 < m < 2$ .

**B**  $m > 2$ .

**C**  $m \in \mathbb{R}$ .

**D**  $m \leq 2$ .

🔗 Lời giải.

Ta có  $m^2 + 2 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ . Ta tính  $\Delta = (m - 2)^2 - 4(m^2 + 2)(-3) = 13m^2 - 4m + 28 > -0, \forall m \in \mathbb{R}$ .

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt với mọi  $m \in \mathbb{R}$ .

🐞 Chọn đáp án **C**.

**Câu 94.** Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để đường thẳng  $d: y = 2x + m$  tiếp xúc với parabol  $(P): y = (m - 1)x^2 + 2mx + 3m - 1$ .

**A**  $m = 1$ .

**B**  $m = -1$ .

**C**  $m = 0$ .

**D**  $m = 2$ .

🔗 Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của  $d$  và  $(P)$

$$2x + m = (m - 1)x^2 + 2mx + 3m - 1 \Leftrightarrow (m - 1)x^2 + 2(m - 1)x + 2m - 1 = 0. \quad (*)$$

$d$  tiếp xúc  $(P)$  khi phương trình  $(*)$  có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ (m - 1)^2 - (m - 1)(2m - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ -m^2 + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

**Câu 95.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-20; 20]$  để phương trình  $x^2 - 2mx + 144 = 0$  có nghiệm. Tổng các phần tử trong  $S$  bằng

**A** 21.

**B** 18.

**C** 1.

**D** 0.

🔗 Lời giải.

Phương trình đã cho có nghiệm khi

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 144 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 12 \\ m \geq 12. \end{cases}$$

Vì  $m$  nguyên và  $m \in [-20; 20]$  nên ta nhận  $m \in \{-20; -19; \dots, -12; 12; 13; \dots, 20\}$ . Vậy tổng các phần tử trong  $S$  bằng 0.

🐞 Chọn đáp án **D**.

**Câu 96.** Tìm tất cả giá trị thực của tham số  $m$  để hai đồ thị hàm số  $y = -x^2 - 2x + 3$  và  $y = x^2 - m$  có điểm chung.

**A**  $m = -\frac{7}{2}$ .

**B**  $m < -\frac{7}{2}$ .

**C**  $m > -\frac{7}{2}$ .

**D**  $m \geq -\frac{7}{2}$ .

🔗 Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của  $d$  và  $(P): -x^2 - 2x + 3 = x^2 - m \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - m - 3 = 0. \quad (*)$

Hai đồ thị có điểm chung khi phương trình  $(*)$  có nghiệm  $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1^2 - 2(-m - 3) \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{7}{2}$ .

🐞 Chọn đáp án **D**.

**Câu 97.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-10; 10]$  để phương trình  $mx^2 - mx + 1 = 0$  có nghiệm.

Ⓐ 17.

Ⓑ 18.

Ⓒ 20.

Ⓓ 21.

🔗 **Lời giải.**

Phương trình đã cho có nghiệm khi

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 4. \end{cases}$$

Vì  $m \in \mathbb{Z}$  và  $m \in [-10; 10]$  nên  $m \in \{-10; -9; \dots; 0; 4; 5; \dots; 10\}$ . Vậy có tất cả 18 giá trị của tham số  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

🔗 **Chọn đáp án Ⓑ.**

**Câu 98.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $3x^2 - (m+2)x + m - 1 = 0$  có một nghiệm gấp đôi nghiệm còn lại.

Ⓐ  $m \in \left\{\frac{5}{2}; 7\right\}$ .Ⓑ  $m \in \left\{-2; -\frac{1}{2}\right\}$ .Ⓒ  $m \in \left\{0; \frac{2}{5}\right\}$ .Ⓓ  $m \in \left\{-\frac{3}{4}; 1\right\}$ .

🔗 **Lời giải.**

Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình đã cho. Phương trình có hai nghiệm sao cho một nghiệm gấp đôi nghiệm

còn lại khi  $\begin{cases} \Delta > 0 & (1) \\ x_1 = 2x_2 & (2). \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow (m+2)^2 - 4 \cdot 3(m-1) > 0 \Leftrightarrow m \neq 4.$$

$$\text{Với } m \neq 4, \text{ theo định lý Vi-ét, ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m+2}{3} & (3) \\ x_1 x_2 = \frac{m-1}{3} & (4) \end{cases}$$

$$\text{Từ (2) và (3) suy ra } \begin{cases} x_2 = \frac{m+2}{9} \\ x_1 = \frac{2(m+2)}{9}. \end{cases}$$

$$\text{Thay vào (4), ta được } \frac{2(m+2)^2}{81} = \frac{m-1}{3}. \text{ Giải phương trình này ta được } m = \frac{5}{2} \text{ hoặc } m = 7.$$

$$\text{Vậy } m \in \left\{\frac{5}{2}; 7\right\}.$$

🔗 **Chọn đáp án Ⓐ.**

**Câu 99.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $3x^2 - 2(m+1)x + 3m - 5 = 0$  có một nghiệm gấp ba nghiệm còn lại.

Ⓐ  $m = 7$ .Ⓑ  $m = 3$ .Ⓒ  $m = 3; m = 7$ .Ⓓ  $m \in \emptyset$ .

🔗 **Lời giải.**

Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình đã cho. Phương trình có hai nghiệm sao cho một nghiệm gấp ba nghiệm

còn lại khi  $\begin{cases} \Delta' > 0 & (1) \\ x_1 = 3x_2 & (2). \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow (m+1)^2 - 3(3m-5) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 7m + 16 > 0 \text{ (luôn đúng } \forall m \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Theo định lý Vi-ét, ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m+1)}{3} & (3) \\ x_1 x_2 = \frac{3m-5}{3} & (4) \end{cases}$$

$$\text{Từ (2) và (3) suy ra } \begin{cases} x_2 = \frac{m+1}{6} \\ x_1 = \frac{m+1}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Thay vào (4) ta được } \frac{(m+1)^2}{12} = \frac{3m-5}{3}. \text{ Giải phương trình này ta được } m = 3 \text{ hoặc } m = 7.$$

🔗 **Chọn đáp án Ⓒ.**

**Câu 100.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $(x-1)(x^2 - 4mx - 4) = 0$  có ba nghiệm phân biệt?

Ⓐ  $m \in \mathbb{R}$ .Ⓑ  $m \neq \emptyset$ .Ⓒ  $m \neq \frac{3}{4}$ .Ⓓ  $m \neq -\frac{3}{4}$ .

🔗 **Lời giải.**

$$\text{Phương trình } (x-1)(x^2 - 4mx - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 4mx - 4 = 0 \end{cases} (*)$$

Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt khi (\*) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1^2 - 4m - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m)^2 + 4 > 0 \\ m \neq -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m \neq -\frac{3}{4}.$$

Chọn đáp án **D**.

**Câu 101.** Phương trình  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  có hai nghiệm phân biệt cùng dấu khi và chỉ khi

**A**  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$       **B**  $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$       **C**  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \end{cases}$       **D**  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ .

Lời giải.

Chọn đáp án **A**.

**Câu 102.** Phương trình  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi

**A**  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$       **B**  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$       **C**  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$       **D**  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ .

Lời giải.

Chọn đáp án **C**.

**Câu 103.** Phương trình  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

**A**  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \end{cases}$       **B**  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \end{cases}$       **C**  $P < 0$ .      **D**  $P > 0$ .

Lời giải.

Chọn đáp án **C**.

**Câu 104.** Phương trình  $x^2 - mx + 1 = 0$  có hai nghiệm âm phân biệt khi

**A**  $m < -2$ .      **B**  $m > 2$ .      **C**  $m \geq -2$ .      **D**  $m \neq 0$ .

Lời giải.

Phương trình  $x^2 - mx + 1 = 0$  có hai nghiệm âm phân biệt khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 > 0 \\ m < 0 \\ 1 > 0 \text{ (luôn đúng)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \text{ hay } m > 2 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2.$$

Chọn đáp án **A**.

**Câu 105.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc  $[-5; 5]$  để phương trình  $x^2 + 4mx + m^2 = 0$  có hai nghiệm âm phân biệt?

**A** 5.      **B** 6.      **C** 10.      **D** 11.

Lời giải.

Phương trình  $x^2 + 4mx + m^2 = 0$  có hai nghiệm âm phân biệt khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m)^2 - 1 \cdot m^2 > 0 \\ -4m < 0 \\ m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 > 0 \\ m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Vì  $m \in [-5; 5]$  nên có 5 giá trị nguyên của  $m$  thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án **A**.

**Câu 106.** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $mx^2 + x + m = 0$  có hai nghiệm âm phân biệt?

**A**  $m \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ .      **B**  $m \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ .      **C**  $m \in (0; 2)$ .      **D**  $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ .

Lời giải.

Phương trình  $mx^2 + x + m = 0$  có hai nghiệm âm phân biệt khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - 4 \cdot m \cdot m > 0 \\ -\frac{1}{m} < 0 \\ 1 > 0 \text{ (luôn đúng)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **D**.

**Câu 107.** Gọi  $S$  là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-2; 6]$  để phương trình  $x^2 + 4mx + m^2 = 0$  có hai nghiệm dương phân biệt. Tổng các phần tử trong  $S$  bằng

- (A)  $-3$ . (B)  $2$ . (C)  $18$ . (D)  $21$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $x^2 + 4mx + m^2 = 0$  có hai nghiệm dương phân biệt khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m)^2 - 1 \cdot m^2 > 0 \\ -4m > 0 \\ m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 > 0 \\ m < 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Vì  $m \in [-2; 6]$  nên  $S = \{-2; -1\}$ . Vậy tổng các phần tử trong  $S$  là  $-3$ .

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 108.** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$  có hai nghiệm dương phân biệt là

- (A)  $m \in (-1; 1)$ . (B)  $m \in (1; +\infty)$ . (C)  $m \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ . (D)  $m \in (-\infty; -1)$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$  có hai nghiệm dương phân biệt khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - 1 \cdot (-1) > 0 \\ 2(m-1) > 0 \\ m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 + 1 > 0 \text{ (luôn đúng)} \\ m > 1 \\ m < -1 \text{ hay } m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 109.** Phương trình  $(m-1)x^2 + 3x - 1 = 0$  có hai nghiệm trái dấu khi

- (A)  $m > 1$ . (B)  $m < 1$ . (C)  $m \geq 1$ . (D)  $m \leq 1$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $(m-1)x^2 + 3x - 1 = 0$  có hai nghiệm trái dấu khi  $ac < 0 \Leftrightarrow (m-1)(-1) < 0 \Leftrightarrow m > 1$ .

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 110.** Giả sử phương trình  $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 2 = 0$  ( $m$  là tham số) có hai nghiệm là  $x_1; x_2$ . Tính giá trị biểu thức  $P = 3x_1x_2 - 5(x_1 + x_2)$  theo  $m$ .

- (A)  $P = 3m^2 - 10m + 6$ . (B)  $P = 3m^2 + 10m - 5$ . (C)  $P = 3m^2 - 10m + 1$ . (D)  $P = 3m^2 + 10m + 1$ .

**Lời giải.**

Theo Vi-ét ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ x_1x_2 = m^2 + 2 \end{cases}$ .

Khi đó  $P = 3x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) = 3(m^2 + 2) - 5(2m + 1) = 3m^2 + 6 - 10m - 5 = 3m^2 - 10m + 1$

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 111.** Số nghiệm của phương trình  $20x^3(1-x)^3 = \frac{4}{25}$  trên khoảng  $(0; 1)$  là

- (A)  $6$ . (B)  $3$ . (C)  $2$ . (D)  $1$ .

**Lời giải.**

Phương trình tương đương với

$$x^3(1-x)^3 = \frac{1}{125} \Leftrightarrow [x(1-x)]^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \Leftrightarrow x(1-x) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow -x^2 + x - \frac{1}{5} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \\ x = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \end{cases}.$$

Vậy số nghiệm trên khoảng  $(0; 1)$  là  $2$ .

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 112.** Giả sử phương trình  $x^2 - 3x - m = 0$  ( $m$  là tham số) có hai nghiệm là  $x_1; x_2$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = x_1^2(1-x_2) + x_2^2(1-x_1)$ .

- (A)  $P = -m + 9$ . (B)  $P = 5m + 9$ . (C)  $P = m + 9$ . (D)  $P = -5m + 9$ .

**Lời giải.**

Theo Vi-ét ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1x_2 = -m \end{cases}$ .

Ta có  $P = x_1^2(1-x_2) + x_2^2(1-x_1) = x_1^2 - x_1^2x_2 + x_2^2 - x_2^2x_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - x_1x_2(x_1 + x_2) = 3^2 - 2 \cdot (-m) - (-m) \cdot 3 = 5m + 9$ .

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 113.** Giả sử phương trình  $2x^2 - 4ax - 1 = 0$  có hai nghiệm là  $x_1; x_2$ . Tính giá trị của biểu thức  $T = |x_1 - x_2|$ .

- (A)  $T = \frac{4a^2 + 2}{3}$ . (B)  $T = \sqrt{4a^2 + 2}$ . (C)  $T = \frac{\sqrt{a^2 + 8}}{2}$ . (D)  $T = \frac{\sqrt{a^2 + 8}}{4}$ .

**Lời giải.**

Theo định lý Viète ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a \\ x_1 x_2 = \frac{-1}{2} \end{cases}$ .

Ta có  $T = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{S^2 - 4P} = \sqrt{(2a)^2 - 4 \cdot \frac{-1}{2}} = \sqrt{4a^2 + 2}$ .

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 114.** Cho phương trình  $x^2 + px + q = 0$  trong đó  $p > 0, q > 0$ . Nếu hiệu các nghiệm của phương trình bằng 1. Khi đó  $p$  bằng

- (A)  $\sqrt{4q + 1}$ . (B)  $\sqrt{4q - 1}$ . (C)  $-\sqrt{4q + 1}$ . (D)  $q + 1$ .

**Lời giải.**

Giả sử hai nghiệm của phương trình  $x_1; x_2$ .

The Vi-ét ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = q \end{cases}$ .

Khi đó ta có  $|x_1 - x_2| = 1 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 1 \Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 1$   
 $\Leftrightarrow (-p)^2 - 4q = 1 \Leftrightarrow p^2 = 4q + 1 \Leftrightarrow p = \sqrt{4q + 1}$  (vì  $p > 0, q > 0$ ).

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 115.** Nếu  $m \neq 0$  và  $n \neq 0$  là các nghiệm của phương trình  $x^2 + mx + n = 0$  thì tổng  $m + n$  bằng

- (A)  $-\frac{1}{2}$ . (B)  $-1$ . (C)  $\frac{1}{2}$ . (D)  $1$ .

**Lời giải.**

Theo Vi-ét ta có  $\begin{cases} m + n = -m \\ mn = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \text{ (vì } n \neq 0) \\ m + n = -m = -1 \end{cases}$ .

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 116.** Giá trị nào của  $m$  thì phương trình  $x^2 - mx + 1 - 3m = 0$  có hai nghiệm trái dấu?

- (A)  $m > \frac{1}{3}$ . (B)  $m < \frac{1}{3}$ . (C)  $m > 2$ . (D)  $m < 2$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $x^2 - mx + 1 - 3m = 0$  có hai nghiệm trái dấu khi  $ac < 0 \Leftrightarrow 1 - 3m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{3}$ .

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 117.** Tìm tham số thực  $m$  để phương trình  $(m - 1)x^2 - 2(m - 2)x + m - 3 = 0$  có hai nghiệm trái dấu?

- (A)  $m < 1$ . (B)  $m > 2$ . (C)  $m > 3$ . (D)  $1 < m < 3$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $(m - 1)x^2 - 2(m - 2)x + m - 3 = 0$  có hai nghiệm trái dấu khi  $ac < 0 \Leftrightarrow (m - 1)(m - 3) < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3$ .

**Chọn đáp án (D).**

**Câu 118.** Phương trình  $x^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$  có hai nghiệm đối nhau khi và chỉ khi

- (A)  $m < 3$ . (B)  $m < 1$ . (C)  $m = 1$ . (D)  $1 < m < 3$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $x^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$  có hai nghiệm đối nhau khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - 1)^2 - (m - 3) > 0 \\ 2(m - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 4 > 0 \text{ (luôn đúng)} \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 119.** Phương trình  $x^2 + x + m = 0$  vô nghiệm khi và chỉ khi

- (A)  $m > -\frac{3}{4}$ . (B)  $m < -\frac{3}{4}$ . (C)  $m > \frac{1}{4}$ . (D)  $m > -\frac{5}{4}$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $x^2 + x + m = 0$  vô nghiệm khi và chỉ khi  $\Delta < 0 \Leftrightarrow 1 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$ .

**Chọn đáp án (C).**

## §3 HỆ PHƯƠNG TRÌNH

### A CÁC DẠNG TOÁN VÀ VÍ DỤ

#### ○ Dạng 1. Phương pháp thế

#### 1 VÍ DỤ

**Ví dụ 1.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 & (1) \\ 4x^2 - y^2 + 2xy + 5y = 0. & (2) \end{cases}$$

#### 🔗 Lời giải.

Từ (1) suy ra  $y = 2x + 1$  thay vào phương trình (2) ta được

$$4x^2 - (2x + 1)^2 + 2x(2x + 1) + 5(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Với  $x = -1 \Rightarrow y = -1$ .

Vậy hệ Phương trình có nghiệm là  $(-1; -1)$ .

**Ví dụ 2.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x + y = 1 & (1) \\ x^3 - y^3 = 3(x - y). & (2) \end{cases}$$

#### 🔗 Lời giải.

Từ (1) suy ra  $y = 1 - x$  thay vào (2) ta được

$$x^3 - (1 - x)^3 - 3(x - 1 + x) \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Với  $x = -1 \Rightarrow y = 2$ .

Với  $x = 2 \Rightarrow y = -1$ .

Với  $x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ .

Vậy phương trình có các nghiệm là  $(-1; 2), (2; -1), \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ .

#### 2 BÀI TẬP TỰ RÈN LUYỆN

**Bài 1.** Giải các hệ phương trình sau

① 
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x^2 + 2y^2 - 2xy = 5. \end{cases}$$

② 
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x^2 - 5xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

③ 
$$\begin{cases} x^2 + y = 4x \\ 2x + y = 5. \end{cases}$$

④ 
$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - xy = 13. \end{cases}$$

⑤ 
$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x^2 + 3y^2 = 7. \end{cases}$$

⑥ 
$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x^2 + 3y^2 - xy + 2x - 5y = 4. \end{cases}$$

#### 🔗 Lời giải.

$$\textcircled{1} \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x^2 + 2y^2 - 2xy = 5. \end{cases}$$

Ta có  $x + 2y = 5 \Rightarrow x = 5 - 2y$ . (\*)

Thay (\*) vào phương trình còn lại được

$$(5 - 2y)^2 + 2y^2 - 2(5 - 2y)y = 5 \Leftrightarrow 10y^2 - 30y + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Với  $y = 1 \Rightarrow x = 3$ .

Với  $y = 2 \Rightarrow x = 1$ .

Vậy hệ phương trình có nghiệm là  $(3; 1), (1; 2)$ .

$$\textcircled{2} \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x^2 - 5xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

Ta có  $2x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - 2x$ , thay vào phương trình còn lại ta được

$$x^2 - 5x(1 - 2x) + (1 - 2x)^2 = 7 \Leftrightarrow 15x^2 - 9x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{2}{5}. \end{cases}$$

Với  $x = 1 \Rightarrow y = -1$ .

Với  $x = -\frac{2}{5} \Rightarrow y = \frac{9}{5}$ .

Vậy hệ phương trình có nghiệm là  $(1; -1), \left(-\frac{2}{5}; \frac{9}{5}\right)$ .

$$\textcircled{3} \begin{cases} x^2 + y = 4x \\ 2x + y = 5. \end{cases}$$

Ta có  $2x + y = 5 \Leftrightarrow y = 5 - 2x$ , thay vào phương trình còn lại của hệ ta được

$$x^2 + 5 - 2x = 4x \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5. \end{cases}$$

Với  $x = 1 \Rightarrow y = 3$ .

Với  $x = 5 \Rightarrow y = -5$ .

Vậy hệ phương trình có nghiệm là  $(1; 3), (5; -5)$ .

$$\textcircled{4} \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - xy = 13. \end{cases}$$

Ta có  $x + y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -2 - x$ , thay vào phương trình đã còn lại ta được

$$x^2 + (-2 - x)^2 - x(-2 - x) = 13 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3. \end{cases}$$

Với  $x = 1 \Rightarrow y = -3$ .

Với  $x = -3 \Rightarrow y = 1$ .

Vậy hệ phương trình có nghiệm là  $(1; -3), (-3; 1)$ .

$$\textcircled{5} \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x^2 + 3y^2 = 7. \end{cases}$$

Ta có  $x + 2y = 4 \Leftrightarrow x = 4 - 2y$ , thay vào phương trình còn lại của hệ ta được

$$(4 - 2y)^2 + 3y^2 = 7 \Leftrightarrow 7y^2 - 16y + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{9}{7}. \end{cases}$$

Với  $y = 1 \Rightarrow x = 2$ .

Với  $y = \frac{9}{7} \Rightarrow x = \frac{10}{7}$ .

Vậy hệ phương trình có nghiệm là  $(2; 1), \left(\frac{10}{7}; \frac{9}{7}\right)$ .

$$\textcircled{6} \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x^2 + 3y^2 - xy + 2x - 5y = 4. \end{cases}$$

Ta có  $x + 2y = 4 \Leftrightarrow x = 4 - 2y$ , thay vào phương trình còn lại của hệ ta được

$$(4 - 2y)^2 + 3y^2 - (4 - 2y)y + 2(4 - 2y) - 5y = 4 \Leftrightarrow 9y^2 - 29y + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{20}{9} \end{cases}.$$

Với  $y = 1 \Rightarrow x = 2$ .

Với  $y = \frac{20}{9} \Rightarrow x = -\frac{4}{9}$ .

Vậy hệ phương trình có nghiệm là  $(2; 1), \left(-\frac{4}{9}; \frac{20}{9}\right)$ .

### 🔵 Dạng 1. Hệ phương trình đối xứng loại 1

#### 1 PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

**Định nghĩa.** Hệ phương trình đối xứng loại 1 có dạng  $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$  với  $\begin{cases} f(x, y) = f(y, x) \\ g(x, y) = g(y, x). \end{cases}$

**Cách giải:**

Đặt  $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$  (điều kiện hệ có nghiệm  $S^2 \geq 4P$ ).

Thế  $S, P$  vào hệ.

Khi đó  $x, y$  là nghiệm của phương trình  $X^2 - SX + P = 0$ .

Một số biểu thức đối xứng thường gặp

- ☑  $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = S^2 - 2P$ .
- ☑  $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)[(x + y)^2 - 3xy] = S(S^2 - 3P) = S^3 - 3PS$ .
- ☑  $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2 \cdot y^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$ .

#### 2 VÍ DỤ

🔗 **Ví dụ 1.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x + y + xy = 5 \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

🔗 **Lời giải.**

Hệ phương trình đã cho tương đương với  $\begin{cases} x + y + xy = 5 \\ (x + y)^2 - 2xy = 5. \end{cases}$

Đặt  $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$  (điều kiện có nghiệm  $S^2 \geq 4P$ ).

Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & \begin{cases} S + P = 5 \\ S^2 - 2P = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 5 - S \\ S^2 - 2(5 - S) = 5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} P = 5 - S \\ S^2 + 2S - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 5 - S \\ \begin{cases} S = 3 \\ S = -5 \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases} \text{ (Nhận)} \\ \begin{cases} S = -5 \\ P = 10 \end{cases} \text{ (Loại)} \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $\begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases}$  khi đó  $x, y$  là nghiệm của phương trình  $X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = 2. \end{cases}$   
 Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là  $(1; 2), (2; 1)$ .

 **Ví dụ 2.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases}$

 **Lời giải.**

Hệ phương trình đã cho tương đương với  $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ xy(x + y) = 30. \end{cases}$

Đặt  $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$  (điều kiện có nghiệm  $S^2 \geq 4P$ ).

Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & \begin{cases} S + P = 11 \\ S \cdot P = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 11 - P \\ (11 - P)P = 30 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} S = 11 - P \\ -P^2 + 11P - 30 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 11 - P \\ P = 6 \\ P = 5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases} \text{ (nhận)} \\ \begin{cases} S = 6 \\ P = 5. \end{cases} \text{ (nhận)} \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $\begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases}$  khi đó  $x, y$  là nghiệm của phương trình  $X^2 - 5X + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 3 \\ X = 2. \end{cases}$   
 Với  $\begin{cases} S = 6 \\ P = 5 \end{cases}$  khi đó  $x, y$  là nghiệm của phương trình  $X^2 - 6X + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = 5. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm là  $(3; 2), (2; 3), (1; 5), (5; 1)$ .

 **Ví dụ 3.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = x^2 + y^2. \end{cases}$

 **Lời giải.**

Hệ phương trình đã cho tương đương với  $\begin{cases} x + y = 1 \\ (x + y)^3 - 3(x + y)xy = (x + y)^2 - 2xy \end{cases}$

Đặt  $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$  (điều kiện có nghiệm  $S^2 \geq 4P$ ).

Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & \begin{cases} S = 1 \\ S^3 - 3SP = S^2 - 2P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ 1 - 3P = 1 - 2P \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} S = 1 \\ P = 0. \end{cases} \text{ (nhận)} \end{aligned}$$

Với  $\begin{cases} S = 1 \\ P = 0 \end{cases}$  khi đó  $x, y$  là nghiệm của phương trình  $X^2 - X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ X = 1. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là  $(0; 1), (1; 0)$ .

 **Ví dụ 4.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^4 + y^4 - x^2y^2 = 13. \end{cases}$

 **Lời giải.**

Hệ phương trình đã cho tương đương với 
$$\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 5 \\ (x^2 + y^2)^2 - 3(xy)^2 = 13. \end{cases}$$

Đặt  $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$  (điều kiện có nghiệm  $S^2 \geq 4P$ ).

Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & \begin{cases} S^2 - 2P = 5 \\ (S^2 - 2P)^2 - 3P^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2P = 5 \\ 5^2 - 3P^2 = 13 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 = 5 + 2P \\ \begin{cases} P = 2 \\ P = -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} P = 2 \\ S^2 = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} P = -2 \\ S^2 = 1 \end{cases} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} P = 2 \\ S = 3 \\ P = 2 \\ S = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} P = -2 \\ S = 1 \\ P = -2 \\ S = -1 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $\begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases}$  khi đó  $x, y$  là nghiệm của phương trình  $X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = 2. \end{cases}$

Với  $\begin{cases} S = -3 \\ P = 2 \end{cases}$  khi đó  $x, y$  là nghiệm của phương trình  $X^2 + 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = -1 \\ X = -2. \end{cases}$

Với  $\begin{cases} S = 1 \\ P = -2 \end{cases}$  khi đó  $x, y$  là nghiệm của phương trình  $X^2 - X - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = -1 \\ X = 2. \end{cases}$

Với  $\begin{cases} S = -1 \\ P = -2 \end{cases}$  khi đó  $x, y$  là nghiệm của phương trình  $X^2 + X - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = -2. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm là  $(1; 2), (2; 1), (-1; -2), (-2; -1), (-1; 2), (2; -1), (1; -2), (-2; 1)$ .

### 3 BÀI TẬP TỰ RÈN LUYỆN

**Bài 1.** Giải các hệ phương trình sau

① 
$$\begin{cases} xy + x + y = 5 \\ x^2 + y^2 + x + y = 8. \end{cases}$$

② 
$$\begin{cases} x + xy + y = 11 \\ x^2 + y^2 + 3(x + y) = 28. \end{cases}$$

③ 
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^4 + y^4 = 34. \end{cases}$$

④ 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 3(x + y) + 2xy + 9 = 0. \end{cases}$$

**Lời giải.**

① 
$$\begin{cases} xy + x + y = 5 \\ x^2 + y^2 + x + y = 8. \end{cases}$$

Hệ phương trình đã cho tương đương với 
$$\begin{cases} xy + x + y = 5 \\ (x + y)^2 - 2xy + x + y = 8. \end{cases}$$

Đặt  $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$  (điều kiện có nghiệm  $S^2 \geq 4P$ ).

Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} S + P = 5 \\ S^2 - 2P + S = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 5 - S \\ S^2 + 3S - 18 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = 5 - S \\ S = 3 \\ S = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} S = -6 \\ P = 11. \end{cases} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Với  $\begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases}$  khi đó  $x, y$  là nghiệm của phương trình  $X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = 2. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là  $(1; 2), (2; 1)$ .

$$\textcircled{2} \begin{cases} x + xy + y = 11 \\ x^2 + y^2 + 3(x + y) = 28. \end{cases}$$

Hệ phương trình đã cho tương đương với  $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ (x + y)^2 - 2xy + 3(x + y) = 28. \end{cases}$

Đặt  $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$  (điều kiện có nghiệm  $S^2 \geq 4P$ ).

Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & \begin{cases} S + P = 11 \\ S^2 - 2P + 3S = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 11 - S \\ S^2 + 5S - 50 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} P = 11 - S \\ \begin{cases} S = 5 \\ S = -10 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} S = -10 \\ P = 21. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $\begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases}$  khi đó  $x, y$  là nghiệm của phương trình  $X^2 - 5X + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 3 \\ X = 2. \end{cases}$

Với  $\begin{cases} S = -10 \\ P = 21 \end{cases}$  khi đó  $x, y$  là nghiệm của phương trình  $X^2 + 10X + 21 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = -3 \\ X = -7. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là  $(3; 2), (2; 3), (-3; -7), (-7; -3)$ .

$$\textcircled{3} \begin{cases} x + y = 2 \\ x^4 + y^4 = 34. \end{cases}$$

Hệ phương trình đã cho tương đương với  $\begin{cases} x + y = 2 \\ (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 34. \end{cases}$

Đặt  $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$  (điều kiện có nghiệm  $S^2 \geq 4P$ ).

Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & \begin{cases} S = 2 \\ (S^2 - 2P)^2 - 2P^2 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ (4 - 2P)^2 - 2P^2 = 34 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ 2P^2 - 16P - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ \begin{cases} P = -1 \\ P = 9 \end{cases} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} S = 2 \\ P = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} S = 2 \\ P = 9. \end{cases} \text{ (loại)} \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $\begin{cases} S = 2 \\ P = -1 \end{cases}$  khi đó  $x, y$  là nghiệm của phương trình  $X^2 - 2X - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 + \sqrt{2} \\ X = 1 - \sqrt{2}. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là  $(1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}), (1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2})$ .

$$\textcircled{4} \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 3(x + y) + 2xy + 9 = 0. \end{cases}$$

Hệ phương trình đã cho tương đương với  $\begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = 13 \\ 3(x + y) + 2xy + 9 = 0. \end{cases}$

Đặt  $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$  (điều kiện có nghiệm  $S^2 \geq 4P$ ).

Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} S^2 - 2P = 13 \\ 3S + 2P + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + 3S - 4 = 0 \\ -2P = 9 + 3S \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ S = -4 \\ P = \frac{9+3S}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = -6 \\ S = -4 \\ P = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Với  $\begin{cases} S = 1 \\ P = -6 \end{cases}$  khi đó  $x, y$  là nghiệm của phương trình  $X^2 - X - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 3 \\ X = -2 \end{cases}$ .

Với  $\begin{cases} S = -4 \\ P = \frac{3}{2} \end{cases}$  khi đó  $x, y$  là nghiệm của phương trình  $X^2 + 4X + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{-4 + \sqrt{10}}{2} \\ X = \frac{-4 - \sqrt{10}}{2} \end{cases}$ .

Vậy hệ phương trình có nghiệm là  $\left(\frac{-4 + \sqrt{10}}{2}; \frac{-4 - \sqrt{10}}{2}\right), \left(\frac{-4 - \sqrt{10}}{2}; \frac{-4 + \sqrt{10}}{2}\right), (3; -2), (-2; 3)$ .

**!** Thiếu toàn bộ nội dung dạng 3,4 đến hết ví dụ 1 (kể cả bài tập tương tự trang 124)

**Ví dụ 1.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^3 - 6x^2y + 9xy^2 - 4y^3 = 0 & (1) \\ x^2 - 5y^2 - x - 7 = 0. & (2) \end{cases}$

**Lời giải.**

**Nhận xét.** Phương trình (1) chứa các biểu thức  $x^3, 6x^2y, 9xy^2, 4y^3$  là những biểu thức có cùng bậc ba. Ta gọi phương trình dạng này là phương trình **đẳng cấp** (bậc 3). Nếu  $y \neq 0$ , chia hai vế của phương trình (1) cho  $y^3$  (hoặc nếu  $x \neq 0$ , chia hai vế cho  $x^3$ ).

☑ Xét  $y = 0$  hệ đã cho trở thành  $\begin{cases} x^3 = 0 \\ x^2 - x - 7 = 0 \end{cases}$  vô nghiệm.

☑ Xét  $y \neq 0$ , chia hai vế cho  $y^3$  ta được

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^3 - 6\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 9\frac{x}{y} - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 1 \\ \frac{x}{y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 4y \end{cases}$$

☑ Với  $x = y$  thế vào (2) ta được

$$(2) \Leftrightarrow y^2 - 5y^2 - y - 7 = 0 \Leftrightarrow -4y^2 - y - 7 = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

☑ Với  $x = 4y$  thế vào (2) được

$$(2) \Leftrightarrow 16y^2 - 5y^2 - 4y - 7 = 0 \Leftrightarrow 11y^2 - 4y - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 4 \\ y = -\frac{7}{11} \Rightarrow x = -\frac{28}{11} \end{cases}$$

Vậy hệ có 2 nghiệm  $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$  hay  $\begin{cases} x = -\frac{28}{11} \\ y = -\frac{7}{11} \end{cases}$ .

#### 4 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

**Bài 1.** Giải các hệ phương trình

$$\textcircled{1} \begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 & (1) \\ 4x^2 + 2xy + 6x - 27 = 0. & (2) \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} \sqrt{\frac{2x}{y}} + \sqrt{\frac{2y}{x}} = 3 & (1) \\ x - y + xy = 3. & (2) \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} 2y^2 - x^2 = 1 & (1) \\ 2x^3 - y^3 = 2y - x. & (2) \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} x^3 - 2y^3 = x + 4y & (1) \\ 13x^2 - 41xy + 21y^2 = -9. & (2) \end{cases}$$

**Lời giải.**

1) Ta xét các trường hợp sau

☉ Với  $y = 0$  hệ đã cho trở thành  $\begin{cases} x^2 = 0 \\ 4x^2 + 6x + 27 = 0 \end{cases}$  vô nghiệm.

☉ Với  $y \neq 0$ . Phương trình (1) là đẳng cấp (bậc 2). Chia hai vế của (1) cho  $y^2$  ta được

$$(1) \Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{y}\right) + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 2 \\ \frac{x}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = 3y. \end{cases}$$

• Với  $x = 2y$  thế vào phương trình (2) ta được

$$16y^2 + 4y^2 + 12y - 27 = 0 \Leftrightarrow 20y^2 + 12y - 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = -3 \\ y = \frac{9}{10} \Rightarrow x = \frac{9}{5}. \end{cases}$$

• Với  $x = 3y$ , thay vào phương trình (2) ta có

$$36y^2 + 6y^2 + 18y - 27 = 0 \Leftrightarrow 42y^2 + 18y - 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-3 - 3\sqrt{15}}{14} \Rightarrow x = \frac{-9 - 9\sqrt{15}}{14} \\ y = \frac{-3 + 3\sqrt{15}}{14} \Rightarrow x = \frac{-9 + 9\sqrt{15}}{14}. \end{cases}$$

Hệ phương trình có 4 nghiệm là

$$\left(-3; -\frac{3}{2}\right); \left(\frac{9}{5}; \frac{9}{10}\right); \left(\frac{9\sqrt{15}}{14} - \frac{9}{14}; \frac{3\sqrt{15}}{14} - \frac{3}{14}\right); \left(-\frac{9}{14} - \frac{9\sqrt{15}}{14}; -\frac{3}{14} - \frac{3\sqrt{15}}{14}\right).$$

2) Điều kiện  $xy > 0$ .

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{2x}{y} + \frac{2y}{x} + 2\sqrt{\frac{2x}{y}}\sqrt{\frac{2y}{x}} = 9 \Leftrightarrow \frac{2x}{y} + \frac{2y}{x} + 4 = 9 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x}{y} + \frac{2y}{x} = 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Phương trình (\*) là đẳng cấp (bậc 2). Chia cả hai vế của (\*) cho  $y^2 \neq 0$  ta được

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\frac{x}{y} + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{x}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = 2y. \end{cases}$$

☉ Với  $y = 2x$  thế vào phương trình (2) ta được

$$x - 2x + 2x^2 = 3 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = -2 \\ x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = 3. \end{cases}$$

- ☞ Với  $x = 2y$ , thay vào phương trình (2) ta có

$$2y - y + 2y^2 = 3 \Leftrightarrow 2y^2 + y - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = -3. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm là  $\left(-3; -\frac{3}{2}\right)$ ;  $(-1; -2)$ ;  $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$ ;  $(2; 1)$ .

Cách khác. Hệ phương trình còn có dạng đối xứng loại 1.

- 3) Phương trình (1) và (2) không là đẳng cấp, nhưng thế (1) vào (2) ta được:

$$(2) \Leftrightarrow 2x^3 - y^3 = (2y - x)(2y^2 - x^2) \Leftrightarrow x^3 + 2x^2y + 2xy^2 - 5y^3 = 0. \quad (*)$$

- ☞ Nếu  $y = 0$  thì hệ đã cho tương đương  $\begin{cases} x^2 = -1 \\ 2x^3 = -x \end{cases}$  vô nghiệm.

- ☞ Nếu  $y \neq 0$ . Phương trình (\*) là đẳng cấp (bậc 3). Chia cả hai vế của (\*) cho  $y^3$  ta được

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{y}\right) - 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = 1 \Leftrightarrow x = y$$

Thay vào phương trình (1) ta được

$$2y^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 1 \\ y = -1 \Rightarrow x = -1. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm là  $(-1; -1)$  và  $(1; 1)$ .

- 4) Xét các trường hợp sau

- ☞ Nếu  $y = 0$  hệ đã cho tương đương  $\begin{cases} x^3 - x = 0 \\ 13x^2 = -9 \end{cases}$  vô nghiệm.

- ☞ Nếu  $y \neq 0$ . Phương trình (1) và (2) không là đẳng cấp. Nhân hai vế của phương trình (1) cho  $-9$  rồi thế (2) vào (1) ta được:

$$\begin{aligned} (2) \Leftrightarrow -9(x^3 - 2y^3) &= (x + 4y)(13x^2 - 41xy + 21y^2) \\ \Leftrightarrow 22x^3 + 11x^2y - 143xy^2 + 66y^3 &= 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Phương trình (\*) là đẳng cấp bậc ba. Chia hai vế của (\*) cho  $y^3$  ta được

$$22\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 11\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 143\left(\frac{x}{y}\right) + 66 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = -3 \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{x}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = 2y \\ x = -3y. \end{cases}$$

- Với  $y = 2x$ , thay vào phương trình (2) ta được

$$13x^2 - 82x^2 + 84x^2 = -9 \Leftrightarrow 15x^2 = -9 \text{ vô nghiệm.}$$

- Với  $x = -3y$  thay vào (2) ta được

$$117y^2 + 123y^2 + 21y^2 = -9 \Leftrightarrow 261y^2 = -9 \text{ vô nghiệm.}$$

- Với  $x = 2y$  thay vào phương trình (2) ta được

$$52y^2 - 82y^2 + 21y^2 = -9 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \Rightarrow x = -2 \\ y = 1 \Rightarrow x = 2 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là  $(2; 1)$  và  $(-2; -1)$ .

**Ví dụ 1.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

☑ Xét  $y = 0$ . Hệ trở thành  $\begin{cases} x + 1 = 0 \\ 1 = 0 \end{cases}$  vô nghiệm.

☑ Xét  $y \neq 0$ . Chia hai vế của phương trình đầu cho  $y$  và chia hai vế của phương trình sau cho  $y^2$  ta được hệ tương đương  $\begin{cases} x + \frac{x}{y} + \frac{1}{y} = 7 \\ x^2 + \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2} = 13 \end{cases} \quad (I)$

☑ Đặt ẩn phụ.

Cách 1. Hệ (I) viết lại thành  $\begin{cases} x + x \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = 7 \\ x^2 + x \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} = 13. \end{cases}$

☑ Đặt  $\begin{cases} u = x \\ v = \frac{1}{y} \end{cases}$ , hệ (I) trở thành  $\begin{cases} u + uv + v = 7 \\ u^2 + uv + v^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v + uv = 7 \\ (u + v)^2 - uv = 13 \end{cases} \quad (a).$

Đây là hệ đối xứng loại 1. Đặt  $S = u + v$ ,  $P = u \cdot v$ .

(a) trở thành  $\begin{cases} S + P = 7 & (1) \\ S^2 - P = 13 & (2) \end{cases}$ .

Lấy (1) cộng (2) theo từng vế ta được

$$S^2 + S = 20 \Leftrightarrow S^2 + S - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} S = -5 \Rightarrow P = 12 \\ S = 4 \Rightarrow P = 3. \end{cases}$$

Khi đó  $u$  và  $v$  là nghiệm của phương trình

$$X^2 + 5X + 12 = 0 \text{ (vô nghiệm) hoặc } X^2 - 4X + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = 3. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} u = 1 \\ v = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = 3 \\ v = 1. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ \frac{1}{y} = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ \frac{1}{y} = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = 1. \end{cases} \end{cases}$$

Vậy hệ có hai nghiệm  $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$  và  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1. \end{cases}$

Cách 2. Ta có (1)  $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{y}\right) + \frac{x}{y} = 7 \\ \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} = 13. \end{cases} \quad (*)$

☑ Đặt  $\begin{cases} u = x + \frac{1}{y} \\ v = \frac{x}{y} \end{cases}$ , (\*) trở thành  $\begin{cases} u + v = 7 & (3) \\ u^2 - v = 13 & (4) \end{cases}$ .

☑ Lấy (3) cộng với (4) theo từng vế ta được:

$$u^2 + u = 20 \Leftrightarrow u^2 + u - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = -5 \Rightarrow v = 12 \\ u = 4 \Rightarrow v = 3. \end{cases}$$

Trường hợp 1. 
$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = -5 \\ \frac{x}{y} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + 1 = -5y & (5) \\ x = 12y. & (6) \end{cases}$$

Thế  $x = 12y$  vào (5) ta được  $12y^2 + 1 = -5y \Leftrightarrow 12y^2 + 5y + 1 = 0$  vô nghiệm.

Trường hợp 2. 
$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{x}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + 1 = 4y & (7) \\ x = 3y. & (8) \end{cases}$$

Thế  $x = 3y$  vào phương trình (7) ta được  $3y^2 + 1 = 4y \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 3 \\ y = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 1. \end{cases}$

Vậy hệ có hai nghiệm  $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$  và  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1. \end{cases}$

## 5 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1. Giải hệ phương trình

① 
$$\begin{cases} xy + x - 1 = 3y \\ x^2y - x = 2y^2. \end{cases}$$

② 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y \\ y(x + y)^2 = 2x^2 + 7y + 2. \end{cases}$$

③ 
$$\begin{cases} 2x^2 + x - \frac{1}{y} = 2 \\ y - y^2x - 2y^2 = -2. \end{cases}$$

④ 
$$\begin{cases} x(x + y + 1) - 3 = 0 \\ (x + y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0. \end{cases}$$

 Lời giải.

① Điều kiện  $y \neq 0$ .

Hệ phương trình 
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{x}{y} - \frac{1}{y} = 3 \\ \frac{x^2}{y} - \frac{x}{y^2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{1}{y}\right) + \frac{x}{y} = 3 \\ \frac{x}{y} \left(x - \frac{1}{y}\right) = 2 \end{cases} \quad (I).$$

Đặt  $\begin{cases} u = x - \frac{1}{y} \\ v = \frac{x}{y} \end{cases}$ . Hệ (I) trở thành  $\begin{cases} u + v = 3 \\ u \cdot v = 2. \end{cases}$

Nên  $u$  và  $v$  là nghiệm của phương trình  $X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow X = 1, X = 2$ .

Suy ra  $\begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} u = 2 \\ v = 1. \end{cases}$

Suy ra  $\begin{cases} x - \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{x}{y} = 2 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} x - \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{x}{y} = 1. \end{cases}$

Giải hệ  $\begin{cases} x - \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{x}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{y} = 1 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - \frac{1}{y} = 1 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 - y - 1 = 0 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \\ y = -\frac{1}{2} \\ x = -1. \end{cases}$

Giải hệ  $\begin{cases} x - \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{x}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - \frac{1}{y} = 2 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 2y - 1 = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \\ y = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2}. \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm 4 nghiệm là  $\begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ y = 1 - \sqrt{2} \end{cases}; \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ y = 1 + \sqrt{2} \end{cases}.$

② Điều kiện  $y \neq 0$ .

$$\text{Hệ phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y} + x + y = 4 \\ (x+y)^2 - 2\frac{x^2+1}{y} = 7 \end{cases} \quad (I)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \frac{x^2+1}{y} \\ v = x+y. \end{cases}$$

$$\text{Hệ (I) trở thành } \begin{cases} u+v=4 \\ v^2-2u=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=9 \\ v=-5 \\ u=1 \\ v=3. \end{cases}$$

$$\text{Với } \begin{cases} u=9 \\ v=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y}=9 \\ x+y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(-5-y)^2+1}{y}=9 \\ x=-5-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+y+26=0 \\ x=9-y \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

$$\text{Với } \begin{cases} u=1 \\ v=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y}=1 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(3-y)^2+1}{y}=1 \\ x=3-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-7y+10=0 \\ x=1-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1 \\ y=5 \\ x=-2. \end{cases}$$

$$\text{Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm là } \begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x=1 \\ y=2. \end{cases}$$

③ Điều kiện  $y \neq 0$ .

$$\text{Hệ phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x - \frac{1}{y} - 2 = 0 \\ \frac{2}{y^2} + \frac{1}{y} - x - 2 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ v = \frac{1}{y}. \end{cases}$$

$$\text{Hệ đã cho trở thành } \begin{cases} 2u^2 + u - v - 2 = 0 \\ 2v^2 + v - u - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-1; v=-1 \\ u=1; v=1 \\ u=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}; v=\frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ u=\frac{\sqrt{3}-1}{2}; v=\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Từ đó suy ra hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm là } \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}; \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}; \begin{cases} x=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y=1+\sqrt{3} \end{cases}; \begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2} \\ y=1-\sqrt{3} \end{cases}.$$

④ Hệ phương trình  $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1-\frac{3}{x}=0 \\ (x+y)^2-\frac{5}{x^2}+1=0 \end{cases} \quad (I)$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x+y \\ v = \frac{1}{x} \end{cases}. \text{ Hệ (I) trở thành}$$

$$\begin{cases} u+1-3v=0 \\ u^2-5v^2+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\frac{1}{2}; v=\frac{1}{2} \\ u=2; v=1. \end{cases}$$

$$\text{Với } \begin{cases} u=\frac{1}{2} \\ v=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{x}=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-\frac{3}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Tương tự với } \begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm là  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$ .

## B CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

**Câu 1.** Cho một tam giác vuông. Khi ta tăng mỗi cạnh góc vuông lên 2cm thì diện tích tam giác tăng lên  $17\text{cm}^2$ . Nếu giảm các cạnh góc vuông đi 3cm và 1cm thì diện tích tam giác giảm đi  $11\text{cm}^2$ . Tính diện tích tam giác ban đầu.

- (A)  $50\text{cm}^2$ . (B)  $25\text{cm}^2$ . (C)  $50\sqrt{5}\text{cm}^2$ . (D)  $50\sqrt{2}\text{cm}^2$ .

**Lời giải.**

Gọi độ dài hai cạnh góc vuông lần lượt là  $x\text{cm}$ ,  $y\text{cm}$ ,  $x > y$  ( $x > 3$ ,  $y > 1$ ). Diện tích của tam giác là  $\frac{xy}{2}$ . Theo bài ra

$$\text{ta có hệ phương trình } \begin{cases} \frac{(x+2)(y+2)}{2} - \frac{xy}{2} = 17 \\ \frac{(x-3)(y-1)}{2} - \frac{xy}{2} = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 5. \end{cases}$$

Vậy độ dài hai cạnh của tam giác là 5cm và 10cm. Suy ra diện tích của tam giác ban đầu là  $\frac{xy}{2} = 25\text{cm}^2$ .

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 2.** Hai vòi nước cùng chảy vào bể thì sau  $\frac{24}{5}$  giờ sẽ đầy bể. Mỗi giờ lượng nước của vòi một chảy được bằng  $\frac{3}{2}$  lần lượng nước của vòi thứ hai. hỏi vòi thứ hai chảy riêng một mình thì bao lâu sẽ đầy bể?

- (A) 12 giờ. (B) 10 giờ. (C) 8 giờ. (D) 3 giờ.

**Lời giải.**

Gọi thời gian vòi thứ nhất và thứ hai chảy riêng một mình đầy bể lần lượt là  $x$  giờ và  $y$  giờ. Mỗi giờ vòi thứ nhất và thứ hai chảy được lần lượt là  $\frac{1}{x}$  bể và  $\frac{1}{y}$  bể. Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{y} \\ \frac{24}{5} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 12. \end{cases}$$

Vậy vòi thứ hai chảy một mình thì sau 12 giờ sẽ đầy bể.

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 3.** Tìm độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông, biết rằng: khi ta tăng mỗi cạnh lên 2 cm thì diện tích tăng  $17\text{cm}^2$ ; khi ta giảm chiều dài của cạnh này là 3 cm và cạnh kia 1 cm thì diện tích giảm  $11\text{cm}^2$ .

- (A) 5 cm và 10 cm. (B) 4 cm và 7 cm. (C) 2 cm và 3 cm. (D) 5 cm và 6 cm.

**Lời giải.**

Gọi độ dài hai cạnh góc vuông lần lượt là  $x\text{ cm}$ ,  $y\text{ cm}$ ,  $x > y$  ( $x > 3$ ,  $y > 1$ ). Diện tích của tam giác là  $\frac{xy}{2}$ . Theo bài ra

$$\text{ta có hệ phương trình } \begin{cases} \frac{(x+2)(y+2)}{2} - \frac{xy}{2} = 17 \\ \frac{(x-3)(y-1)}{2} - \frac{xy}{2} = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 5. \end{cases}$$

Vậy độ dài hai cạnh của tam giác là 5 cm và 10 cm.

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 4.** Ta đặt  $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$  thì hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^3y + xy^3 = 2 \end{cases}$  thành

- (A)  $\begin{cases} S + P = 1 \\ P = 2 \end{cases}$ . (B)  $\begin{cases} S^2 - 2P = 1 \\ P = 2 \end{cases}$ . (C)  $\begin{cases} S^2 + 2P = 1 \\ P = 2 \end{cases}$ . (D)  $\begin{cases} S^2 - 2P = 1 \\ S = 2 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Viết lại } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^3y + xy^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ xy(x^2 + y^2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 1 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đặt } \begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases} \text{ thì hệ phương trình } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^3y + xy^3 = 2 \end{cases} \text{ thành } \begin{cases} S^2 - 2P = 1 \\ P = 2. \end{cases}$$

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 5.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} x + 2y = m - 1 \\ 2x - y = 3m + 3 \end{cases}$ . Với giá trị nào của  $m$  thì hệ phương trình có nghiệm  $(x; y)$  sao cho  $x^2 + y^2$  nhỏ nhất?

(A)  $m = -\frac{4}{5}$ .

(B)  $m = -\frac{3}{2}$ .

(C)  $m = \frac{1}{2}$ .

(D)  $m = -1$ .

**Lời giải.**

$$\begin{cases} x + 2y = m - 1 \\ 2x - y = 3m + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 2m - 2 \\ 2x - y = 3m + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7m + 5}{5} \\ y = \frac{-m - 5}{5} \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{(7m + 5)^2 + (m + 5)^2}{25} = 2m^2 + \frac{16}{5}m + 2 = 2\left(m + \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{18}{25} \geq \frac{18}{25}.$$

Vậy  $x^2 + y^2$  nhỏ nhất khi  $m = -\frac{4}{5}$ .

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 6.** Nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} x - 4y = 5 \\ 2x - 5y = 7 \end{cases}$  là

(A)  $(-1; -1)$ .

(B)  $(1; 1)$ .

(C)  $(1; -1)$ .

(D)  $(-1; 1)$ .

**Lời giải.**

Nghiệm của hệ đã cho là  $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ .

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 7.** Hệ phương trình  $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + my = -1 \end{cases}$  vô nghiệm khi

(A) không có  $m$ .

(B)  $m = -4$ .

(C)  $m = -\frac{1}{4}$ .

(D)  $m \neq -4$ .

**Lời giải.**

Hệ vô nghiệm khi và chỉ khi  $\frac{1}{2} = \frac{-2}{m} \neq \frac{1}{-1} \Leftrightarrow m = -4$ .

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 8.** Nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} \frac{2m}{x-1} + \frac{2}{y} = 3 \\ \frac{m}{x-1} + \frac{y+6}{y} = 5 \end{cases}$  trong trường hợp  $m \neq 0$  là

(A)  $(1; 0)$ .

(B)  $(m + 1; 2)$ .

(C)  $\left(\frac{1}{m}; \frac{1}{2}\right)$ .

(D)  $(3; m)$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x \neq 1, y \neq 0$ . Hệ được viết lại  $\begin{cases} \frac{2m}{x-1} + \frac{2}{y} = 3 \\ \frac{m}{x-1} + \frac{y+6}{y} = 4 \end{cases} \quad (I)$

Đặt  $u = \frac{1}{x-1}, v = \frac{1}{y}$  với  $u \neq 0, v \neq 0$ .

$$\text{Hệ (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \cdot u + 2v = 3 \\ m \cdot u + 6v = 4 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Khi  $m \neq 0$  dùng phương pháp cộng đại số ta tìm được  $u = \frac{1}{m}, v = \frac{1}{2}$ . Suy ra  $\begin{cases} x = m + 1 \\ y = 2 \end{cases}$ .

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 9.** Hệ phương trình  $\begin{cases} mx + y = m - 3 \\ 4x + my = -2 \end{cases}$  có vô số nghiệm khi

(A)  $m = \pm 2$ .

(B)  $m = -2$ .

(C)  $m = 2$ .

(D)  $\begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq -2 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

Hệ có vô số nghiệm  $\Leftrightarrow \frac{m}{4} = \frac{1}{m} = \frac{m-3}{-2} \Leftrightarrow m = 2$ .

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 10.** Tìm  $a$  để hệ phương trình  $\begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + ay = 1 \end{cases}$  vô nghiệm.

- (A)  $a = -1$ . (B)  $a = 1$  hoặc  $a = -1$ . (C)  $a = 1$ . (D) không có  $a$ .

🔗 **Lời giải.**

Hệ vô nghiệm  $\Leftrightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{a} \neq \frac{a^2}{1} \Leftrightarrow a = -1$ .

🔍 Chọn đáp án (A).....

**Câu 11.** Tìm tham số  $m$  để hệ phương trình  $\begin{cases} mx + y + m = 0 \\ x + my + m = 0 \end{cases}$  vô nghiệm

- (A)  $m = -1$ . (B)  $m = 1$ . (C)  $m = 0$ . (D)  $m \neq 1$ .

🔗 **Lời giải.**

Hệ phương trình đã cho vô nghiệm  $\Leftrightarrow \frac{m}{1} = \frac{1}{m} \neq \frac{m}{m} \Leftrightarrow m = -1$ .

🔍 Chọn đáp án (A).....

**Câu 12.** Hệ phương trình  $\begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \\ 2mx + 5y - m = 0 \end{cases}$  có nghiệm duy nhất khi

- (A)  $m = \frac{10}{3}$ . (B)  $m = 10$ . (C)  $m = -10$ . (D)  $m = -\frac{10}{3}$ .

🔗 **Lời giải.**

Từ hai phương trình đầu có chung nghiệm duy nhất là  $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ .

Để hệ có nghiệm duy nhất thì phương trình  $2mx + 5y - m = 0$  phải có nghiệm  $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow 2m - 10 - m = 0 \Leftrightarrow m = 10.$$

🔍 Chọn đáp án (B).....

**Câu 13.** Hệ phương trình  $\begin{cases} xy + x + y = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$

- (A) có 2 nghiệm (2; 3) và (1; 5). (B) có 2 nghiệm (2; 1) và (3; 5).  
(C) có 1 nghiệm là (5; 6). (D) có 4 nghiệm (2; 3), (3; 2), (1; 5), (5; 1).

🔗 **Lời giải.**

Đặt  $S = x + y$ ,  $P = xy$  với  $S^2 - 2P \geq 0$ . Hệ đã cho trở thành

$\begin{cases} S + P = 11 \\ S \cdot P = 30 \end{cases}$ . Vậy  $S$  và  $P$  là nghiệm của phương trình  $X^2 - 11X + 30 = 0 \Leftrightarrow X = 5; X = 6$ .

Vậy  $\begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} S = 6 \\ P = 5 \end{cases}$ .

☑ Với  $\begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$ , nên  $x, y$  là nghiệm của phương trình  $t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2; t = 3$ .  
Suy ra  $(x; y) = (2; 3)$  hoặc  $(x; y) = (3; 2)$ .

☑ Với  $\begin{cases} S = 6 \\ P = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 5 \end{cases}$ , nên  $x, y$  là nghiệm của phương trình  $t^2 - 6t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1; t = 5$ .  
Suy ra  $(x; y) = (1; 5)$  hoặc  $(x; y) = (5; 1)$ .

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm là (2; 3), (3; 2), (1; 5), (5; 1).

🔍 Chọn đáp án (D).....

**Câu 14.** Hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x + m \end{cases}$  có đúng 1 nghiệm khi và chỉ khi

- (A)  $m = \sqrt{2}$ . (B)  $m = -\sqrt{2}$ .  
(C)  $m = \sqrt{2}$  và  $m = -\sqrt{2}$ . (D)  $m$  tùy ý.

🔗 **Lời giải.**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (x + m)^2 = 1 \\ y = x + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2xm + m^2 - 1 = 0 \\ y = x + m \end{cases}$$

Để hệ phương trình ban đầu có đúng một nghiệm thì phương trình  $2x^2 + 2xm + m^2 - 1 = 0$  có đúng một nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 2m^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **(C)**.

**Câu 15.** Hệ phương trình  $\begin{cases} \frac{1}{x} = y + 5x \\ \frac{1}{y} = x + 5y \end{cases}$  có bao nhiêu cặp nghiệm  $(x, y)$  mà  $x \neq y$ ?

**(A)** 1.

**(B)** 2.

**(C)** 3.

**(D)** 4.

Lời giải.

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = y + 5x \\ \frac{1}{y} = x + 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = xy + 5x^2 \\ 1 = xy + 5y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 1 = xy + 5x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \text{ (loại)} \\ 1 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ 1 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có hai cặp nghiệm.

Chọn đáp án **(B)**.

**Câu 16.** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để hệ phương trình  $\begin{cases} 3x - my = 1 \\ -mx + 3y = m - 4 \end{cases}$  có đúng một nghiệm.

**(A)**  $m \neq 3$  hay  $m \neq -3$ .

**(B)**  $m \neq 3$  và  $m \neq -3$ .

**(C)**  $m \neq 3$ .

**(D)**  $m \neq -3$ .

Lời giải.

Ta có định thức của hệ phương trình  $D = 9 - m^2$ .

Để hệ phương trình trên có đúng một nghiệm thì  $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 3$ .

Chọn đáp án **(B)**.

**Câu 17.** Hệ phương trình  $\begin{cases} x \cdot y + x + y = 11 \\ x^2 y + xy^2 = 30 \end{cases}$

**(A)** có 2 nghiệm  $(2; 3)$  và  $(1; 5)$ .

**(B)** có 2 nghiệm  $(2; 1)$  và  $(3; 5)$ .

**(C)** có 1 nghiệm là  $(5; 6)$ .

**(D)** có 4 nghiệm  $(2; 3), (3; 2), (1; 5), (5; 1)$ .

Lời giải.

Đặt  $S = x + y, P = xy$ , điều kiện  $S^2 \geq 4P$ . Khi đó hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} S + P = 11 \\ SP = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \\ S = 6 \\ P = 5 \end{cases}$$

$$\text{TH 1. } \begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x \\ x(5 - x) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, y = 2 \\ x = 2, y = 3 \end{cases}$$

$$\text{TH 2. } \begin{cases} S = 6 \\ P = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - x \\ x(6 - x) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, y = 1 \\ x = 1, y = 5 \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)**.

**Câu 18.** Hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x + m \end{cases}$  có đúng 1 nghiệm khi và chỉ khi

**(A)**  $m = \sqrt{2}$ .

**(B)**  $m = -\sqrt{2}$ .

**(C)**  $m = \sqrt{2}$  và  $m = -\sqrt{2}$ .

**(D)**  $m$  tùy ý.

Lời giải.

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2 + (x + m)^2 = 1 \\ y = x + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + m \\ 2x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi  $2x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$  có nghiệm duy nhất

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \sqrt{2} \\ m = -\sqrt{2} \end{cases}$$

🔍 Chọn đáp án (C).

**Câu 19.** Hệ phương trình  $\begin{cases} |x-1| + y = 0 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$  có nghiệm là

(A)  $x = -3; y = 2.$

(B)  $x = 2; y = -1.$

(C)  $x = 4; y = -3.$

(D)  $x = -4; y = 3.$

🔍 Lời giải.

$$\begin{cases} |x-1| + y = 0 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 5 \\ |x-1| = -2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 5 \geq 0 \\ \begin{cases} y = 2x - 5 \\ x - 1 = 2x - 5 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2x - 5 \\ x - 1 = -2x + 5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 5 \geq 0 \\ \begin{cases} x = 4, y = 3 \\ x = 2, y = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy  $x = 2, y = -1.$

🔍 Chọn đáp án (B).

**Câu 20.** Hệ phương trình  $\begin{cases} mx + 3y = 2m - 1 \\ x + (m+2)y = m + 3 \end{cases}$  có nghiệm duy nhất với giá trị của  $m$  là

(A)  $m \neq 1.$

(B)  $m \neq -3.$

(C)  $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -3 \end{cases}.$

(D)  $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -3 \end{cases}.$

🔍 Lời giải.

Ta có định thức của hệ phương trình  $D = m(m+2) - 3.$

Để hệ phương trình trên có đúng một nghiệm thì  $D \neq 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -3 \end{cases}.$

🔍 Chọn đáp án (D).

**Câu 21.** Với giá trị nào của tham số  $m$  thì hệ phương trình  $\begin{cases} mx + (m+4)y = 2 \\ m(x+y) = 1 - y \end{cases}$  vô nghiệm

(A)  $m = 0.$

(B)  $\begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}.$

(C)  $\begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}.$

(D)  $\begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ m = 3 \end{cases}.$

🔍 Lời giải.

$$\begin{cases} mx + (m+4)y = 2 \\ m(x+y) = 1 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx + (m+4)y = 2 \\ mx + (m+1)y = 1 \end{cases}$$

Ta có định thức của hệ phương trình  $D = m(m+1) - m(m+4) = -3m, D_x = 2(m+1) - m - 4 = m - 2, D_y = m - 2m = -m.$

Để hệ phương trình trên có vô nghiệm thì  $\begin{cases} D = 0 \\ D_x^2 + D_y^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ D_x^2 + D_y^2 \neq 0 \end{cases}.$

Vậy  $m = 0$  thỏa bài toán.

🔍 Chọn đáp án (A).

**Câu 22.** Hệ phương trình  $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13 \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 12 \end{cases}$  có nghiệm là

(A)  $x = \frac{1}{2}; y = -\frac{1}{3}.$

(B)  $x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{3}.$

(C)  $x = -\frac{1}{2}; y = \frac{1}{3}.$

(D) vô nghiệm.

🔍 Lời giải.

Đặt  $d = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}.$  Khi đó hệ viết lại

$$\begin{cases} 2a + 3b = 13 \\ 3a + 2b = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

🔍 Chọn đáp án (B).

**Câu 23.** Tìm  $a$  để hệ phương trình  $\begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + ay = 1 \end{cases}$  vô nghiệm.

(A)  $a = 1$ .

(B)  $a = 1$  hoặc  $a = -1$ .

(C)  $a = -1$ .

(D) không có  $a$ .

**Lời giải.**

Ta có định thức của hệ phương trình  $D = a^2 - 1$ ,  $D_x = a^3 - 1$ ,  $D_y = a - a^2$ .

Để hệ phương trình trên có vô nghiệm thì  $\begin{cases} D = 0 \\ D_x^2 + D_y^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ D_x^2 + D_y^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1$ .

Vậy  $m = 0$  thỏa bài toán.

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 24.** Nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ xy + yz + zx = 27 \end{cases}$  là

(A)  $(1; 1; 1)$ .

(B)  $(1; 2; 1)$ .

(C)  $(2; 2; 1)$ .

(D)  $(3; 3; 3)$ .

**Lời giải.**

Hệ tương đương với

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ xy + yz + zx = xyz \\ xy + yz + zx = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 9 \\ xy + yz + zx = 27 \\ xyz = 27. \end{cases}$$

Khi đó  $x, y, z$  là ba nghiệm của phương trình  $X^3 - 9X^2 + 27X - 27 = 0 \Leftrightarrow X = 3$ .

Khi đó nghiệm của hệ phương trình đã cho là  $(3; 3; 3)$ .

**Chọn đáp án (D).**

**Câu 25.** Hệ phương trình  $\begin{cases} x + y + xy = \frac{7}{2} \\ x^2y + xy^2 = \frac{5}{2} \end{cases}$  có nghiệm là

(A)  $(3; 2); (-2; 1)$ .

(B)  $(0; 1); (1; 0)$ .

(C)  $(0; 2); (2; 0)$ .

(D)  $(2; \frac{1}{2}); (\frac{1}{2}; 2)$ .

**Lời giải.**

Đặt  $S = x + y$ ,  $P = xy$ , điều kiện  $S^2 \geq 4P$ . Khi đó hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} S + P = \frac{7}{2} \\ SP = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ (loại)} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} S = \frac{5}{2} \\ P = 1. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x + y = \frac{5}{2} \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{2} - x \\ 2x^2 - 5x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, y = 2 \\ x = 2, y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

**Chọn đáp án (D).**

**Câu 26.** Hệ phương trình  $\begin{cases} x + y + xy = 5 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases}$  có nghiệm là

(A)  $(2; 3)$  hoặc  $(3; 2)$ .

(B)  $(1; 2)$  hoặc  $(2; 1)$ .

(C)  $(-2; -3)$  hoặc  $(-3; -2)$ .

(D)  $(-1; -2)$  hoặc  $(-2; -1)$ .

**Lời giải.**

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x + y + xy = 5 \\ (x + y)^2 - xy = 7 \end{cases}$$

Đặt  $S = x + y$ ,  $P = xy$ , điều kiện  $S^2 \geq 4P$ . Khi đó hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} S + P = 5 \\ S^2 - P = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 5 - S \\ S^2 + S - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 9 \\ S = -4 \end{cases} \text{ loại} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} S = 3 \\ P = 2. \end{cases}$$

Khi đó  $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ x(3 - x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y = 2 \\ x = 2, y = 1. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm  $(1; 2), (2; 1)$ .

🔍 Chọn đáp án (B).

**Câu 27.** Hệ phương trình  $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 + y^2 + 3(x + y) = 28 \end{cases}$  có nghiệm là

(A)  $(3; 2); (2; 3)$ .

(B)  $(-3; -7); (-7; -3)$ .

(C) vô nghiệm.

(D)  $(3; 2); (2; 3); (-3; -7); (-7; -3)$ .

🔍 Lời giải.

Đặt  $S = x + y, P = xy$ , điều kiện  $S^2 \geq 4P$ . Khi đó hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} S + P = 11 \\ S^2 - 2P + 3S = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 11 - S \\ S^2 + 5S + 50 = 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

🔍 Chọn đáp án (C).

**Câu 28.** Hệ phương trình  $\begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ y^3 = 3y + 8x \end{cases}$  có nghiệm là  $(x; y)$  với  $x \neq 0$  và  $y \neq 0$  là

(A)  $(-\sqrt{11}; -\sqrt{11}); (\sqrt{11}; \sqrt{11})$ .

(B)  $(0; \sqrt{11}); (\sqrt{11}; 0)$ .

(C)  $(-\sqrt{11}; 0)$ .

(D)  $(\sqrt{11}; 0)$ .

🔍 Lời giải.

$$\begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ y^3 = 3y + 8x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 5(y - x) \\ x^3 = 3x + 8y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)(x^2 + y^2 + xy + 5) = 0 \\ x^3 = 3x + 8y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^3 = 11x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \sqrt{11} \\ x = y = -\sqrt{11} \end{cases}$$

(vì  $x^2 + y^2 + xy + 5 > 0$  với mọi  $x, y$ )

🔍 Chọn đáp án (A).

**Câu 29.** Hãy chỉ ra các cặp nghiệm khác 0 của hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 = 5x - 2y \\ y^2 = 5y - 2x \end{cases}$

(A)  $(3; 3)$ .

(B)  $(2; 2); (3; 1); (-3; 6)$ .

(C)  $(1; 1); (2; 2); (3; 3)$ .

(D)  $(-2; -2); (1; -2); (-6; 3)$ .

🔍 Lời giải.

$$\begin{cases} x^2 = 5x - 2y \\ y^2 = 5y - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 7(x - y) \\ x^2 = 5x - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = 3x \\ x + y = 7 \\ x^2 = 5x - 2(7 - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x = y = 3 \\ y = 7 - x \\ x^2 - 7x + 14 = 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là  $(3; 3)$ .

🔍 Chọn đáp án (A).

**Câu 30.** Hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 + y = 6 \\ y^2 + x = 6 \end{cases}$  có bao nhiêu nghiệm?

(A) 6.

(B) 4.

(C) 2.

(D) 0.

🔍 Lời giải.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - (x - y) = 0 \\ x^2 + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + x - 6 = 0 \\ y = 1 - x \\ x^2 - x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = -3 \\ x = y = 2 \end{cases} \text{ vô nghiệm}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 cặp nghiệm.

🔍 Chọn đáp án (C).

**Câu 31.** Hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 = 3x - y \\ y^2 = 3y - x \end{cases}$  có bao nhiêu cặp nghiệm  $(x; y)$ ?

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

🔍 Lời giải.

$$\begin{cases} x^2 = 3x - y \\ y^2 = 3y - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 4(x - y) \\ x^2 = 3x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = 2x \\ x + y = 4 \\ x^2 = 3x - (4 - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2 \\ x = y = 0. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 cặp nghiệm.

🐞 Chọn đáp án **C**.....

**Câu 32.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 = m^2 \end{cases}$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) Hệ phương trình có nghiệm với mọi  $m$ .  
 (B) Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi  $|m| \geq \sqrt{8}$ .  
 (C) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ  $|m| \geq 2$ .  
 (D) Hệ phương trình luôn vô nghiệm.

🔗 Lời giải.

Hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} y = 4 - x \\ 2x^2 - 8x + 16 - m^2 = 0. \end{cases}$$

có  $\Delta' = 16 - 2(16 - m^2) = 2m^2 - 16$ .

Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi phương trình  $2x^2 - 8x + 16 - m^2 = 0$  có nghiệm  $2m^2 - 16 \geq 0 \Leftrightarrow |m| \geq \sqrt{8}$ .

🐞 Chọn đáp án **B**.....

**Câu 33.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} 3x^2 - 4xy + 2y^2 = 17 \\ y^2 - x^2 = 16 \end{cases}$ . Hệ thức biểu diễn  $x$  theo  $y$  rút ra từ hệ phương trình là

- (A)  $x = \frac{y-2}{2}$  hay  $x = \frac{y+2}{2}$ .  
 (B)  $x = \frac{y-3}{2}$  hay  $x = \frac{y+3}{2}$ .  
 (C)  $x = \frac{y-1}{2}$  hay  $x = \frac{y+1}{2}$ .  
 (D)  $x = \frac{5}{13}y$  hay  $x = \frac{3}{5}y$ .

🔗 Lời giải.

Nhân chéo hai phương trình ta được  $16(3x^2 - 4xy + 2y^2) = 17(y^2 - x^2) \Leftrightarrow 65x^2 - 64xy + 15y^2 = 0$ . (1)

Vì khi  $y = 0$  không thỏa mãn hệ phương trình nên ta chia hai vế (1) cho  $y^2$  và đặt  $t = \frac{x}{y}$  ta được

$$65t^2 - 64t + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5}{13} \\ t = \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Khi đó  $x = \frac{5}{13}y$  hay  $x = \frac{3}{5}y$ .

🐞 Chọn đáp án **D**.....

**Câu 34.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} mx + y = 3 \\ x + my = 2m + 1 \end{cases}$ . Các giá trị thích hợp của tham số  $m$  để hệ phương trình có nghiệm nguyên là

- (A)  $m = 0, m = -2$ .  
 (B)  $m = 1; m = 2; m = 3$ .  
 (C)  $m = 0; m = 2$ .  
 (D)  $m = 1; m = -3; m = 4$ .

🔗 Lời giải.

Ta có định thức của hệ phương trình  $D = m^2 - 1, D_x = 3m - 2m - 1 = m - 1, D_y = 2m^2 + m - 3$ .

Để hệ phương trình trên có nghiệm thì  $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$ .

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{m+1} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{2m+3}{m+1} = 2 + \frac{1}{m+1}. \end{cases}$$

Khi đó để hệ có nghiệm nguyên thì  $m+1$  là ước của 1, hay  $\begin{cases} m+1 = 1 \\ m+1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0, m = -2$ .

Vậy  $m = 0, m = -2$  thỏa bài toán.

🐞 Chọn đáp án **A**.....

**Câu 35.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy = 12 \\ 2(x+y)^2 - y^2 = 14 \end{cases}$ . Các cặp nghiệm dương của hệ phương trình là

- Ⓐ  $(1; 2), (\sqrt{2}; \sqrt{2})$ .      Ⓑ  $(2; 1), (\sqrt{3}; \sqrt{3})$ .      Ⓒ  $\left(\frac{2}{3}; 3\right), \left(\sqrt{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ .      Ⓓ  $\left(\frac{1}{2}; 1\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{3}; \sqrt{3}\right)$ .

🔗 **Lời giải.**

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy = 12 \\ 2(x+y)^2 - y^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy = 12 \\ 2x^2 + y^2 + 4xy = 14. \end{cases}$$

Đặt  $a = 2x^2 + y^2, b = xy$ , ta được  $\Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = 12 \\ a + 4b = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 2. \end{cases}$

Khi đó  $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 6 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 2 \\ 2x^2 + y^2 = 3xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 2 \\ 2t^2 - 3t + 1 = 0 \end{cases}$  với  $t = \frac{x}{y}$ .

Suy ra  $\begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ 2x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -1 \\ x = \sqrt{2}, y = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2}, y = -\sqrt{2}. \end{cases}$

🔍 Chọn đáp án Ⓐ.

**Câu 36.** Hệ phương trình  $\begin{cases} x^3 - 3x = y^3 - 3y \\ x^6 + y^6 = 27 \end{cases}$  có bao nhiêu nghiệm?

- Ⓐ 5.      Ⓑ 2.      Ⓒ 6.      Ⓓ 4.

🔗 **Lời giải.**

$$\begin{cases} x^3 - 3x = y^3 - 3y \\ x^6 + y^6 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x^2 + y^2 + xy - 3) = 0 \\ x^6 + y^6 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \begin{cases} x^6 + x^6 = 27 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \\ x^6 + y^6 = 27. \end{cases} \end{cases}$$

TH 1.  $\begin{cases} x = y \\ x^6 + x^6 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \pm \sqrt[6]{\frac{27}{2}}.$

TH 2.  $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ x^6 + y^6 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2 + xy)^3 = 27 \\ x^6 + y^6 = 27 \end{cases} \Rightarrow (x^2 + y^2 + xy)^3 = x^6 + y^6. \quad (1)$

☑ Nếu  $y = 0$  thì hệ trở thành

$$\begin{cases} 0 = x^3 - 3x \\ x^6 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{3}.$$

Khi đó hệ có hai cặp nghiệm  $(\sqrt{3}; 0); (-\sqrt{3}; 0).$

☑ Nếu  $y \neq 0$ , ta chia hai vế (1) cho  $y^6$ , đặt  $t = \frac{x}{y}$ . Khi đó ta được

$$t(3t^4 + 6t^3 + 7t + 6t + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ 3\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) + 6\left(t + \frac{1}{t}\right) + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t + \frac{1}{t} = \frac{-3 - \sqrt{6}}{3} \text{ (loại)} \\ t + \frac{1}{t} = \frac{-3 + \sqrt{6}}{3} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\left(\text{vì } \left|t + \frac{1}{t}\right| \geq 2\right).$$

Suy ra  $t = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Hệ trở thành

$$\begin{cases} 0 = y^3 - 3y \\ y^6 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{3}$$

Khi đó hệ có hai cặp nghiệm  $(0; \sqrt{3}); (0; -\sqrt{3}).$

Vậy hệ có 6 cặp nghiệm.

☞ Chọn đáp án **(C)**.

**Câu 37.** Hệ phương trình  $\begin{cases} 2x + \sqrt{y-1} = 1 \\ 2y + \sqrt{x-1} = 1 \end{cases}$  có bao nhiêu cặp nghiệm  $(x; y)$ ?

- (A) 1. (B) vô nghiệm. (C) 2. (D) 3.

☞ **Lời giải.**

Điều kiện xác định  $x \geq 1, y \geq 1$ .

Khi đó  $2x + \sqrt{y-1} \geq 2$  nên phương trình  $2x + \sqrt{y-1} = 1$  vô nghiệm. Do đó hệ phương trình vô nghiệm.

☞ Chọn đáp án **(B)**.

**Câu 38.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} x + y = m + 1 \\ x^2y + y^2x = 2m^2 - m - 3 \end{cases}$  và các mệnh đề

(I) Hệ có vô số nghiệm khi  $m = -1$ .

(II) Hệ có nghiệm khi  $m > \frac{3}{2}$ .

(III) Hệ có nghiệm với mọi  $m$ .

Các mệnh đề nào đúng?

- (A) Chỉ (I). (B) Chỉ (II). (C) Chỉ (III). (D) Chỉ (I) và (III).

☞ **Lời giải.**

Khi đó hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x + y = m + 1 \\ xy(m + 1) = (2m - 3)(m + 1). \end{cases}$$

☑ Khi  $m = -1$  thì hệ trở thành  $\begin{cases} x + y = 0 \\ xy \cdot 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -y$ . Khi đó hệ có vô số nghiệm, với tập nghiệm  $S = \{(x; -x) | x \in \mathbb{R}\}$ .

☑ Khi  $m \neq -1$ . Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} x + y = m + 1 \\ xy = (2m - 3) \end{cases}$$

có nghiệm khi  $(x + y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow (m + 1)^2 \geq 4(2m - 3) \Leftrightarrow m^2 - 6m + 13 \geq 0 \Leftrightarrow (m - 3)^2 + 4 \geq 0$  luôn đúng với mọi  $m \neq -1$ .

Do đó hệ có nghiệm với mọi  $m$ .

☞ Chọn đáp án **(D)**.

**Câu 39.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} x + y = 2a + 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 - 2a + 3 \end{cases}$ . Giá trị thích hợp của tham số  $a$  sao cho hệ có nghiệm  $(x; y)$

và tích  $x \cdot y$  nhỏ nhất là

- (A)  $a = 1$ . (B)  $a = -1$ . (C)  $a = 2$ . (D)  $a = -2$ .

☞ **Lời giải.**

Hệ tương đương với

$$\begin{cases} x + y = 2a + 1 \\ (x + y)^2 - 2xy = a^2 - 2a + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2a + 1 \\ xy = \frac{3a^2 + 6a - 2}{2} \end{cases}$$

Để hệ phương trình trên có nghiệm thì

$$(x + y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow (2a + 1)^2 \geq 6a^2 + 12a - 4 \Leftrightarrow 2a^2 + 8a - 5 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-4 - \sqrt{26}}{2} \leq a \leq \frac{-4 + \sqrt{26}}{2}.$$

Ta có  $xy = \frac{3a^2 + 6a - 2}{2} = f(a)$  với  $\frac{-4 - \sqrt{26}}{2} \leq a \leq \frac{-4 + \sqrt{26}}{2}$  có bảng biến thiên như sau

|     |                                          |                |                                          |
|-----|------------------------------------------|----------------|------------------------------------------|
| $x$ | $\frac{-4 - \sqrt{26}}{2}$               | $-1$           | $\frac{-4 + \sqrt{26}}{2}$               |
| $y$ | $f\left(\frac{-4 - \sqrt{26}}{2}\right)$ | $-\frac{5}{2}$ | $f\left(\frac{-4 + \sqrt{26}}{2}\right)$ |

Vậy  $xy$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $a = -1$ .

🔍 Chọn đáp án **(B)**.

**Câu 40.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} 2x - y = 2 - a \\ x + 2y = a + 1 \end{cases}$ . Tìm tham số  $a$  để tổng bình phương hai nghiệm của hệ phương trình đạt giá trị nhỏ nhất.

**(A)**  $a = 1$ .

**(B)**  $a = -1$ .

**(C)**  $a = \frac{1}{2}$ .

**(D)**  $a = -\frac{1}{2}$ .

🔍 Lời giải.

$$\begin{cases} 2x - y = 2 - a \\ x + 2y = a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - a \\ y = a. \end{cases}$$

Khi đó  $x^2 + y^2 = (1 - a)^2 + a^2 = 2a^2 - 2a + 1 = \left(\sqrt{2}a - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ .

Khi đó  $x^2 + y^2$  đạt giá trị nhỏ nhất bằng  $\frac{1}{2}$  khi  $\sqrt{2}a - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ .

🔍 Chọn đáp án **(C)**.

**Câu 41.** Tìm tham số  $m$  để hệ phương trình  $\begin{cases} mx - (m + 1)y = 3m \\ x - 2my = m + 2 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$  có nghiệm.

**(A)**  $m = \frac{5}{2}$ .

**(B)**  $m = -\frac{5}{2}$ .

**(C)**  $m = \frac{2}{5}$ .

**(D)**  $m = -\frac{2}{5}$ .

🔍 Lời giải.

$$\begin{cases} mx - (m + 1)y = 3m \\ x - 2my = m + 2 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx - (m + 1)y = 3m \\ x = 4 - 2y \\ (2 + 2m)y = 2 - m. \end{cases}$$

TH 1. Nếu  $2 + 2m = 0$  thì hệ trở thành

$$\begin{cases} -x = -3 \\ x = 4 - 2y \\ 0y = 3. \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

TH 2.  $2 + 2m \neq 0$  thì hệ trở thành

$$\begin{cases} mx - (m + 1)y = 3m \\ x = 4 - 2y \\ y = \frac{2 - m}{2 + 2m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx - (m + 1)y = 3m \\ x = \frac{5m + 2}{m + 1} \\ y = \frac{2 - m}{2 + 2m} \end{cases}$$

$$\text{suy ra } \frac{5m^2 + 2m}{m + 1} - (m + 1) \cdot \frac{2 - m}{2 + 2m} = 3m \Leftrightarrow 5m^2 - 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{2}{5} \end{cases}.$$

Vậy giá trị  $m$  cần tìm là  $m = 1$  và  $m = -\frac{2}{5}$ .

🔍 Chọn đáp án **(D)**.

**Câu 42.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 = 0 \\ x^2 - xy - y^2 + 3x + 7y + 3 = 0 \end{cases}$ . Các cặp nghiệm  $(x; y)$  sao cho  $x, y$  đều là các số nguyên là

- (A)  $(2; -2); (3; -3)$ . (B)  $(-2; 2); (-3; 3)$ . (C)  $(1; -1); (3; -3)$ . (D)  $(-1; 1); (-4; 4)$ .

**Lời giải.**

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -x^2 - xy \\ -2xy - x^2 + 3x + 7y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -x^2 - xy \\ (2x - 7)y = -x^2 + 3x + 3 \end{cases} \quad (1)$$

Vì  $x, y \in \mathbb{Z}$  nên  $2x - 7 \neq 0$ . Khi đó ta suy ra từ (1)

$$y = \frac{-x^2 + 3x + 3}{2x - 7} \Leftrightarrow 4y = \frac{-4x^2 + 12x + 12}{2x - 7} = -2x - 1 + \frac{5}{2x - 7} \in \mathbb{Z}$$

Do đó  $2x - 7$  là ước của 5 và 5 có các ước là  $\{\pm 1; \pm 5\}$  nên

TH 1.  $2x - 7 = 1 \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow 32 + 4y - y^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 8 \\ y = -4 \end{cases}$  thỏa bài toán.

TH 2.  $2x - 7 = -1 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow 18 + 3y - y^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 6 \\ y = -3 \end{cases}$  thỏa bài toán.

TH 3.  $2x - 7 = -5 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow 2 + y - y^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -1 \end{cases}$  thỏa bài toán.

TH 4.  $2x - 7 = 5 \Leftrightarrow x = 6 \Rightarrow 72 + 6y - y^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 12 \\ y = -6 \end{cases}$  thỏa bài toán.

Vậy hệ phương trình có tập các nghiệm nguyên  $\{(4; -4); (4; 8); (3; -3); (3; 6); (1; -1); (1; 2); (6; -6); (6; 12)\}$ .

**Chọn đáp án** (C).

**Câu 43.** Nếu  $(x; y)$  là nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 1 \\ y - 4xy = 2 \end{cases}$ . Thì  $xy$  bằng bao nhiêu?

- (A) 4. (B) -4.  
(C) 1. (D) không tồn tại giá trị  $xy$ .

**Lời giải.**

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 1 \\ y - 4xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4xy = y - 2 \\ x^2 - 4xy + y^2 = 1 \end{cases} \quad (*)$$

TH 1. Nếu  $y = 0$  thì hệ (\*) trở thành  $\begin{cases} 0 = -2 \\ x^2 = 1 \end{cases}$  vô nghiệm.

TH 2. Nếu  $y \neq 0$  thì (\*) trở thành

$$\begin{cases} x = \frac{y-2}{4y} \\ \frac{(y-2)^2}{16y^2} + 2 - y + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y-2}{4y} \\ 16y^4 - 16y^3 + 17y^2 - 4y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y-2}{4y} \\ (4y^2 - 2y)^2 + 12y^2 + (y-2)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{vô nghiệm vì } (4y^2 - 2y)^2 + 12y^2 + (y-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4u^2 - 2y = 0 \\ y = 0 \\ y = 2 \end{cases} \text{ không xảy ra.}$$

Vậy không tồn tại giá trị  $xy$  thỏa bài toán.

**Chọn đáp án** (D).

**Câu 44.** Hệ phương trình  $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 5a - 2 \end{cases}$  có nghiệm  $(x; y)$  với  $x < 0$  khi và chỉ khi

- (A)  $a < 0$ . (B)  $a > 0$ . (C)  $a < \frac{5}{2}$ . (D)  $a > \frac{5}{2}$ .

**Lời giải.**

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 5a - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5a}{2} \\ y = \frac{4 - 5a}{2} \end{cases}.$$

Để hệ phương trình có nghiệm  $x < 0$  thì  $a < 0$ .

🐞 Chọn đáp án **A**.

**Câu 45.** Cho các số thực  $x, y$  thỏa  $\begin{cases} x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} = 12 \\ x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{y-2} \end{cases}$ . Khi đó  $x + y$  bằng

**A** 2.

**B** 1.

**C** 6.

**D** 0.

🔗 Lời giải.

Điều kiện  $\begin{cases} 2 \leq y \leq 12 \\ -2\sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{3} \end{cases}$ .

Với hai số thực  $a, b$  bất kỳ ta có  $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$

(\*)

Áp dụng (\*) ta được

$$\begin{cases} x\sqrt{12-y} \leq \frac{x^2 - y + 12}{2} \\ \sqrt{y(12-x^2)} \leq \frac{12 - x^2 + y}{2} \end{cases}.$$

Suy ra  $x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} \leq 12$ , do đó từ phương trình đầu của hệ ta được  $\begin{cases} x \geq 0 \\ y = 12 - x^2 \end{cases}$ . Thay vào phương trình dưới của hệ ta được

$$x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{10 - x^2} \Leftrightarrow x^3 - 8x - 3 + 2(1 - \sqrt{10 - x^2}) = 0 \Leftrightarrow (x-3) \left[ x^2 + 3x + 1 + \frac{2(x+3)}{1 + \sqrt{10 - x^2}} \right] = 0. \quad (1)$$

Do  $x \geq 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 + \frac{2(x+3)}{1 + \sqrt{10 - x^2}} > 0$ , khi đó

$$(1) \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 3 \text{ thỏa mãn điều kiện.}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là  $(x; y) = (3; 3)$ . Do đó  $x + y = 6$ .

🐞 Chọn đáp án **C**.



# BẤT ĐẲNG THỨC - BẤT PHƯƠNG TRÌNH

## §1 MỆNH ĐỀ

### A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Một số kiến thức cần nhớ

**Định nghĩa:** Các mệnh đề  $a < b$ ,  $a > b$ ,  $a \leq b$ ,  $a \geq b$  được gọi là bất đẳng thức.

**Tính chất:**

- ①  $\forall c \in \mathbb{R}$ , ta có:  $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$  (hoặc  $a < b \Leftrightarrow a - c < b - c$ ).
- ②  $\forall c > 0$ , ta có  $a < b \Leftrightarrow ac < bc$ .
- ③  $\forall c < 0$ , ta có  $a < b \Leftrightarrow ac > bc$ .
- ④  $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$  (chỉ đúng với dấu +, không đúng với dấu -).
- ⑤  $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$  (chỉ đúng với dấu  $\times$ , không đúng với dấu :).
- ⑥  $\forall a > 0$ , ta có  $a < b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}$  (với  $n$  nguyên dương).
- ⑦  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , ta có  $a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$  (với  $n$  nguyên dương).
- ⑧  $\forall a > 0$ , ta có  $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$ .
- ⑨  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , ta có  $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$ .
- ⑩  $\forall a, b \geq 0$ , ta có  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ , dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi  $a = b$  (bất đẳng thức Cauchy).
- ⑪  $\forall a > 0$ , ta có  $a + \frac{1}{a} \geq 2$ .

### B BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Chứng minh các bất đẳng thức sau

- ①  $2(1-a)^2 \geq 1-2a^2, \forall a \in \mathbb{R}$ .
- ②  $(1+a^2)(1+b^2) \geq (1+ab)^2, \forall a, b \in \mathbb{R}$ .
- ③  $a^2 + b(13b+a) \geq 3b(a+b), \forall a, b \in \mathbb{R}$ .
- ④  $2x^2 + y^2 + 1 \geq 2x(1-y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ .
- ⑤  $x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 14 \geq 2x + 12y + 6z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ .
- ⑥  $\frac{x}{1+x} \geq \frac{y}{1+y}, \forall x \geq y \geq 0$ .
- ⑦  $(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2), \forall a, b, x, y \in \mathbb{R}$ .

⑧ Cho  $x, y$  là hai số thực thỏa  $4x + y = 1$ . Chứng minh rằng  $4x^2 + y^2 \geq 0, 2$ .

⑨  $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}, \forall a, b > 0$ .

⑩  $\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}, \forall a \geq 1$ .

**Lời giải.**

①  $2(1-a)^2 \geq 1-2a^2 \Leftrightarrow (2a-1)^2 \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}$ .

②  $(1+a^2)(1+b^2) \geq (1+ab)^2 \Leftrightarrow 1+a^2+b^2+a^2b^2 \geq 1+2ab+a^2b^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{R}$ .

③  $a^2+b(13b+a) \geq 3b(a+b) \Leftrightarrow a^2-2ab+10b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2+9b^2 \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{R}$ .

④  $2x^2+y^2+1 \geq 2x(1-y) \Leftrightarrow (x^2+y^2+2xy) + (x^2-2x+1) \geq 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 + (x-1)^2 \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

⑤  $x^2+4y^2+3z^2+14 \geq 2x+12y+6z \Leftrightarrow (x-1)^2 + (2y-3)^2 + 3(z-1)^2 + 1 \geq 0, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ .

⑥  $\frac{x}{1+x} \geq \frac{y}{1+y} \Leftrightarrow x(1+y) \geq y(1+x) \Leftrightarrow x \geq y, \forall x \geq y \geq 0$ .

⑦  $(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2) \Leftrightarrow a^2x^2+2abxy+b^2y^2 \leq a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2$   
 $\Leftrightarrow a^2y^2+b^2x^2-2abxy \geq 0 \Leftrightarrow (ay-bx)^2 \geq 0, \forall a, b, x, y \in \mathbb{R}$ .

⑧ Sử dụng câu 7, ta có  $(4+1)(4x^2+y^2) \geq (4x+y)^2 = 1 \Rightarrow 4x^2+y^2 \geq \frac{1}{5} = 0, 2$ .

⑨  $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{\sqrt{b}} - 2\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) + \left(\frac{b}{\sqrt{a}} - 2\sqrt{b} + \sqrt{a}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{b}} + \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{\sqrt{a}} \geq 0$ .

⑩  $\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} < \frac{2}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a-1}} \Leftrightarrow \sqrt{a+1} + \sqrt{a-1} < 2\sqrt{a}$ .

Bất đẳng thức trên đúng nhờ áp dụng 7, ta được

$$(\sqrt{a+1} + \sqrt{a-1})^2 \leq (a+1+a-1)(1+1) = 4a \Rightarrow \sqrt{a+1} + \sqrt{a-1} \leq 2\sqrt{a}.$$

Đẳng thức không xảy ra được, ta có điều phải chứng minh.

**Bài 2.** Chứng minh các bất đẳng thức sau

①  $a^2b + ab^2 \leq a^3 + b^3, \forall a, b \geq 0$ .

②  $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2), \forall a, b \geq 0$ .

③  $4(a^3 + b^3) \geq (a+b)^3, \forall a, b \geq 0$ .

④  $\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right) \leq \frac{a^3+b^3}{2}, \forall a, b \geq 0$ .

⑤  $2(a^5 + b^5) \geq (a^2 + b^2)(a^3 + b^3), \forall a, b \geq 0$ .

**Lời giải.**

①  $a^2b + ab^2 \leq a^3 + b^3 \Leftrightarrow ab(a+b) \leq (a+b)(a^2 - ab + b^2) \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \geq 0$ .

②  $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2) \Leftrightarrow (a^4 - a^3b) + (b^4 - ab^3) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(a^2 + ab + b^2) \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{R}$ .

Bất đẳng thức trên đúng do  $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{R}$ .

③  $4(a^3 + b^3) \geq (a+b)^3 \Leftrightarrow 4(a^3 + b^3) \geq a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$ .  
 Đúng theo câu 1.

④  $\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right) \geq \frac{a^3+b^3}{2} \Leftrightarrow \frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{4} \leq \frac{a^3+b^3}{2} \Leftrightarrow a^2b+ab^2 \leq a^3+b^3$ .  
 Đúng theo câu 1.

⑤  $2(a^5 + b^5) \geq (a^2 + b^2)(a^3 + b^3) \Leftrightarrow a^5 + b^5 \geq a^3b^2 + a^2b^3 \Leftrightarrow a^3(a^2 - b^2) - b^3(a^2 - b^2) \geq 0$ .  
 Bất đẳng thức trên đúng với mọi  $a, b \geq 0$  vì  $a^2 - b^2$  và  $a^3 - b^3$  cùng dấu.

**Bài 3.** Chứng minh các bất đẳng thức sau

①  $a^2 + ab + b^2 \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{R}.$

②  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$

③  $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b, \forall a, b \in \mathbb{R}.$

④  $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2), \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$

⑤  $a^2 + b^2 + 4 \geq ab + 2(a + b), \forall a, b \in \mathbb{R}.$

⑥  $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c), \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$

**Lời giải.**

①  $a^2 + ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{R}.$

②  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca) \Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0.$

③ Tương tự câu 2 với  $c = 1$ .

④ Từ câu 2, ta có

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2.$$

⑤ Tương tự câu 2 với  $c = 2$ .

⑥  $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c) \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 \geq 0, \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$

**Bài 4.** Chứng minh các bất đẳng thức sau

①  $(a + b)(1 + 4ab) \geq 4ab, \forall a, b \geq 0.$

②  $(2a + 1)(6 + ab)(b + 3) \geq 48ab, \forall a, b \geq 0.$

③  $\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 8, \forall a, b, c > 0.$

④  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a + b}, \forall a, b > 0.$

⑤  $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c}\right)\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq 8, \forall a, b, c > 0.$

**Lời giải.**

① Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \geq 0 ; \quad 1 + 4ab \geq 2\sqrt{4ab} = 4\sqrt{ab} \geq 0.$$

Nhân hai bất đẳng thức trên theo vế, suy ra

$$(a + b)(1 + 4ab) \geq 8\sqrt{ab} \geq 4\sqrt{ab}.$$

② Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$2a + 1 \geq 2\sqrt{2a} \geq 0 ; \quad 6 + ab \geq 2\sqrt{6ab} \geq 0 ; \quad b + 3 \geq 2\sqrt{3b} \geq 0.$$

Nhân ba bất đẳng thức trên theo vế ta được

$$(2a + 1)(6 + ab)(b + 3) \geq 2\sqrt{2a} \cdot 2\sqrt{6ab} \cdot 2\sqrt{3b} = 48ab.$$

③ Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$1 + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}} \geq 0 ; \quad 1 + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{b}{c}} \geq 0 ; \quad 1 + \frac{c}{a} \geq 2\sqrt{\frac{c}{a}} \geq 0.$$

Nhân ba bất đẳng thức trên theo vế ta được

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot 2\sqrt{\frac{b}{c}} \cdot 2\sqrt{\frac{c}{a}} = 8.$$

④  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a + b} \Leftrightarrow (a + b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0.$

⑤ Tương tự câu 3.

**Bài 5.** Chứng minh các bất đẳng thức sau

- ①  $a + b + 2 \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b}), \forall a, b \geq 0.$       ②  $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}, \forall a, b, c \geq 0.$
- ③  $a + b + 1 \geq \sqrt{ab} + \sqrt{a} + \sqrt{b}, \forall a, b \geq 0.$       ④  $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \forall a, b, c > 0.$
- ⑤  $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6, \forall a, b, c > 0.$       ⑥ Nếu  $\frac{a}{b} < 1$  thì  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$ , với  $a, b, c > 0.$

**Lời giải.**

①  $a + b + 2 \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \Leftrightarrow (\sqrt{a} - 1)^2 + (\sqrt{b} - 1)^2 \geq 0.$

② Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta được

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad ; \quad b + c \geq 2\sqrt{bc} \quad ; \quad c + a \geq 2\sqrt{ca}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế, ta được

$$2a + 2b + 2c \geq 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ca} \Rightarrow a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}.$$

③ Áp dụng câu 2 với  $c = 1.$

④ Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} \geq 2\sqrt{\frac{a}{bc} \cdot \frac{b}{ca}} = \frac{2}{c} \quad ; \quad \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq 2\sqrt{\frac{b}{ca} \cdot \frac{c}{ab}} = \frac{2}{a} \quad ; \quad \frac{c}{ab} + \frac{a}{bc} \geq 2\sqrt{\frac{c}{ab} \cdot \frac{a}{bc}} = \frac{2}{b}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế, ta được

$$2\frac{a}{bc} + 2\frac{b}{ca} + 2\frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \Rightarrow \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

⑤  $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \geq 6.$

Bất đẳng thức trên đúng do việc cộng ba bất đẳng thức sau

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2 \quad ; \quad \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b}} = 2 \quad ; \quad \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2\sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c}} = 2.$$

⑥  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \Leftrightarrow a(b+c) < b(c+a) \Leftrightarrow ac < bc \Leftrightarrow a < b \Leftrightarrow \frac{a}{b} < 1.$

## C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

**Câu 1.** Trong các tính chất sau, tính chất nào sai?

- Ⓐ  $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d.$       Ⓑ  $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{d}.$
- Ⓒ  $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd.$       Ⓓ  $\begin{cases} 0 < a \leq b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd.$

**Lời giải.**

☑ Ta có  $\begin{cases} 0 < 2 < 3 \\ 0 < 1 < 5 \end{cases}$  nhưng  $\frac{a}{c} = 2 > \frac{3}{5} = \frac{b}{d}.$

☑ Theo tính chất của bất đẳng thức thì các mệnh đề còn lại là đúng.

Chọn đáp án Ⓑ.

**Câu 2.** Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

(A)  $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ .

(B)  $a < b \Rightarrow ac < bc$ .

(C)  $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$ .

(D)  $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$ .

**Lời giải.**

- ☑ Mệnh đề  $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$  sai khi  $a = -3, b = 2$ .
- ☑ Mệnh đề  $a < b \Rightarrow ac < bc$  sai khi  $a = 2, b = 3$  và  $c = -2$ .
- ☑  $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$  sai khi  $a = c = -3, b = d = -2$ .
- ☑ Theo tính chất của bất đẳng thức thì mệnh đề còn lại là đúng.

**Chọn đáp án (D)**

**Câu 3.** Mệnh đề nào sau đây sai?

(A)  $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$ .

(B)  $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$ .

(C)  $\begin{cases} a < b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a - c < b - d$ .

(D)  $ac \leq bc \Rightarrow a \leq b$ , với  $c > 0$ .

**Lời giải.**

- ☑ Mệnh đề  $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$  sai khi  $a = b = 1$  và  $c = d = 2$ .
- ☑ Ta có  $\begin{cases} a < b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < b \\ -c < -d \end{cases} \Rightarrow a - c < b - d$  nên mệnh đề  $\begin{cases} a < b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a - c < b - d$  là đúng.
- ☑ Theo tính chất của bất đẳng thức thì các mệnh đề còn lại là đúng.

**Chọn đáp án (B)**

**Câu 4.** Cho ba số  $a, b, c$  thỏa mãn đồng thời  $a + b - c > 0$ ;  $a + c - b > 0$ ;  $b + c - a > 0$ . Để ba số  $a, b, c$  là ba cạnh của một tam giác thì cần thêm điều kiện gì?

(A) Cần có cả  $a, b, c \geq 0$ .

(B) Cần có cả  $a, b, c > 0$ .

(C) Chỉ cần một trong ba số  $a, b, c$  dương.

(D) Không cần thêm điều kiện gì.

**Lời giải.**

Nếu  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a + b > c$ ;  $a + c > b$ ;  $b + c > a$  thì  $a, b, c$  là ba cạnh của một tam giác.

**Chọn đáp án (B)**

**Câu 5.** Nếu  $a > b$  và  $c > d$  thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

(A)  $ac > bd$ .

(B)  $a - c < b - d$ .

(C)  $a + c > b + d$ .

(D)  $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$ .

**Lời giải.**

- ☑ Bất đẳng thức  $ac > bd$  sai khi  $a = 3, b = -2, c = 2$  và  $d = -5$ .
- ☑ Bất đẳng thức  $a - c < b - d$  sai khi  $a = 5, b = -2, c = 2$  và  $d = -3$ .
- ☑ Bất đẳng thức  $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$  sai khi  $a = 3, b = -5, c = 2$  và  $d = -1$ .
- ☑ Theo tính chất của bất đẳng thức thì mệnh đề còn lại là đúng.

**Chọn đáp án (C)**

**Câu 6.** Cho bất đẳng thức  $|a - b| \leq |a| + |b|$ . Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi?

(A)  $a = b$ .

(B)  $ab \leq 0$ .

(C)  $ab \geq 0$ .

(D)  $ab = 0$ .

**Lời giải.**

Theo tính chất của bất đẳng thức trị tuyệt đối thì dấu “=” xảy ra khi  $a(-b) \geq 0 \Leftrightarrow ab \leq 0$ .

**Chọn đáp án (B)**

**Câu 7.** Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $f(x) = x^2 + 3|x|$  với  $x \in \mathbb{R}$  là

- (A)  $-\frac{9}{4}$ . (B)  $-\frac{3}{2}$ . (C) 0. (D)  $\frac{3}{2}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $f(x) = x^2 + 3|x| \geq 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $x = 0$ .

Vậy  $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$  khi  $x = 0$ .

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 8.** Cho biểu thức  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ . Kết luận nào sau đây đúng?

- (A) Hàm số  $f(x)$  chỉ có giá trị lớn nhất, không có giá trị nhỏ nhất.  
 (B) Hàm số  $f(x)$  chỉ có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất.  
 (C) Hàm số  $f(x)$  có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.  
 (D) Hàm số  $f(x)$  không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = [-1; 1]$ .

Ta có  $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ .

Ta lại có  $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \leq 1$   $\forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$ .

Vậy  $\min_{x \in \mathcal{D}} f(x) = 0$  và  $\max_{x \in \mathcal{D}} f(x) = 1$ .

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 9.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) Hàm số  $f(x)$  có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng 0.  
 (B) Hàm số  $f(x)$  có giá trị lớn nhất bằng 1 và không giá trị nhỏ nhất.  
 (C) Hàm số  $f(x)$  có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng 1.  
 (D) Hàm số  $f(x)$  không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải.**

Ta có  $\sqrt{x^2 + 1} \geq 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  và  $\sqrt{x^2 + 1} = 1 \Leftrightarrow x = 0$ .

Do đó  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \leq 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Suy ra  $\max_{\mathbb{R}} f(x) = 1$ .

Giả sử tồn tại  $x_0 \neq 0$  sao cho  $\min_{\mathbb{R}} f(x) = f(x_0)$ .

TH1. Nếu  $x_0 > 0$ , xét  $x_1 = x_0 + 1 > x_0 > 0$ , ta có  $\sqrt{x_1^2 + 1} > \sqrt{x_0^2 + 1}$  nên  $f(x_1) < f(x_0)$ . Điều này vô lý vì  $\min_{\mathbb{R}} f(x) = f(x_0)$ .

TH2. Nếu  $x_0 < 0$ , xét  $x_1 = x_0 - 1 < x_0 < 0$ , ta có  $\sqrt{x_1^2 + 1} > \sqrt{x_0^2 + 1}$  nên  $f(x_1) < f(x_0)$ . Điều này vô lý vì  $\min_{\mathbb{R}} f(x) = f(x_0)$ .

Do đó hàm số  $f(x)$  không có giá trị nhỏ nhất.

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 10.** Cho biết hai số  $a$  và  $b$  có tổng bằng 3. Khi đó, tích hai số  $a$  và  $b$

- (A) có giá trị nhỏ nhất là  $\frac{9}{4}$ . (B) có giá trị lớn nhất là  $\frac{9}{4}$ .  
 (C) có giá trị lớn nhất là  $\frac{3}{2}$ . (D) không có giá trị lớn nhất.

**Lời giải.**

☑ Nếu  $a > 0$  và  $b > 0$  thì theo bất đẳng thức Cô-si ta có  $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ . Dấu “=” xảy ra khi  $a = b = \frac{3}{2}$ .

Do đó tích  $ab$  có giá trị lớn nhất là  $\frac{9}{4}$ .

☑ Nếu  $ab \leq 0$  thì tích  $ab$  có giá trị lớn nhất là 0 khi  $a = 0$  hoặc  $b = 0$ .

Vậy tích  $ab$  có giá trị lớn nhất là  $\frac{9}{4}$ .

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 11.** Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- (A)  $a < b \Rightarrow ac < bc$ . (B)  $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ .  
 (C)  $a < b$  và  $c < d \Rightarrow ac < bd$ . (D)  $a < b \Rightarrow ac < bc, (c > 0)$ .

**Lời giải.**

- ☑ Mệnh đề  $a < b \Rightarrow ac < bc$  sai khi  $c < 0$ .
- ☑ Mệnh đề  $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$  sai khi  $a = 0$ .
- ☑ Mệnh đề  $a < b$  và  $c < d \Rightarrow ac < bd$  sai khi  $a = -3, b = 2, c = -4$  và  $d = 1$ .
- ☑ Theo tính chất của bất đẳng thức thì mệnh đề còn lại là đúng.

🔍 Chọn đáp án **(D)**.....

**Câu 12.** Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A)**  $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow ac > bd.$ 
**(B)**  $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd.$
- (C)**  $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a - c > b - d.$ 
**(D)**  $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{d}.$

🔗 Lời giải.

- ☑ Mệnh đề  $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow ac > bd$  sai khi  $a = 1, b = -1, c = -2, d = -3$ .
- ☑ Mệnh đề  $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a - c > b - d$  sai khi  $a = c = 5$  và  $b = 4$  và  $d = 3$ .
- ☑ Mệnh đề  $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{d}$  sai khi  $d = 0$ .
- ☑ Theo tính chất của bất đẳng thức thì mệnh đề còn lại là đúng.

🔍 Chọn đáp án **(B)**.....

**Câu 13.** Mệnh đề nào sau đây sai?

- (A)**  $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d.$ 
**(B)**  $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd.$
- (C)**  $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a - c < b - d.$ 
**(D)**  $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{d} < \frac{b}{c}.$

🔗 Lời giải.

- ☑ Mệnh đề  $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a - c < b - d$  sai khi  $d = b = 2$  và  $c = -5$  và  $a = 1$ .
- ☑ Với  $0 < c < d$ , ta có  $\frac{a}{d} < \frac{b}{c} \Leftrightarrow ac < bd$  nên mệnh đề  $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{d} < \frac{b}{c}$  đúng.
- ☑ Theo tính chất của bất đẳng thức thì các mệnh đề còn lại là đúng.

🔍 Chọn đáp án **(C)**.....

**Câu 14.** Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

- (A)**  $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$ 
**(B)**  $a < b \Rightarrow ac < bc.$
- (C)**  $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd.$ 
**(D)**  $a > b \Rightarrow a + c > b + c.$

🔗 Lời giải.

- ☑ Mệnh đề  $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$  sai khi  $a = -2, b = 2$ .
- ☑ Mệnh đề  $a < b \Rightarrow ac < bc$  sai khi  $c \leq 0$ .
- ☑ Mệnh đề  $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$  sai khi  $a = c = -3, b = d = 2$ .
- ☑ Theo tính chất của bất đẳng thức thì mệnh đề còn lại là đúng.

**Câu 15.** Tìm mệnh đề sai?

(A)  $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d.$

(B)  $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow ac < bd.$

(C)  $\begin{cases} a \leq b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a - c < b - d.$

(D)  $ac \leq bc \Rightarrow a \leq b, \text{ (với } c > 0).$

**Lời giải.**

☑ Mệnh đề  $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$  sai khi  $b = c = 0.$

☑ Ta có  $\begin{cases} a \leq b \\ c > d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq b \\ -c < -d \end{cases} \Rightarrow a - c < b - d$  nên mệnh đề  $\begin{cases} a \leq b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a - c < b - d$  đúng.

☑ Theo tính chất của bất đẳng thức thì các mệnh đề còn lại là đúng.

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 16.** Cho  $a, b, c, d$  với  $a > b$  và  $c > d$ . Bất đẳng thức nào sau đây đúng?

(A)  $a + c > b + d.$

(B)  $a - c > b - d.$

(C)  $ac > bd.$

(D)  $a^2 > b^2.$

**Lời giải.**

☑ Mệnh đề  $a - c > b - d$  sai khi  $a = c = 5, b = 4, d = 3.$

☑ Mệnh đề  $ac > bd$  sai khi  $a = d = 0.$

☑ Mệnh đề  $a^2 > b^2$  sai khi  $a < 0.$

☑ Theo tính chất của bất đẳng thức thì mệnh đề còn lại là đúng.

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 17.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^2 + \frac{3}{x^2}$  với  $x \neq 0.$

(A)  $2\sqrt{3}.$

(B)  $\sqrt[4]{3}.$

(C)  $2\sqrt[4]{3}.$

(D)  $\sqrt{3}.$

**Lời giải.**

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$y = x^2 + \frac{3}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{3}{x^2}} = 2\sqrt{3} \text{ với } x \neq 0. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } x^2 = \frac{3}{x^2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{3}.$$

Vậy  $\min_{x \neq 0} y = 2\sqrt{3}.$

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 18.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{x}{2} + \frac{8}{x}$  với  $x > 0.$

(A) 4.

(B) 8.

(C) 2.

(D) 16.

**Lời giải.**

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$y = \frac{x}{2} + \frac{8}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{2} \cdot \frac{8}{x}} = 4 \text{ với } x \neq 0. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } \frac{x}{2} = \frac{8}{x} \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy  $\min_{(0; +\infty)} y = 4.$

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 19.** Cho  $x$  và  $y$  thỏa mãn  $x^2 + y^2 = 4$ . Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của  $T = x + y.$

(A)  $-8$  và  $8.$

(B)  $-2$  và  $2.$

(C)  $-2\sqrt{2}$  và  $2\sqrt{2}.$

(D)  $-\sqrt{2}$  và  $\sqrt{2}.$

**Lời giải.**

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho các cặp số  $x^2$  và  $2; y^2$  và  $2$ , ta có

$$\begin{cases} x^2 + 2 \geq 2\sqrt{2x^2} = 2\sqrt{2}|x| \\ y^2 + 2 \geq 2\sqrt{2y^2} = 2\sqrt{2}|y|. \end{cases}$$

Suy ra  $2\sqrt{2}(|x| + |y|) \leq x^2 + y^2 + 4 = 8 \Leftrightarrow |x| + |y| \leq 2\sqrt{2}$ .

Ta lại có  $|x + y| \leq |x| + |y| \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow -2\sqrt{2} \leq x + y \leq 2\sqrt{2}$ . Dấu “=” xảy ra khi  $x = y = -\sqrt{2}$  hoặc  $x = y = \sqrt{2}$ .  
Vậy giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của  $T = x + y$  lần lượt là  $-2\sqrt{2}$  và  $2\sqrt{2}$ .

🔍 Chọn đáp án (C).....

**Câu 20.** Nếu  $a > b$  và  $c > d$  thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

- (A)  $ac > bd$ . (B)  $a - c > b - d$ . (C)  $a - d > b - c$ . (D)  $-ac > -bd$ .

🔍 Lời giải.

- ☑ Bất đẳng thức  $ac > bd$  sai khi  $a = d = 0$ .
- ☑ Bất đẳng thức  $a - c > b - d$  sai khi  $a = c = 5, b = 4, d = 3$ .
- ☑ Bất đẳng thức  $-ac > -bd$  sai khi  $a = d = 0$ .
- ☑ Ta có  $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d \Rightarrow a - d > b - c$  nên mệnh đề  $a - d > b - c$  đúng.

🔍 Chọn đáp án (C).....

**Câu 21.** Nếu  $m > 0$  và  $n < 0$  thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

- (A)  $m > -n$ . (B)  $n - m < 0$ . (C)  $-m > -n$ . (D)  $m - n < 0$ .

🔍 Lời giải.

- ☑ Bất đẳng thức  $m > -n$  sai khi  $m = 1$  và  $n = -2$ .
- ☑ Bất đẳng thức  $-m > -n$  sai khi  $m = 1$  và  $n = -2$ .
- ☑ Bất đẳng thức  $m - n < 0$  sai khi  $m = 1$  và  $n = -2$ .
- ☑ Ta có  $\begin{cases} m > 0 \\ n < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m < 0 \\ n < 0 \end{cases} \Rightarrow n - m < 0$  nên mệnh đề  $n - m < 0$  đúng.

🔍 Chọn đáp án (B).....

**Câu 22.** Nếu  $a, b$  và  $c$  là các số bất kỳ và  $a > b$  thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

- (A)  $ac > bc$ . (B)  $a^2 < b^2$ . (C)  $a + c > b + c$ . (D)  $c - a > c - b$ .

🔍 Lời giải.

- ☑ Bất đẳng thức  $ac > bc$  sai khi  $c = 0$ .
- ☑ Bất đẳng thức  $a^2 < b^2$  sai khi  $a = 3$  và  $b = 2$ .
- ☑ Bất đẳng thức  $c - a > c - b$  sai khi  $c = 0, a = 3$  và  $b = 2$ .
- ☑ Theo tính chất của bất đẳng thức thì  $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$ .

🔍 Chọn đáp án (C).....

**Câu 23.** Nếu  $a > b$  và  $c > d$  thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

- (A)  $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$ . (B)  $a - c > b - d$ . (C)  $ac > bd$ . (D)  $a + c > b + d$ .

🔍 Lời giải.

- ☑ Bất đẳng thức  $ac > bd$  sai khi  $a = c = -1, b = -2$  và  $d = -3$ .
- ☑ Bất đẳng thức  $a - c > b - d$  sai khi  $a = c = 1, b = -2$  và  $d = -3$ .
- ☑ Bất đẳng thức  $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$  sai khi  $c = 0$ .
- ☑ Theo tính chất của bất đẳng thức, ta có nếu  $a > b$  và  $c > d$  thì  $a + c > b + d$ .

🔍 Chọn đáp án (D).....

**Câu 24.** Bất đẳng thức nào sau đây đúng với mọi số thực  $a$ ?

- (A)  $6a > 3a$ . (B)  $3a > 6a$ . (C)  $6 - 3a > 3 - 6a$ . (D)  $6 + a > 3 + a$ .

🔍 Lời giải.

- ☑ Bất đẳng thức  $6a > 3a \Leftrightarrow a > 0$ .
- ☑ Bất đẳng thức  $6a < 3a \Leftrightarrow a < 0$ .
- ☑ Bất đẳng thức  $6 - 3a > 3 - 6a \Leftrightarrow a > -1$ .
- ☑ Theo tính chất của bất đẳng thức, ta có  $6 + a > 3 + a \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}$ .

**Câu 25.** Nếu  $a, b$  và  $c$  là các số bất kỳ và  $a < b$  thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

- Ⓐ  $ac > bc$ .      Ⓑ  $a^2 < b^2$ .      Ⓒ  $3a + 2c > 3b + 2c$ .      Ⓓ  $ac < bc$ .

🔗 **Lời giải.**

- ☑ Bất đẳng thức  $ac > bc$  sai khi  $c = 0$ .
- ☑ Bất đẳng thức  $a^2 < b^2$  sai khi  $a = 3$  và  $b = 2$ .
- ☑ Bất đẳng thức  $ac < bc$  sai khi  $c = 0$ .
- ☑ Theo tính chất của bất đẳng thức thì  $a < b \Leftrightarrow 3a + 2c < 3b + 2c$ .

🔗 **Chọn đáp án Ⓒ.**

**Câu 26.** Nếu  $a > b > 0, c > d > 0$  thì bất đẳng thức nào sau đây **không đúng**?

- Ⓐ  $ac > bc$ .      Ⓑ  $a - c > b - d$ .      Ⓒ  $a^2 > b^2$ .      Ⓓ  $ac > bd$ .

🔗 **Lời giải.**

- ☑ Bất đẳng thức  $a - c > b - d$  sai khi  $a = c = 3, b = 2, d = 1$ .
- ☑ Theo tính chất của bất đẳng thức thì các bất đẳng thức còn lại là đúng.

**Câu 27.** Nếu  $a > b > 0, c > d > 0$  thì bất đẳng thức nào sau đây **không đúng**?

- Ⓐ  $ac > bd$ .      Ⓑ  $a + c > b + d$ .      Ⓒ  $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$ .      Ⓓ  $\frac{a}{b} > \frac{d}{c}$ .

🔗 **Lời giải.**

- ☑ Bất đẳng thức  $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$  sai khi  $a = c = 3, b = 2, d = 1$ .
- ☑ Từ giả thiết, ta có  $\frac{a}{b} > \frac{d}{c} \Leftrightarrow ac > bd$ .
- ☑ Theo tính chất của bất đẳng thức thì các bất đẳng thức còn lại là các bất đẳng thức đúng.

🔗 **Chọn đáp án Ⓒ.**

**Câu 28.** Sắp xếp ba số  $\sqrt{6} + \sqrt{13}; \sqrt{19}; \sqrt{3} + \sqrt{16}$  theo thứ tự từ bé đến lớn thì thứ tự đúng là

- Ⓐ  $\sqrt{19}; \sqrt{3} + \sqrt{16}; \sqrt{6} + \sqrt{13}$ .      Ⓑ  $\sqrt{3} + \sqrt{16}; \sqrt{19}; \sqrt{6} + \sqrt{13}$ .  
 Ⓒ  $\sqrt{19}; \sqrt{6} + \sqrt{13}; \sqrt{3} + \sqrt{16}$ .      Ⓓ  $\sqrt{6} + \sqrt{13}; \sqrt{3} + \sqrt{16}; \sqrt{19}$ .

🔗 **Lời giải.**

Sử dụng máy tính Casio ta có thứ tự là  $\sqrt{19}; \sqrt{3} + \sqrt{16}; \sqrt{6} + \sqrt{13}$ .

🔗 **Chọn đáp án Ⓐ.**

**Câu 29.** Nếu  $a + 2c > b + 2c$  thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

- Ⓐ  $-3a > -3b$ .      Ⓑ  $a^2 > b^2$ .      Ⓒ  $2a > 2b$ .      Ⓓ  $a < b$ .

🔗 **Lời giải.**

- ☑ Ta có  $a + 2c > b + 2c \Leftrightarrow a > b \Leftrightarrow 2a > 2b$ .
- ☑ Thay  $a = 2, b = 1, c = 0$  thì các bất đẳng thức còn lại là các mệnh đề sai.

**Câu 30.** Cho  $a, b, c > 0$  và  $a + b + c = 1$ . Giá trị nhỏ nhất của  $P = \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right)$  bằng

Ⓐ 64.

Ⓑ 60.

Ⓒ 8.

Ⓓ 16.

🔗 **Lời giải.**

$$P = \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) = 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{abc}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho các số dương trên ta có

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow \frac{1}{abc} \geq 27.$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \geq 3\sqrt[3]{27} = 9.$$

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{(abc)^2}} \geq 3\sqrt[3]{27^2} = 27.$$

Suy ra  $P \geq 1 + 9 + 27 + 27 = 64$ . Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = \frac{1}{3}$ .



PHẦN



---

# HÌNH HỌC



## §1 VEC-TƠ

**!** THIẾU NỘI DUNG LÍ THUYẾT ĐẾN HẾT CÂU 10 TỰ LUẬN

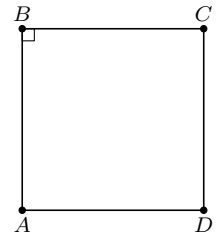
### A BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 11.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh là  $a$ . Tính  $|\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}|$ .

**Lời giải.**

Theo quy tắc hình bình hành suy ra  $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$ .

Ta có  $|\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}| = |2\vec{AC}| = 2AC = 2a\sqrt{2}$ .



**Bài 12.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Hãy biểu diễn các véc-tơ  $\vec{AC}$ ,  $\vec{BC}$ ,  $\vec{CD}$ ,  $\vec{DA}$  theo hai véc-tơ  $\vec{AO}$ ,  $\vec{BO}$ .

**Lời giải.**

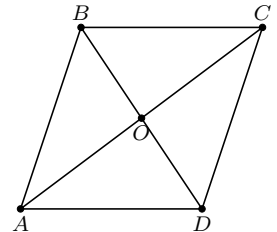
Ta có

$$\vec{AC} = 2\vec{AO}.$$

$$\vec{BC} = \vec{BO} + \vec{OC} = \vec{BO} + \vec{AO}.$$

$$\vec{CD} = \vec{CO} + \vec{OD} = -\vec{AO} + \vec{BO}.$$

$$\vec{DA} = \vec{DO} + \vec{OA} = -\vec{BO} - \vec{AO}.$$



**Bài 13.** Cho  $\triangle ABC$  đều cạnh  $a$ , trực tâm  $H$ . Tính độ dài của các véc-tơ  $\vec{HA}$ ,  $\vec{HB}$ ,  $\vec{HC}$ .

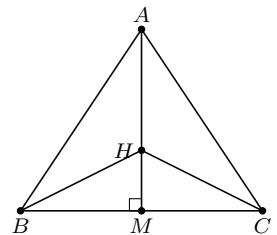
**Lời giải.**

Vì  $\triangle ABC$  đều cạnh  $a$ , trực tâm  $H$  nên  $HA = HB = HC$  và  $AH = \frac{2}{3}AM$  với  $M$  là trung điểm của  $BC$ .

Xét  $\triangle ABM$  vuông tại  $M$

$$\Rightarrow AM^2 = AB^2 - BM^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy } |\vec{HA}| = |\vec{HB}| = |\vec{HC}| = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



**Bài 14.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ , tâm  $O$ . Tính độ dài của các véc-tơ  $\vec{AB} + \vec{AD}$ ,  $\vec{AB} + \vec{AC}$ ,  $\vec{AB} - \vec{AD}$ .

**Lời giải.**

Vì  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$  nên  $AC = BD = a\sqrt{2}$ .

Ta có

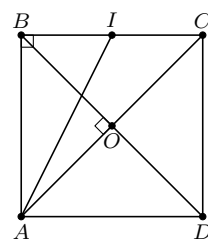
$$\textcircled{\ast} \left| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \right| = \left| \overrightarrow{AC} \right| = AC = a\sqrt{2}.$$

$$\textcircled{\ast} \left| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \right| = 2 \left| \overrightarrow{AI} \right| = 2AI \text{ với } I \text{ là trung điểm của } BC.$$

$$\text{Vì } \triangle ABI \text{ vuông tại } B \text{ nên } AI^2 = AB^2 + BI^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$$

$$\Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \left| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \right| = a\sqrt{5}.$$

$$\textcircled{\ast} \left| \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} \right| = \left| \overrightarrow{DB} \right| = DB = a\sqrt{2}.$$



**Bài 15.** Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn tâm  $O$ . Gọi  $H$  là trực tâm của  $\triangle ABC$ ,  $B'$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $O$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$ .

**Lời giải.**

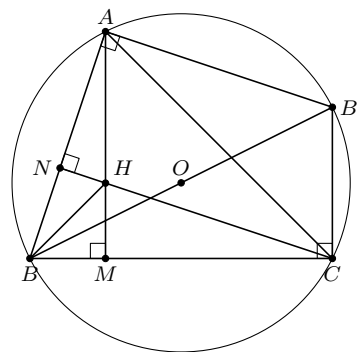
Gọi  $AM$ ,  $CN$  là hai đường cao của tam giác  $ABC$ .

Ta có  $AM \perp BC$  và  $B'C \perp BC$  (vì  $BB'$  là đường kính của đường tròn  $(O)$ )  $\Rightarrow AM \parallel B'C$ . (1)

Tương tự  $CN \perp AC$  và  $B'A \perp BA$  (vì  $BB'$  là đường kính của đường tròn  $(O)$ )  $\Rightarrow CN \parallel B'A$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác  $AHCB'$  là hình bình hành

$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$ .

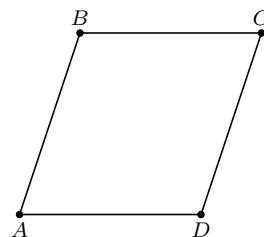


**Bài 16.** Tứ giác  $ABCD$  là hình gì nếu có  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .

**Lời giải.**

Vì  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  nên  $AB$ ,  $CD$  là song song và bằng nhau.

Khi đó tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.



**Bài 17.** Cho  $\left| \vec{a} + \vec{b} \right| = 0$ . So sánh về độ dài, phương và hướng của hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

**Lời giải.**

Vì  $\left| \vec{a} + \vec{b} \right| = 0$  nên  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ .

Khi đó  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  đối nhau hay  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  là cùng độ dài và ngược hướng.

**Bài 18.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai véc-tơ khác véc-tơ không. Khi nào có đẳng xảy ra?

$$\textcircled{1} \left| \vec{a} + \vec{b} \right| = \left| \vec{a} \right| + \left| \vec{b} \right|.$$

$$\textcircled{2} \left| \vec{a} + \vec{b} \right| = \left| \vec{a} - \vec{b} \right|.$$

**Lời giải.**

Dựng  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ .

Khi đó  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = AC$  và  $|\vec{a} - \vec{b}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DB}| = DB$ .

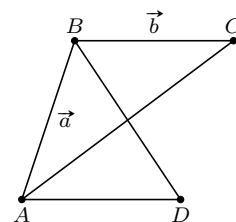
Mặt khác  $|\vec{a}| = AB$ ,  $|\vec{b}| = BC = AD$ .

$$\textcircled{1} \quad |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \Leftrightarrow AC = AB + BC.$$

Khi đó  $A, B, C$  thẳng hàng và  $B$  nằm giữa  $A, C$  nên  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng hướng.

$$\textcircled{2} \quad |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| \Leftrightarrow AC = BD.$$

Khi đó  $\vec{a}, \vec{b}$  có độ dài bằng nhau.



**Bài 19.** Cho  $\triangle ABC$ . Vẽ  $D$  đối xứng với  $A$  qua  $B$ ,  $E$  đối xứng với  $B$  qua  $C$  và  $F$  đối xứng với  $C$  qua  $A$ . Gọi  $G$  là giao điểm giữa trung tuyến  $AM$  của  $\triangle ABC$  với trung tuyến  $DN$  của  $\triangle DEF$ . Gọi  $I, K$  lần lượt là trung điểm của  $GA$  và  $GD$ . Chứng minh

$$\textcircled{1} \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NM}.$$

$$\textcircled{2} \quad \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{NI}.$$

**Lời giải.**

$\textcircled{1}$  Tam giác  $CEF$  có  $AN$  là đường trung bình nên

$$\begin{cases} AN \parallel CE \\ AN = \frac{1}{2}CE. \end{cases}$$

Mặt khác  $BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}CE$  và  $BM \equiv CE$  nên  $AN = BM$  và  $AN \parallel BM$ .

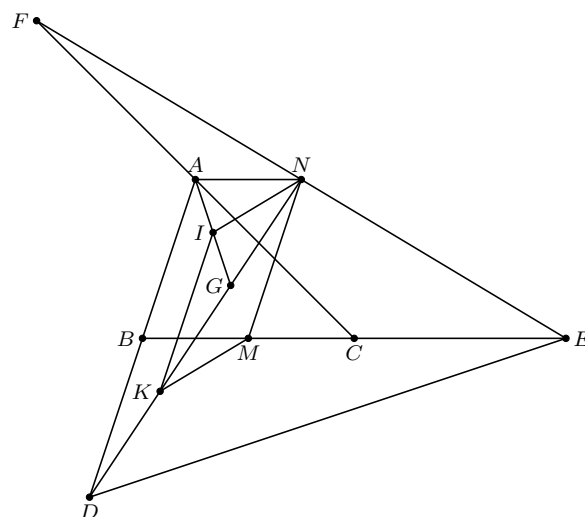
Suy ra  $ABMN$  là hình bình hành  
 $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NM}$ .

$\textcircled{2}$  Tam giác  $ADG$  có  $IK$  là đường trung bình nên

$$IK \parallel AD \text{ và } IK = \frac{1}{2}AD = AB.$$

Mặt khác  $ABMN$  là hình bình hành nên suy ra  $MN = IK$  và  $MN \parallel IK$ .

Khi đó  $MNIK$  là hình bình hành hay  $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{NI}$ .



**Bài 20.** Cho  $\triangle ABC$  và  $M$  là một điểm không thuộc các cạnh của tam giác. Gọi  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CA$ . Vẽ điểm  $P$  đối xứng với  $M$  qua  $D$ , điểm  $Q$  đối xứng với  $P$  qua  $E$ , điểm  $N$  đối xứng với  $Q$  qua  $F$ . Chứng minh  $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AN}$ .

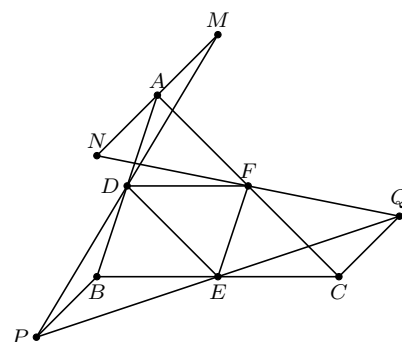
**Lời giải.**

Tứ giác  $CQBP$  có hai đường chéo  $BC, PQ$  cắt nhau tại trung điểm  $E$  nên  $CQBP$  là hình bình hành  $\Rightarrow BP \parallel CQ$  và  $BP = CQ$ . (1)

Tứ giác  $CQAN$  có hai đường chéo  $AC, NQ$  cắt nhau tại trung điểm  $F$  nên  $CQAN$  là hình bình hành  $\Rightarrow AN \parallel CQ$  và  $AN = CQ$ . (2)

Tứ giác  $AMBP$  có hai đường chéo  $AB, MP$  cắt nhau tại trung điểm  $D$  nên  $AMBP$  là hình bình hành  $\Rightarrow BP \parallel AM$  và  $BP = AM$ . (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra  $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AN}$ .



**Bài 21.** Cho hai tam giác  $ABC$  và  $AEF$  có cùng trọng tâm  $G$ . Chứng minh  $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FC}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC \Rightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$ .

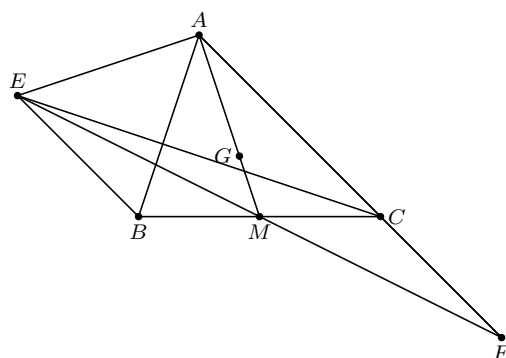
Vì hai tam giác  $ABC$  và  $AEF$  có cùng trọng tâm  $G$  nên

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ và } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} = \vec{0}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}.$$

Do đó  $M$  là trung điểm của  $EF$ .

Vậy tứ giác  $BECF$  có hai đường chéo  $BC, EF$  cắt nhau tại trung điểm  $M$  nên  $BECF$  là hình bình hành hay  $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FC}$ .



**Bài 22.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $CD$ . Gọi  $E, F$  lần lượt là giao điểm của  $AM, AN$  với  $BD$ . Chứng minh  $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FD}$ .

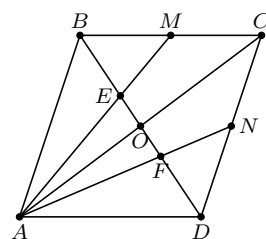
**Lời giải.**

Gọi  $O$  là tâm hình bình hành  $ABCD$ . Tam giác  $ABC$  có  $AM, BO$  là đường trung tuyến cắt nhau tại  $F$  nên  $F$  là trọng tâm  $\triangle ABC \Rightarrow BE = \frac{2}{3}BO$ . (1)

Tam giác  $ADC$  có  $AN, DO$  là đường trung tuyến cắt nhau tại  $E$  nên  $E$  là trọng tâm  $\triangle ADC \Rightarrow DF = \frac{2}{3}DO$ . (2)

Vì  $BO = DO$  nên từ (1), (2) suy ra  $BE = FD$ .

Mặt khác  $\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{FD}$  cùng hướng nên  $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FD}$ .



**Bài 23.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ , kẻ  $AH \perp BD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $DH$  và  $BC$ . Kẻ  $BK \perp AM$  và cắt  $AH$  tại  $E$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EB}$ .

**Lời giải.**

Tam giác  $ABM$  có  $AE, BE$  là đường cao nên  $E$  là trực tâm tam giác  $ABM$ .

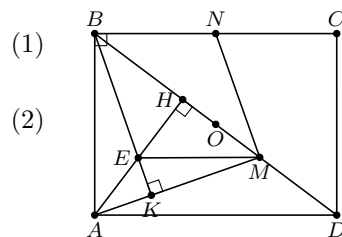
Suy ra  $ME \perp AB$  mà  $BN \perp AB$  nên  $ME \parallel BN \parallel AD$ .

Khi đó  $ME$  là đường trung bình của  $\triangle ADH$  vì  $M$  là trung điểm của  $DH$ .

$$\text{Suy ra } ME = \frac{1}{2}AD = BN.$$

Từ (1), (2) suy ra tứ giác  $BNME$  là hình bình hành.

Vậy  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EB}$ .



## B CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

**Câu 1 (0H1Y1-1).** Véc-tơ là một đoạn thẳng

(A) Có hướng.

(C) Có hai đầu mút.

(B) Có hướng dương và hướng âm.

(D) Thỏa mãn ba tính chất trên.

**Lời giải.**

Véc-tơ là một đoạn thẳng có hướng.

Chọn đáp án (A).

**Câu 2 (0H1Y2-4).** Hai véc-tơ có cùng độ dài và ngược hướng gọi là

(A) Hai véc-tơ bằng nhau.

(B) Hai véc-tơ đối nhau.

(C) Hai véc-tơ cùng hướng.

(D) Hai véc-tơ cùng phương.

**Lời giải.**

Hai véc-tơ có cùng độ dài và ngược hướng gọi là hai véc-tơ đối nhau.

Chọn đáp án (B).

**Câu 3 (0H1Y2-4).** Hai véc-tơ đối nhau khi và chỉ khi

(A) Cùng hướng và có độ dài bằng nhau.

(B) Song song và có độ dài bằng nhau.

(C) Cùng phương và có độ dài bằng nhau.

(D) Ngược hướng và có độ dài bằng nhau.

**Lời giải.**

Hai véc-tơ đối nhau khi và chỉ khi chúng ngược hướng và cùng độ dài.

Chọn đáp án (D).

**Câu 4 (0H1Y1-3).** Hai véc-tơ bằng nhau khi và chỉ khi

(A) Cùng hướng và cùng độ dài.

(B) Cùng phương.

(C) Cùng hướng.

(D) Có cùng độ dài.

**Lời giải.**

Hai véc-tơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng cùng hướng và cùng độ dài.

🔍 Chọn đáp án **(A)**.....

**Câu 5 (0H1B1-2).** Cho 3 điểm phân biệt  $A, B, C$ . Khi đó khẳng định nào sau đây sai?

- (A)**  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng phương.
- (B)**  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BC}$  cùng phương.
- (C)**  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{BC}$  cùng phương.
- (D)**  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi  $AC = BC$ .

**Lời giải.**

$A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi các véc-tơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$  đôi một cùng phương.

🔍 Chọn đáp án **(D)**.....

**Câu 6 (0H1B1-2).** Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A)** Có duy nhất một véc-tơ cùng phương với mọi véc-tơ.
- (B)** Có ít nhất hai véc-tơ cùng phương với mọi véc-tơ.
- (C)** Có vô số véc-tơ cùng phương với mọi véc-tơ.
- (D)** Không có véc-tơ cùng phương với mọi véc-tơ.

**Lời giải.**

Có vô số véc-tơ cùng phương với mọi véc-tơ một véc-tơ cho trước.

🔍 Chọn đáp án **(C)**.....

**Câu 7 (0H1B1-2).** Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)** Hai véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}$  bằng nhau, kí hiệu  $\vec{a} = \vec{b}$ , nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.
- (B)** Hai véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}$  bằng nhau, kí hiệu  $\vec{a} = \vec{b}$ , nếu chúng cùng phương và cùng độ dài.
- (C)** Hai véc-tơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$  bằng nhau khi và chỉ khi tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.
- (D)** Hai véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}$  bằng nhau khi và chỉ khi chúng cùng độ dài.

**Lời giải.**

Hai véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}$  bằng nhau, kí hiệu  $\vec{a} = \vec{b}$ , nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

🔍 Chọn đáp án **(A)**.....

**Câu 8 (0H1Y1-3).** Phát biểu nào sau đây đúng?

- (A)** Hai véc-tơ không bằng nhau thì độ dài cùng chúng không bằng nhau.
- (B)** Hai véc-tơ không bằng nhau thì độ dài cùng chúng không cùng phương.
- (C)** Hai véc-tơ bằng nhau thì có giá trùng nhau hoặc song song nhau.
- (D)** Hai véc-tơ có độ dài không bằng nhau thì không cùng hướng.

**Lời giải.**

Hai véc-tơ bằng nhau thì cùng phương nên chúng có giá trùng nhau hoặc song song nhau.

🔍 Chọn đáp án **(C)**.....

**Câu 9 (0H1B1-2).** Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)** Hai véc-tơ cùng phương với một véc-tơ thứ ba thì cùng phương.
- (B)** Hai véc-tơ cùng phương với một véc-tơ thứ ba khác  $\vec{0}$  thì cùng phương.
- (C)** Véc-tơ không là véc-tơ không có giá.
- (D)** Điều kiện đủ để hai véc-tơ bằng nhau là chúng có độ dài bằng nhau.

**Lời giải.**

Hai véc-tơ cùng phương với một véc-tơ thứ ba khác  $\vec{0}$  thì cùng phương.

🔍 Chọn đáp án **(B)**.....

**Câu 10 (0H1B1-2).** Cho hai véc-tơ không cùng phương  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)** Không có véc-tơ nào cùng phương với cả hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .
- (B)** Có vô số véc-tơ nào cùng phương với cả hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .
- (C)** Có một véc-tơ nào cùng phương với cả hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .
- (D)** Có hai véc-tơ nào cùng phương với cả hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

**Lời giải.**

Vì hai véc-tơ không cùng phương  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  nên không có véc-tơ nào cùng phương với cả hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

🔍 Chọn đáp án **(A)**.....

**Câu 11.** Cho vectơ  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Có vô số vector  $\vec{u}$  mà  $\vec{u} = \vec{a}$ .

(C) Có duy nhất một  $\vec{u}$  mà  $\vec{u} = -\vec{a}$ .

(B) Có duy nhất một  $\vec{u}$  mà  $\vec{u} = \vec{a}$ .

(D) Không có vector  $\vec{u}$  nào mà  $\vec{u} = \vec{a}$ .

**Lời giải.**

Có vô số vector  $\vec{u}$  mà  $\vec{u} = \vec{a}$ .

**Chọn đáp án (A).**

**Câu 12.** Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Hai vector cùng phương với một vector thứ ba thì cùng phương.

(B) Hai vector cùng phương với một vector thứ ba khác  $\vec{0}$  thì cùng phương.

(C) Hai vector cùng phương với một vector thứ ba thì cùng hướng.

(D) Hai vector ngược hướng với một vector thứ ba thì cùng hướng.

**Lời giải.**

Hai vector cùng phương với một vector thứ ba khác  $\vec{0}$  thì cùng phương.

Hai vector cùng phương với một vector thứ ba thì có thể cùng hướng, có thể ngược hướng.

Hai vector ngược hướng với một vector thứ ba khác  $\vec{0}$  thì cùng hướng.

**Chọn đáp án (B).**

**Câu 13.** Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

(A) Hai vector cùng phương thì bằng nhau.

(B) Hai vector ngược hướng thì có độ dài không bằng nhau.

(C) Hai vector cùng phương và cùng độ dài thì bằng nhau.

(D) Hai vector cùng hướng và cùng độ dài thì bằng nhau.

**Lời giải.**

Hai vector cùng hướng và cùng độ dài thì bằng nhau.

**Chọn đáp án (D).**

**Câu 14.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , trong các khẳng định sau, hãy tìm khẳng định sai?

(A)  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$ .

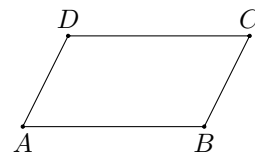
(B)  $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|$ .

(C)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .

(D)  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ .

**Lời giải.**

Do  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{CB}$  ngược hướng nên không bằng nhau.



**Chọn đáp án (A).**

**Câu 15.** Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

(A) Vector là một đường thẳng có hướng.

(B) Vector là một đoạn thẳng.

(C) Vector là một đoạn thẳng có hướng.

(D) Vector là một đoạn thẳng không phân biệt điểm đầu và điểm cuối.

**Lời giải.**

Vector là một đoạn thẳng có hướng.

**Chọn đáp án (C).**

**Câu 16.** Cho vector có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau. Khẳng định nào dưới đây sai?

(A) Được gọi là vector suy biến.

(B) Được gọi là vector có phương tùy ý.

(C) Được gọi là vector không, kí hiệu là  $\vec{0}$ .

(D) Là vector có độ dài không xác định.

**Lời giải.**

Vector có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau có độ dài là 0.

**Chọn đáp án (D).**

**Câu 17.** Vector có điểm đầu  $D$  và điểm cuối  $E$  được kí hiệu như thế nào là đúng?

(A)  $DE$ .

(B)  $ED$ .

(C)  $|\overrightarrow{DE}|$ .

(D)  $\overrightarrow{DE}$ .

**Lời giải.**

Vector có điểm đầu  $D$  và điểm cuối  $E$  được kí hiệu  $\overrightarrow{DE}$ .

**Chọn đáp án (D).**

**Câu 18.** Cho hình vuông  $ABCD$ , khẳng định nào sau đây đúng?

(A)  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ .

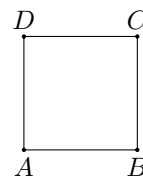
(B)  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ .

Ⓒ  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

Ⓓ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng hướng.

🔗 **Lời giải.**

Do  $ABCD$  là hình vuông nên  $AB = BC$ , suy ra  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$



**Câu 19.** Cho tam giác  $ABC$  có thể xác định được bao nhiêu vectơ (khác vectơ không) có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh  $A, B, C$ ?

Ⓐ 2.

Ⓑ 3.

Ⓒ 4.

Ⓓ 6.

🔗 **Lời giải.**

Có thể xác định được 6 vectơ (khác vectơ không) có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh  $A, B, C$  là các vectơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}$ .

🔗 Chọn đáp án Ⓓ

**Câu 20.** Cho tam giác đều  $ABC$ . Mệnh đề nào sau đây sai?

Ⓐ  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ .

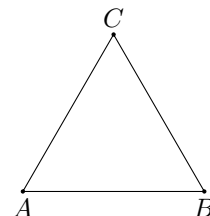
Ⓑ  $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BC}$ .

Ⓒ  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ .

Ⓓ  $\overrightarrow{AC}$  không cùng phương  $\overrightarrow{BC}$ .

🔗 **Lời giải.**

Có  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BC}$  là 2 vectơ không cùng phương nên  $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BC}$ .



**Câu 21.** Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ Hai vectơ cùng phương thì cùng hướng.

Ⓑ Hai vectơ cùng hướng thì cùng phương.

Ⓒ Hai vectơ cùng phương thì có giá song song nhau.

Ⓓ Hai vectơ cùng hướng thì có giá song song nhau.

🔗 **Lời giải.**

Hai vectơ cùng hướng thì cùng phương.

Hai vectơ cùng phương thì cùng hướng hoặc ngược hướng.

Hai vectơ cùng phương thì có giá song song nhau hoặc trùng nhau.

🔗 Chọn đáp án Ⓑ

**Câu 22.** Cho ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng,  $M$  là điểm bất kì. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

Ⓐ  $\forall M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ .

Ⓑ  $\exists M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$ .

Ⓒ  $\forall M, \overrightarrow{MA} \neq \overrightarrow{MB} \neq \overrightarrow{MC}$ .

Ⓓ  $\exists M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ .

🔗 **Lời giải.**

Do 3 điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng nên với  $M$  là điểm bất kì ta có  $\overrightarrow{MA} \neq \overrightarrow{MB} \neq \overrightarrow{MC}$ .

🔗 Chọn đáp án Ⓒ

**Câu 23.** Cho hai điểm phân biệt  $A, B$ . Số vectơ (khác  $\vec{0}$ ) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm  $A, B$  là

Ⓐ 2.

Ⓑ 6.

Ⓒ 13.

Ⓓ 12.

🔗 **Lời giải.**

Có 2 vectơ có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm  $A, B$  là  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BA}$ .

**Câu 24.** Cho tam giác đều  $ABC$ , cạnh  $a$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ  $\overrightarrow{AC} = a$ .

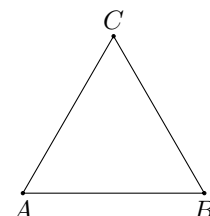
Ⓑ  $|\overrightarrow{AC}| = \overrightarrow{BC}$ .

Ⓒ  $|\overrightarrow{AB}| = a$ .

Ⓓ  $\overrightarrow{AB}$  cùng hướng với  $\overrightarrow{BC}$ .

🔗 **Lời giải.**

Có  $|\overrightarrow{AB}| = AB = a$ .



Chọn đáp án **C**.

**Câu 25.** Gọi  $C$  là trung điểm của đoạn  $AB$ . Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

**A**  $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$ .

**B**  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng hướng.

**C**  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CB}$  ngược hướng.

**D**  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CB}|$ .

**Lời giải.**

Có  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng hướng.



Chọn đáp án **B**.

**Câu 26.** Khẳng định nào dưới đây đúng?

**A** Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  gọi là bằng nhau, kí hiệu  $\vec{a} = \vec{b}$ , nếu chúng cùng phương và cùng độ dài.

**B** Hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  gọi là bằng nhau khi và chỉ khi tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.

**C** Hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  gọi là bằng nhau khi và chỉ khi tứ giác  $ABCD$  là hình vuông.

**D** Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  gọi là bằng nhau, kí hiệu  $\vec{a} = \vec{b}$ , nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

**Lời giải.**

Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  gọi là bằng nhau, kí hiệu  $\vec{a} = \vec{b}$ , nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

Chọn đáp án **D**.

**Câu 27.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Có thể xác định được bao nhiêu vectơ (khác  $\vec{0}$ ) có điểm đầu và điểm cuối là các điểm  $A, B, C, D$ ?

**A** 4.

**B** 8.

**C** 10.

**D** 12.

**Lời giải.**

Có thể xác định được 12 vectơ (khác  $\vec{0}$ ) có điểm đầu và điểm cuối là các điểm  $A, B, C, D$  là các vectơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CD}$  và các vectơ đối của chúng.

Chọn đáp án **D**.

**Câu 28.** Chọn khẳng định đúng nhất trong các khẳng định sau

**A** Vectơ là một đoạn thẳng có định hướng.

**B** Vectơ không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.

**C** Hai vectơ bằng nhau nếu chúng có cùng hướng và cùng độ dài.

**D** Cả 3 phương án trên đều đúng.

**Lời giải.**

Vectơ là một đoạn thẳng có định hướng.

Vectơ không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.

Hai vectơ bằng nhau nếu chúng có cùng hướng và cùng độ dài.

Chọn đáp án **D**.

**Câu 29.** Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt. Khi đó

**A** Điều kiện cần và đủ để  $A, B, C$  thẳng hàng là  $\overrightarrow{AC}$  cùng phương với  $\overrightarrow{AB}$ .

**B** Điều kiện đủ để  $A, B, C$  thẳng hàng là  $\overrightarrow{CA}$  cùng phương với  $\overrightarrow{AB}$ .

**C** Điều kiện cần để  $A, B, C$  thẳng hàng là  $\overrightarrow{CA}$  cùng phương với  $\overrightarrow{AB}$ .

**D** Điều kiện cần và đủ để  $A, B, C$  thẳng hàng là  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện cần và đủ để  $A, B, C$  thẳng hàng là  $\overrightarrow{AC}$  cùng phương với  $\overrightarrow{AB}$ .

Chọn đáp án **A**.

**Câu 30.** Cho đoạn thẳng  $AB$ ,  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Khi đó

**A**  $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AI}$ .

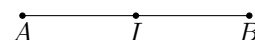
**B**  $\overrightarrow{BI}$  cùng hướng  $\overrightarrow{AB}$ .

**C**  $|\overrightarrow{BI}| = 2|\overrightarrow{AI}|$ .

**D**  $|\overrightarrow{BI}| = |\overrightarrow{AI}|$ .

**Lời giải.**

Do  $I$  là trung điểm  $AB$  nên  $IA = IB$ , suy ra  $|\overrightarrow{BI}| = |\overrightarrow{AI}|$ .



Chọn đáp án **D**.

**Câu 31.** Cho tam giác đều  $ABC$ . Mệnh đề sau đây là sai?

**A**  $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BC}$ .

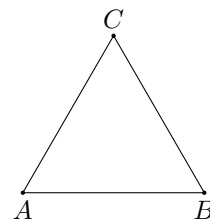
**B**  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ .

**C**  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ .

**D**  $\overrightarrow{AC}$  không cùng phương  $\overrightarrow{BC}$ .

**Lời giải.**

Do  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  không cùng phương nên  $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BC}$ .



Chọn đáp án (B).....

**Câu 32.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Các vector đối của vector  $\overrightarrow{AD}$  là

(A)  $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ .

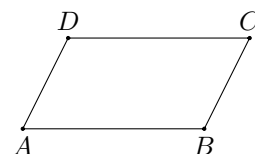
(B)  $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}$ .

(C)  $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CB}$ .

(D)  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}$ .

Lời giải.

Các vector đối của vector  $\overrightarrow{AD}$  là vector  $\overrightarrow{DA}$  và vector  $\overrightarrow{CB}$ .



Chọn đáp án (C).....

**Câu 33.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Ba vector bằng vector  $\overrightarrow{BA}$  là

(A)  $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{OC}$ .

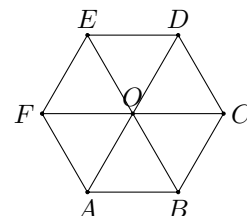
(B)  $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}$ .

(C)  $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{CO}$ .

(D)  $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{OC}$ .

Lời giải.

Các vector bằng vector  $\overrightarrow{BA}$  là  $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{CO}$ .



Chọn đáp án (C).....

**Câu 34.** Khẳng định nào dưới đây là sai?

(A) Mỗi vector đều có một độ dài, đó là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vector đó.

(B) Độ dài của vector  $\vec{a}$  được kí hiệu là  $|\vec{a}|$ .

(C)  $|\overrightarrow{PQ}| = \overrightarrow{PQ}$ .

(D)  $|\overrightarrow{AB}| = AB = BA$ .

Lời giải.

$|\overrightarrow{PQ}|$  khác  $\overrightarrow{PQ}$  do vector là một đoạn thẳng định hướng còn độ dài vector là độ dài đoạn thẳng nối điểm đầu và điểm cuối vector đó.

Chọn đáp án (C).....

**Câu 35.** Cho các khẳng định sau

(1) Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

(2) Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$

(3) Nếu  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  thì tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.

(4) Nếu  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$  thì 4 điểm  $A, B, C, D$  theo thứ tự là 4 đỉnh của hình bình hành.

Hỏi có bao nhiêu khẳng định sai?

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

Lời giải.

(1) Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .

(2) Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ .

(3) Nếu  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  thì tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành (đúng).

(4) Nếu  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$  thì 4 điểm  $A, B, C, D$  theo thứ tự là 4 đỉnh của hình bình hành.

Vậy khẳng định 1, 2, 4 sai.

🔍 Chọn đáp án **(C)**.....

**Câu 36.** Câu nào sai trong các câu sau đây?

- (A) Vector đối của  $\vec{a} \neq \vec{0}$  là vector ngược hướng với  $\vec{a}$  và có cùng độ dài với vector  $\vec{a}$ .  
 (B) Vector đối của  $\vec{0}$  là vector  $\vec{0}$ .  
 (C) Nếu  $\overrightarrow{MN}$  là một vector đã cho thì với điểm  $O$  bất kỳ ta luôn có thể viết  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}$ .  
 (D) Hiệu của hai vector là tổng của vector thứ nhất với vector đối của vector thứ hai.

🔍 LỜI GIẢI.

Nếu  $\overrightarrow{MN}$  là một vector đã cho thì với điểm  $O$  bất kỳ ta luôn có thể viết  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$ .

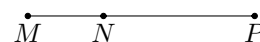
🔍 Chọn đáp án **(C)**.....

**Câu 37.** Cho ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng, trong đó điểm  $N$  nằm giữa hai điểm  $M$  và  $P$ . Khi đó các cặp vector nào cùng hướng?

- (A)  $\overrightarrow{MP}$  và  $\overrightarrow{PN}$ . (B)  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{PN}$ . (C)  $\overrightarrow{NM}$  và  $\overrightarrow{NP}$ . (D)  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{MP}$ .

🔍 LỜI GIẢI.

Cặp vector  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{MP}$  là cùng hướng.



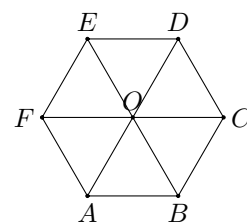
🔍 Chọn đáp án **(D)**.....

**Câu 38.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Các vector đối của vector  $\overrightarrow{OD}$  là

- (A)  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{DO}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{CB}$ . (B)  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{DO}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{DA}$ .  
 (C)  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{DO}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DA}$ . (D)  $\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BC}$ .

🔍 LỜI GIẢI.

Các vector đối của vector  $\overrightarrow{OD}$  là  $\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{EF}$ .



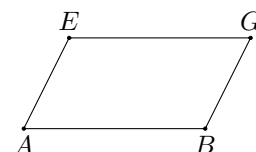
🔍 Chọn đáp án **(A)**.....

**Câu 39.** Cho hình bình hành  $ABGE$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- (A)  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{EG}$ . (B)  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BE}$ . (C)  $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{BE}$ . (D)  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{GE}$ .

🔍 LỜI GIẢI.

Do  $\overrightarrow{BA}$  và  $\overrightarrow{GE}$  cùng hướng và  $BA = GE$  nên  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{GE}$ .



🔍 Chọn đáp án **(D)**.....

**Câu 40.** Số vector (khác  $\vec{0}$ ) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ 7 điểm phân biệt cho trước (3 điểm bất kì không thẳng hàng) là

- (A) 42. (B) 3. (C) 9. (D) 27.

🔍 LỜI GIẢI.

Số vector (khác  $\vec{0}$ ) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ 7 điểm phân biệt cho trước (3 điểm bất kì không thẳng hàng) là  $2 \cdot C_7^2 = 42$  vector.

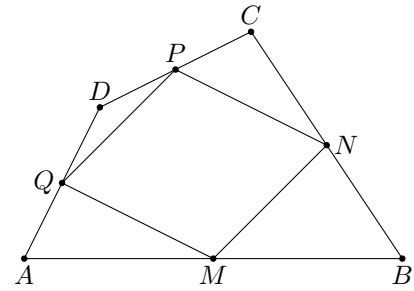
🔍 Chọn đáp án **(A)**.....

**Câu 41.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CD, DA$ . Trong các khẳng định sau, hãy tìm khẳng định sai?

- (A)  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ . (B)  $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$ . (C)  $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{MN}|$ . (D)  $|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{AC}|$ .

🔍 LỜI GIẢI.

Có  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $BC$ . Suy ra  $MN$  là đường trung bình trong  $\triangle ABC$ . Vậy  $MN = \frac{1}{2}AC$  hay  $|\overrightarrow{MN}| \neq |\overrightarrow{AC}|$ .



🔍 Chọn đáp án **D** .....

## §2 TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

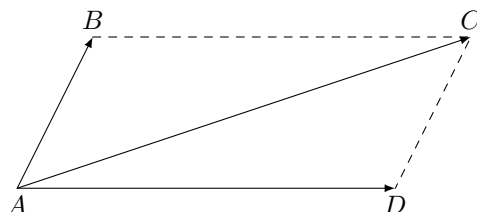
### A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1 TỔNG CỦA HAI VECTƠ

- Quy tắc ba điểm: Với ba điểm bất kì  $A, B, C$  ta có  $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$ .
- Quy tắc ba điểm còn được gọi là hệ thức Charles dùng để cộng các vector liên tiếp, có thể mở rộng cho trường hợp nhiều vector như sau:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}.$$

- Quy tắc hình bình hành: Cho  $ABCD$  là hình bình hành thì  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$  và  $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \end{cases}$ .



- Chú ý:** Quy tắc hình bình hành dùng để cộng các vector chung gốc.
- Các tính chất:**
  - $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ .
  - $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ .
  - $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ .

#### 2 HIỆU CỦA HAI VECTƠ

- Vector đối của vector  $\vec{a}$ , kí hiệu là  $-\vec{a}$ .
- Tổng của vector  $\vec{a}$  với vector đối  $-\vec{a}$  là vector  $\vec{0}$ . Nghĩa là  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ .
- Với ba điểm  $A, B, C$  bất kì, ta luôn có  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$ .

**Lưu ý.** Vector đối của vector  $\overrightarrow{AB}$  là  $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ . Vì  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ .

### B CÁC DẠNG TOÁN VÀ VÍ DỤ

#### ○ Dạng 1. Chứng minh đẳng thức vector

Ta sử dụng các quy tắc sau.

- ☑ Quy tắc ba điểm:  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ , chèn điểm  $C$ .
- ☑ Quy tắc ba điểm (phép trừ vector):  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$ , hiệu hai vector cùng gốc.
- ☑ Quy tắc hình bình hành: Với hình bình hành  $ABCD$ , ta luôn có  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ .

**Chú ý:** Về mặt thực hành, ta có thể lựa chọn một trong các hướng sau để thực hiện biến đổi.

- ☑ **Hướng 1:** Biến đổi một vế thành vế còn lại (Vế trái (VT)  $\Rightarrow$  Vế phải (VP) hoặc ngược lại).
  - Nếu xuất phát từ vế phức tạp, ta cần thực hiện đơn giản biểu thức.
  - Nếu xuất phát từ vế đơn giản, ta cần thực hiện việc phân tích vector.
- ☑ **Hướng 2:** Biến đổi tương đương đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đã biết là luôn đúng.
- ☑ **Hướng 3:** Biến đổi đẳng thức đã biết là luôn đúng thành đẳng thức cần chứng minh.

**Ví dụ 1.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} \\ \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \underbrace{\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD}}_{\vec{0}} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}. \end{aligned}$$

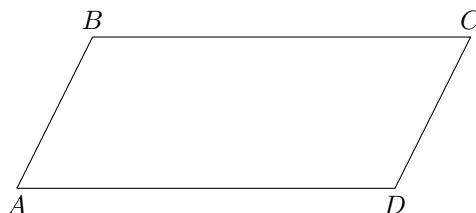
Suy ra  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ .

**Ví dụ 2.** Cho hình bình hành  $ABCD$  và điểm  $M$  bất kì. Chứng minh  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} \\ \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} \end{cases}$$



Khi đó

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} + \underbrace{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}}_{\vec{0}} \\ &= \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} \quad (\text{Do } ABCD \text{ là hình bình hành}). \end{aligned}$$

Suy ra  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}$ .

**Ví dụ 3.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Chứng minh rằng.

a)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$ .

b)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$ .

**Lời giải.**

a) Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{DB} \quad (\text{luôn đúng}). \end{aligned}$$

Vậy  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$ .

b) Ta có

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}.$$

Vậy  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$ .

**Ví dụ 4.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm  $O$ . Chứng minh  $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$ .

### Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \end{cases} \quad (\text{do } ABCD \text{ là hình bình hành}) \Rightarrow \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}.$$

Vậy  $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$ .

### Dạng 2. Tính độ dài của vector tổng

- ☑ Biến đổi vector tổng, hiệu đã cho thành một vector duy nhất. Tìm độ dài của vector đó.
- ☑ Dùng định nghĩa dựng vector tổng bằng hình vẽ. Tính độ dài.

**Ví dụ 1.** Cho tam giác  $ABC$  đều, cạnh bằng 10. Tính độ dài các vector  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$  và  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ .

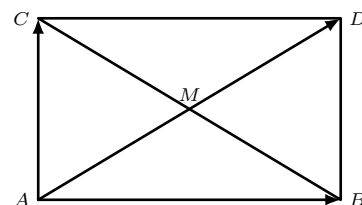
### Lời giải.

- Tính độ dài vector  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ .  
Ta có  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ . Suy ra  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = 10$ .
- Tính độ dài vector  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ .  
Ta có  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ . Suy ra  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = CB = 10$ .

**Ví dụ 2.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có cạnh  $AB = 5$  và  $AC = 12$ . Tính độ dài các vector  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ .

### Lời giải.

- Tính độ dài vector  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ .  
Ta có  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ . Suy ra  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = CB = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 13$ .
- Tính độ dài  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ .  
Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ ,  $D$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $BC$ .  
Khi đó tứ giác  $ABDC$  là hình chữ nhật.  
Khi đó ta có  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ .  
Suy ra  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 13$ .



## C BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Cho hình bình hành tâm  $O$ . Chứng minh rằng.

- $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ .
- $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ .

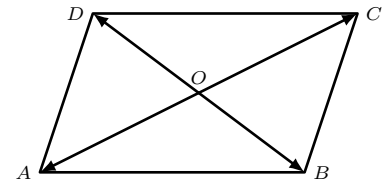
### Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} \\ &= \vec{0} \quad (\text{do } ABCD \text{ là hình bình hành}). \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} \\ &= \vec{0} \quad (\text{do } ABCD \text{ là hình bình hành}).\end{aligned}$$

**Bài 2.** Cho 4 điểm  $A, B, C, D$  tùy ý. Chứng minh rằng.

a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$

b)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$

c)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}.$

**Lời giải.**

a) Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} \\ \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} \end{cases}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \quad (\text{vì } \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}).\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

b) Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \end{cases}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \quad (\text{vì } \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}).\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$$

c) Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} \end{cases}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}.\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}.$$

**Bài 3.** Cho 5 điểm  $A, B, C, D, E$  tùy ý. Chứng minh rằng.

a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}.$

b)  $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{ED}.$

**Lời giải.**

a) Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} \\ \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} \\ \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} \quad (\text{Vì } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0} \text{ và } \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}). \end{aligned}$$

Vậy  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$ .

b) Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AD} \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{ED} \quad (\text{Vì } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}). \end{aligned}$$

Vậy  $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{ED}$ .

**Bài 4.** Cho 6 điểm  $A, B, C, D, E, F$ . Chứng minh rằng.

a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ .

b)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$ .

c)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$ .

d) Nếu  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$  thì  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

 **Lời giải.**

a) Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} \\ \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \quad (\text{Vì } \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}). \end{aligned}$$

Vậy  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ .

b) Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}. \end{aligned}$$

Vậy  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$ .

c) Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF} \\ &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FE} \\ &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FE} \\ &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} \quad (\text{Vì } \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EF} \text{ và } \overrightarrow{FE} = -\overrightarrow{EF}). \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \quad & \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}. \end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

**Bài 5.** Cho 7 điểm  $A, B, C, D, E, F, G$ . Chứng minh rằng.

- a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$ .  
 b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{GF}$ .  
 c)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED} = \vec{0}$ .

**Lời giải.**

a) Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EA} \\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA} \\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} \quad (\text{vì } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA} = \vec{0}). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}.$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GA} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GA} \\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GA} \\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EA} \\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{GF} \quad (\text{vì } \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EA} = \vec{0}). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{GF}.$$

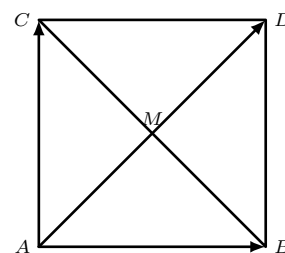
c) Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED} &= \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF} \\ &= \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DF} \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED} = \vec{0}.$$

**Bài 6.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = AC = 2$  (cm). Tính  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ .**Lời giải.**Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ ,  $D$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $BC$ .Khi đó tứ giác  $ABDC$  là hình vuông.Khi đó ta có  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ .

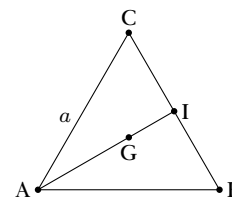
$$\text{Suy ra } |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2\sqrt{2}.$$

**Câu 1.** Cho đều cạnh  $a$ , trọng tâm  $G$ . Tính các giá trị của các biểu thức sau:

- a)  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ .                      b)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ .                      c)  $|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}|$ .

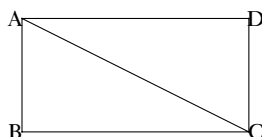
**Lời giải.**

- a)  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = CB = a.$
- b)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{AI}| = 2AI = a\sqrt{3}.$
- c)  $|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = 2|\overrightarrow{GI}| = 2GI = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$



**Câu 2.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 5(\text{cm})$ ,  $BC = 10(\text{cm})$ . Tính  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}|$ ?

**Lời giải.**

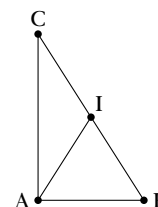


$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}| = 2AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}.$$

**Câu 3.** Cho vuông tại  $A$  có  $\widehat{B} = 60^\circ$ ,  $BC = 2(\text{cm})$ . Tìm  $|\overrightarrow{AB}|$ ,  $|\overrightarrow{AC}|$ ,  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ ,  $|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|$ ?

**Lời giải.**

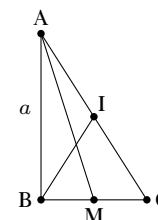
$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}| &= AB = BC \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1. \\ |\overrightarrow{AC}| &= AC = BC \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}. \\ |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| &= 2|\overrightarrow{AI}| = 2AI = BC = 2. \\ |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}| &= |\overrightarrow{BC}| = BC = 2. \end{aligned}$$



**Câu 4.** Cho vuông tại  $B$  có  $\widehat{A} = 30^\circ$ ,  $AB = a$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AC$ . Hãy tính  $|\overrightarrow{AC}|$ ,  $|\overrightarrow{AI}|$ ,  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ ,  $|\overrightarrow{BC}|$ ?

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AC}| &= AC = \frac{AB}{\cos 30^\circ} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}. \\ |\overrightarrow{AI}| &= AI = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \\ |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| &= 2AM = 2\sqrt{AB^2 + BM^2} = 2\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{39}}{6}. \\ |\overrightarrow{BC}| &= BC = \frac{AB}{\sin 30^\circ} = 2a. \end{aligned}$$



**Câu 5.** Cho hình thang vuông tại  $A$  và  $D$  có  $AB = AD = a$ ,  $\widehat{C} = 45^\circ$ . Tính  $|\overrightarrow{CD}|$ ,  $|\overrightarrow{BD}|$ ?

**Lời giải.**

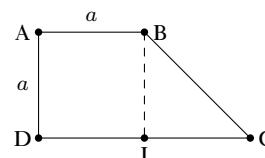
Gọi  $I$  là hình chiếu của  $B$  lên  $CD$ .

Ta có  $ABID$  là hình chữ nhật và có 2 cạnh kề bằng nhau nên là hình vuông.

Suy ra  $DI = BI = AB = AD = a$ .

Lại có tam giác  $BIC$  là tam giác vuông có góc  $\widehat{C} = 45^\circ$  nên tam giác  $BIC$  là tam giác vuông cân. Suy ra  $IC = IB = a$ .

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CD}| &= CD = 2a. \\ |\overrightarrow{BD}| &= BD = a\sqrt{2} \text{ đường chéo hình vuông.} \end{aligned}$$



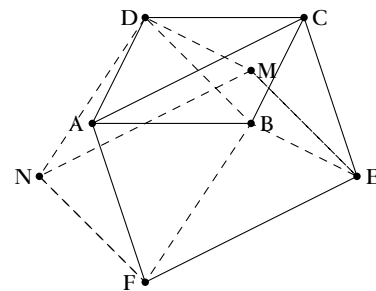
**Câu 6.** Cho hình bình hành  $ABCD$  và  $ACEF$ .

a) Đặt các điểm  $M, N$  sao cho  $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{BD}$ ,  $\overrightarrow{FN} = \overrightarrow{BD}$ .

b) Chứng minh  $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MN}$ .

**Lời giải.**

- a) Đặt các điểm  $M, N$  sao cho  $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{FN} = \overrightarrow{BD}$ .  
Ta dựng các điểm  $M$  sao cho  $BDM E$  là hình bình hành.  
Điểm  $N$  sao cho  $NDBF$  là hình bình hành.
- b) Chứng minh  $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MN}$ .  
Ta có:  $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{BD}$  và  $\overrightarrow{FN} = \overrightarrow{BD}$  nên  $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{FN}$ .  
Suy ra  $EMNF$  là hình bình hành. Suy ra  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EF}$ .  
Lại có  $ACEF$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{EF}$ .  
Vậy  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CA}$ .

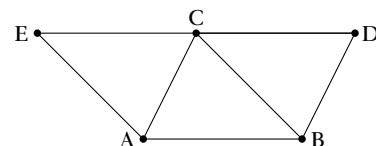


**Câu 7.** Cho tam giác  $ABC$ .

- a. Xác định các điểm  $D$  và  $E$  sao cho:  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ .
- b. Chứng minh  $C$  là trung điểm của đoạn thẳng  $ED$ .

**Lời giải.**

- a. Xác định các điểm  $D$  và  $E$  sao cho:  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ .  
Ta dựng các điểm  $D$  sao cho  $ABDC$  là hình bình hành.  
Điểm  $E$  sao cho  $BAEC$  là hình bình hành.
- b.  $ABDC$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .  
 $ABCE$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$ .  
Vậy  $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CD}$  nên  $C$  là trung điểm  $ED$ .

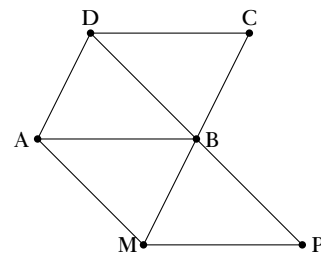


**Câu 8.** Cho hình bình hành  $ABCD$ .

- a. Hãy xác định các điểm  $M, P$  sao cho  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AB}$ .
- b. Chứng minh rằng  $B$  là trung điểm của đoạn thẳng  $DP$ .

**Lời giải.**

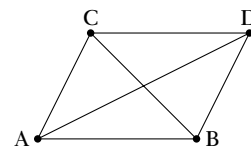
- a) Hãy xác định các điểm  $M, P$  sao cho  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AB}$ .  
Ta dựng các điểm  $M, P$  lần lượt sao cho  $AMBD, AMPB$  là hình bình hành.
- b) Chứng minh rằng  $B$  là trung điểm của đoạn thẳng  $DP$ .  
 $AMPB$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BP}$ .  
Theo đề:  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DB}$  nên  $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{DB}$ . Suy ra  $B$  là trung điểm của đoạn thẳng  $DP$ .



**Câu 9.** Cho 4 điểm  $A, B, C, D$ . Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow AD$  và  $BC$  có cùng trung điểm.

**Lời giải.**

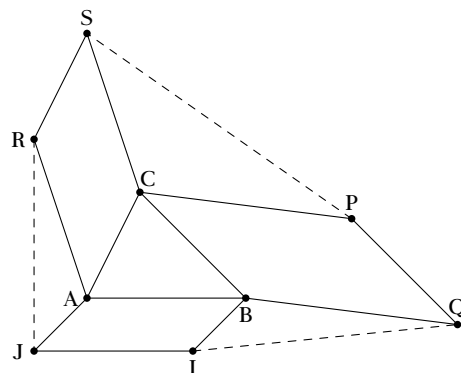
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC$  là hình bình hành  $\Leftrightarrow AD$  và  $BC$  cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.



**Câu 10.** Cho tam giác  $ABC$ . Bên ngoài tam giác vẽ các hình bình hành  $ABIJ, BCPQ, CARS$ . Chứng minh  $\overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \vec{0}$

**Lời giải.**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} &= \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS} \\ &= (\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{CS}) + (\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{PC}) = \vec{0}\end{aligned}$$



**Câu 11.** Cho ba lực  $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$  và  $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  và vật đứng yên. Cho biết cường độ của  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều là 100 N và  $\widehat{AMB} = 60^\circ$ . Tìm cường độ và hướng của  $\vec{F}_3$ .

**Lời giải.**

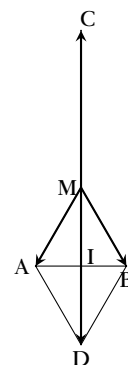
Gọi  $D$  là điểm sao cho  $ADBM$  là hình bình hành.  $I$  là trung điểm  $MD$ .

Vật đứng yên nên  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .

Do đó  $M$  là trung điểm của  $CD$ .

Ta có tam giác  $AMB$  đều nên  $MD = 2MI = 2 \cdot 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3}$ .

Vậy cường độ của  $\vec{F}_3$  bằng  $100\sqrt{3}$  và  $\vec{F}_3$  có hướng ngược hướng với  $\overrightarrow{MD}$ .



## D CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

**Câu 1.** Chọn phát biểu sai?

- (A) Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}, k \neq 0$ .  
 (B) Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{BC}, k \neq 0$ .  
 (C) Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}, k \neq 0$ .  
 (D) Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải.**

Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$  là đáp án sai trong trường hợp  $k = 0$  tức bài toán chỉ còn hai điểm  $A, C$  do  $A, B$  trùng nhau.

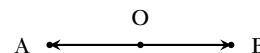
**Chọn đáp án (D)**

**Câu 2.** Điều kiện nào dưới đây là điều kiện cần và đủ để điểm  $O$  là trung điểm của đoạn  $AB$ .

- (A)  $OA = OB$ .      (B)  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ .      (C)  $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BO}$ .      (D)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$ .

**Lời giải.**

$O$  là trung điểm của đoạn  $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$ .



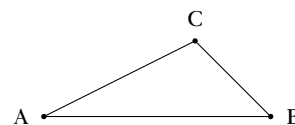
**Chọn đáp án (D)**

**Câu 3.** Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức sai?

- (A)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .      (B)  $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ .      (C)  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ .      (D)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ .

**Lời giải.**

$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$  là khẳng định sai do  $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ .



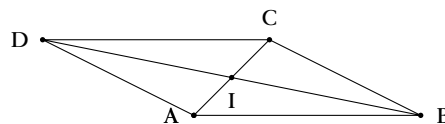
**Chọn đáp án (B)**

**Câu 4.** Cho hình bình hành  $ABCD$  với  $I$  là giao điểm của hai đường chéo. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- (A)  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ .      (B)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .      (C)  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ .      (D)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải.**

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$  là khẳng định sai do hai vec-tơ này không cùng phương nên không bằng nhau.



**Chọn đáp án C**

**Câu 5.** Cho tam giác  $ABC$  đều có độ dài cạnh bằng  $a$ . Độ dài  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$  bằng

(A)  $a$ .

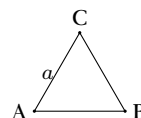
(B)  $2a$ .

(C)  $a\sqrt{3}$ .

(D)  $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Lời giải.**

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = a.$$



**Chọn đáp án A**

**Câu 6.** Cho tam giác  $ABC$ , trọng tâm là  $G$ . Phát biểu nào là đúng?

(A)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

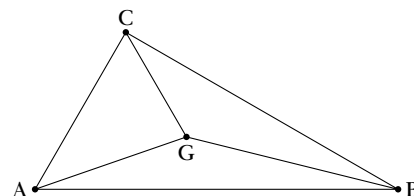
(B)  $|\overrightarrow{GA}| + |\overrightarrow{GB}| + |\overrightarrow{GC}| = 0$ .

(C)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = \overrightarrow{AC}$ .

(D)  $|\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = 0$ .

**Lời giải.**

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow |\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = |\vec{0}| = 0.$$



**Chọn đáp án D**

**Câu 7.** Điều kiện nào dưới đây là điều kiện cần và đủ để điểm  $O$  là trung điểm của đoạn  $AB$ .

(A)  $OA = OB$ .

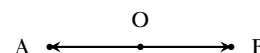
(B)  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ .

(C)  $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BO}$ .

(D)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$ .

**Lời giải.**

$O$  là trung điểm của đoạn  $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$ .



**Chọn đáp án D**

**Câu 8.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

(A)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA}$ .

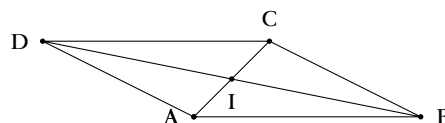
(B)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$ .

(C)  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .

(D)  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}$ .

**Lời giải.**

$ABCD$  là hình bình hành khi  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}$



**Chọn đáp án D**

**Câu 9.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 3$ ;  $BC = 5$ . Tính  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$

(A) 3.

(B) 4.

(C) 5.

(D) 6.

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = AC.$$

Áp dụng định lý Pi-ta-go cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , ta được  $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ .

**Chọn đáp án B**

**Câu 10.** Cho tam giác  $ABC$  đều có độ dài cạnh bằng  $a$ . Khi đó  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$  bằng

(A)  $a$ .

(B)  $2a$ .

(C)  $a\sqrt{3}$ .

(D)  $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = a.$$

**Chọn đáp án A**

**Câu 11.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  phân biệt. Khi đó  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}$  bằng véc-tơ nào sau đây?

- ☐ (A)  $\vec{0}$ .
 ☐ (B)  $\overrightarrow{BD}$ .
 ☐ (C)  $\overrightarrow{AC}$ .
 ☐ (D)  $2\overrightarrow{DC}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ .

Chọn đáp án (A).

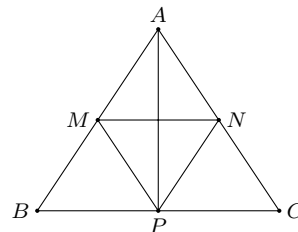
**Câu 12.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, AC, BC$ . Khi đó  $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP}$  bằng véc-tơ nào sau đây?

- ☐ (A)  $\overrightarrow{AM}$ .
 ☐ (B)  $\overrightarrow{PB}$ .
 ☐ (C)  $\overrightarrow{AP}$ .
 ☐ (D)  $\overrightarrow{MN}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $MP$  và  $NP$  lần lượt là các đường trung bình của tam giác  $ABC$ . Khi đó  $AMPN$  là hình bình hành nên suy ra

$$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP} = -(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}) = -\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP}.$$



Chọn đáp án (C).

**Câu 13.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  và  $O$  là tâm của nó. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức sai?

- ☐ (A)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$ .
 ☐ (B)  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AD}$ .
 ☐ (C)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{EB}$ .
 ☐ (D)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FE} = \vec{0}$ .

**Lời giải.**

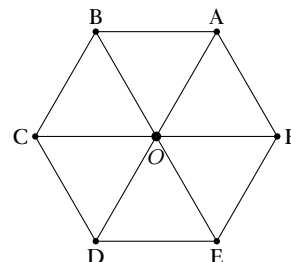
Ta có  $ABCDEF$  là lục giác đều nên  $O$  là trung điểm của các đường chéo  $AD, BE, CF$  và các tam giác tạo bởi các đường chéo này là các tam giác đều.

- $ABCO$  là hình thoi nên  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$ .
- $ABCO$  và  $FODE$  là hình thoi nên  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD}$ .
- $ABCO$  là hình thoi nên  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EB}$ .
- Ta có  $OBCD$  là hình thoi, khi đó

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{AO} \neq \vec{0}.$$

Vậy đẳng thức sai là  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FE} = \vec{0}$ .

Chọn đáp án (D).



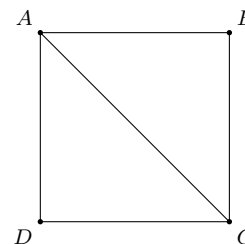
**Câu 14.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}|$ .

- ☐ (A)  $2a\sqrt{2}$ .
 ☐ (B)  $3a$ .
 ☐ (C)  $a\sqrt{5}$ .
 ☐ (D)  $2a$ .

**Lời giải.**

Ta có  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$  nên

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}| = |2\overrightarrow{AC}| = 2AC = 2\sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a\sqrt{2}.$$



Chọn đáp án (A).

**Câu 15.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  và có  $AB = 3$ ,  $AC = 4$ . Véc-tơ  $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$  có độ dài bằng

- ☐ (A)  $\sqrt{13}$ .
 ☐ (B)  $2\sqrt{13}$ .
 ☐ (C)  $2\sqrt{3}$ .
 ☐ (D)  $\sqrt{3}$ .

**Lời giải.**

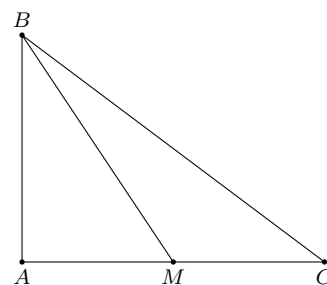
Gọi  $M$  là trung điểm của  $AC$ . Khi đó ta có

$$|\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}| = |-(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})| = |-2\overrightarrow{BM}| = 2BM.$$

Xét  $\triangle ABM$  vuông tại  $A$  có  $AM = \frac{AC}{2} = 2$  ta có

$$BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

Vậy  $|\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{13}.$



🔍 Chọn đáp án **(B)**.

**Câu 16.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Khi đó  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$  bằng

**(A)**  $a\sqrt{2}.$

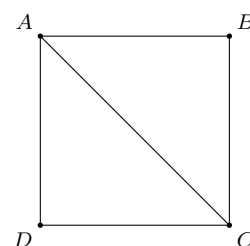
**(B)**  $\frac{a\sqrt{2}}{2}.$

**(C)**  $2a.$

**(D)**  $a.$

🔍 Lời giải.

Ta có  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}.$



🔍 Chọn đáp án **(A)**.

**Câu 17.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Khi đó  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$  bằng

**(A)**  $\frac{a\sqrt{5}}{2}.$

**(B)**  $\frac{a\sqrt{3}}{2}.$

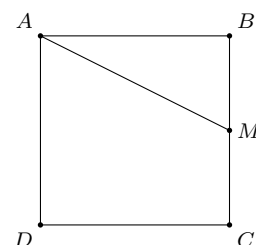
**(C)**  $\frac{a\sqrt{3}}{3}.$

**(D)**  $a\sqrt{5}.$

🔍 Lời giải.

Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ . Khi đó ta có

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AM}| = 2AM = 2\sqrt{AB^2 + BM^2} = 2\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{5}.$$



🔍 Chọn đáp án **(D)**.

**Câu 18.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ , biết  $AB = 4a$  và  $AD = 3a$ . Khi đó độ dài của  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$  bằng

**(A)**  $7a.$

**(B)**  $6a.$

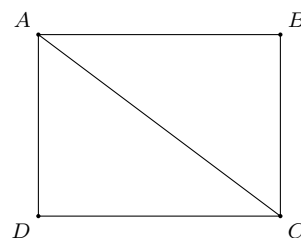
**(C)**  $2a\sqrt{3}.$

**(D)**  $5a.$

🔍 Lời giải.

Ta có

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(4a)^2 + (3a)^2} = 5a.$$



🔍 Chọn đáp án **(D)**.

**Câu 19.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ , gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Phát biểu nào là đúng?

**(A)**  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}.$

**(B)**  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}.$

**(C)**  $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}| = \vec{0}.$

**(D)**  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.$

🔍 Lời giải.

- “ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$ ” là sai vì các véc-tơ  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$  không cùng phương với nhau.
- “ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ ” là sai vì chúng không cùng phương với nhau.
- Ta có  $O$  là trung điểm của  $AC$  và  $BD$  nên

$$|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}| = |\vec{0}| = 0.$$

Phương án “ $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}| = |\vec{0}|$ ” là sai vì độ dài là một đại lượng vô hướng, không phải đại lượng véc-tơ.

- Ta có  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ .

☞ Chọn đáp án **(D)**.

**Câu 20.** Cho 4 điểm bất kì  $A, B, C, O$ . Đẳng thức nào sau đây là đúng?

**(A)**  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CO}$ .

**(B)**  $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ .

**(C)**  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ .

**(D)**  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$ .

☞ **Lời giải.**

Ta có  $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ .

☞ Chọn đáp án **(B)**.

**Câu 21.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , giao điểm của hai đường chéo là  $O$ . Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau

**(A)**  $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ .

**(B)**  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$ .

**(C)**  $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$ .

**(D)**  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ .

☞ **Lời giải.**

Ta có  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{DB} \neq \vec{0}$ .

**Câu 22.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Khi đó  $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$  bằng

**(A)**  $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$ .

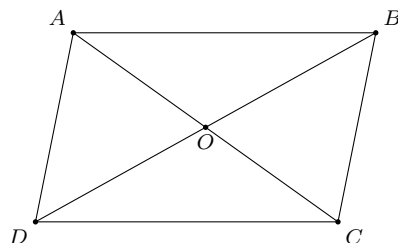
**(B)**  $\overrightarrow{AB}$ .

**(C)**  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ .

**(D)**  $\overrightarrow{CD}$ .

☞ **Lời giải.**

Ta có  $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ .



**Câu 23.** Cho tam giác  $ABC$ , khẳng định nào sau đây là đúng?

**(A)**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ .

**(B)**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

**(C)**  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ .

**(D)**  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

☞ **Lời giải.**

Áp dụng quy tắc cộng véc-tơ ta có  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

**Câu 24.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ . Độ dài của  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  là

**(A)**  $a\sqrt{3}$ .

**(B)**  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

**(C)**  $a\sqrt{6}$ .

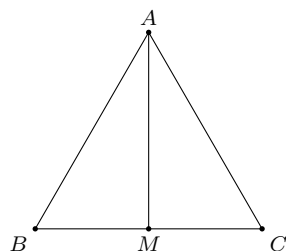
**(D)**  $2a\sqrt{3}$ .

☞ **Lời giải.**

Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ , suy ra  $AM \perp BC$ .

Khi đó ta có

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AM}| = 2AM = 2\sqrt{AB^2 - BM^2} = 2\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{3}.$$



**Câu 25.** Cho  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là các véc-tơ khác  $\vec{0}$  với  $\vec{a}$  là véc-tơ đối của  $\vec{b}$ . Khẳng định nào sau đây sai?

**(A)** Hai véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng phương.

**(B)** Hai véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}$  ngược hướng.

Ⓒ Hai véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng độ dài.

Ⓓ Hai véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}$  chung điểm đầu.

🔗 **Lời giải.**

Hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$  là hai véc-tơ đối nhau khi chúng cùng độ dài và ngược hướng nhau.

🔗 **Chọn đáp án Ⓓ**

**Câu 26.** Cho ba điểm phân biệt  $A, B, C$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ  $\vec{CA} - \vec{BA} = \vec{BC}$ .

Ⓑ  $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{BC}$ .

Ⓒ  $\vec{AB} + \vec{CA} = \vec{CB}$ .

Ⓓ  $\vec{AB} - \vec{BC} = \vec{CA}$ .

🔗 **Lời giải.**

☑ Ta có  $\vec{CA} - \vec{BA} = \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB}$ .

☑ Ta có  $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AM}$  với  $M$  là trung điểm  $BC$ .

☑ Ta có  $\vec{AB} + \vec{CA} = \vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$

☑ Ta có  $\vec{AB} - \vec{BC} = -\vec{BA} - \vec{BC} = -(\vec{BA} - \vec{BC}) = -2\vec{BM}$  với  $M$  là trung điểm  $AC$ .

🔗 **Chọn đáp án Ⓒ**

**Câu 27.** Cho  $\vec{AB} = -\vec{CD}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ  $\vec{AB}$  và  $\vec{CD}$  cùng hướng.

Ⓑ  $\vec{AB}$  và  $\vec{CD}$  cùng độ dài.

Ⓒ  $ABCD$  là hình bình hành.

Ⓓ  $\vec{AB} + \vec{DC} = \vec{0}$ .

🔗 **Lời giải.**

Ta có  $\vec{AB} = -\vec{CD} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{DC} \Leftrightarrow ABCD$  là hình bình hành.

🔗 **Chọn đáp án Ⓒ**

**Câu 28.** Tính tổng  $\vec{MN} + \vec{PQ} + \vec{RN} + \vec{NP} + \vec{QR}$

Ⓐ  $\vec{MR}$ .

Ⓑ  $\vec{MN}$ .

Ⓒ  $\vec{PR}$ .

Ⓓ  $\vec{MP}$ .

🔗 **Lời giải.**

Ta có  $\vec{MN} + \vec{PQ} + \vec{RN} + \vec{NP} + \vec{QR} = \vec{MN} + \vec{NP} + \vec{PQ} + \vec{QR} + \vec{RN} = \vec{MN}$ .

🔗 **Chọn đáp án Ⓑ**

**Câu 29.** Cho hai điểm  $A$  và  $B$  phân biệt. Điều kiện để  $I$  là trung điểm  $AB$  là

Ⓐ  $IA = IB$ .

Ⓑ  $\vec{IA} = \vec{IB}$ .

Ⓒ  $\vec{IA} = -\vec{IB}$ .

Ⓓ  $\vec{AI} = \vec{BI}$ .

🔗 **Lời giải.**

Điểm  $I$  là trung điểm  $AB \Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{IA} = -\vec{IB}$ .

🔗 **Chọn đáp án Ⓒ**

**Câu 30.** Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ ?

Ⓐ  $IA = IB$ .

Ⓑ  $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ .

Ⓒ  $\vec{IA} - \vec{IB} = \vec{0}$ .

Ⓓ  $\vec{IA} = \vec{IB}$ .

🔗 **Lời giải.**

Điểm  $I$  là trung điểm  $AB \Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{IA} = -\vec{IB}$ .

🔗 **Chọn đáp án Ⓑ**

**Câu 31.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$  đường cao  $AH$ . Khẳng định nào sau đây sai?

Ⓐ  $\vec{AB} = \vec{AC}$ .

Ⓑ  $\vec{HC} = -\vec{HB}$ .

Ⓒ  $|\vec{AB}| = |\vec{AC}|$ .

Ⓓ  $\vec{BC} = 2\vec{HC}$ .

🔗 **Lời giải.**

$\triangle ABC$  cân tại  $A$  có đường cao  $AH \Rightarrow \begin{cases} \vec{HC} = -\vec{HB} \\ |\vec{AB}| = |\vec{AC}| \\ \vec{BC} = 2\vec{HC} \end{cases}$

🔗 **Chọn đáp án Ⓐ**

**Câu 32.** Gọi  $O$  là tâm hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

Ⓐ  $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{CD}$ .

Ⓑ  $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{OD} - \vec{OA}$ .

Ⓒ  $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DB}$ .

Ⓓ  $\vec{BC} - \vec{BA} = \vec{DC} - \vec{DA}$ .

🔗 **Lời giải.**

Với  $O$  là tâm hình bình hành  $ABCD$  ta có:

☑  $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA} = \vec{CD}$ .

☑  $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{CB} = \vec{DA} = \vec{OA} - \vec{OD}$ .

☑  $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DB}$ .

$$\odot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}.$$

🔍 Chọn đáp án **(B)**.

**Câu 33.** Gọi  $O$  là tâm hình vuông  $ABCD$ . Tính  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$ .

**(A)**  $\overrightarrow{BC}$ .

**(B)**  $\overrightarrow{DA}$ .

**(C)**  $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$ .

**(D)**  $\overrightarrow{AB}$ .

🔍 **Lời giải.**

Với  $O$  là tâm hình bình hành  $ABCD$  ta có  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$ .

🔍 Chọn đáp án **(B)**.

**Câu 34.** Cộng các véc-tơ có cùng độ dài 5 và cùng giá. Khẳng định nào sau đây đúng?

**(A)** Cộng 5 véc-tơ ta được kết quả là  $\vec{0}$ .

**(B)** Cộng 4 véc-tơ đôi một ngược hướng ta được kết quả là  $\vec{0}$ .

**(C)** Cộng 121 véc-tơ ta được kết quả là  $\vec{0}$ .

**(D)** Cộng 25 véc-tơ ta được véc-tơ có độ dài là 0.

🔍 **Lời giải.**

☑ Các véc-tơ có cùng độ dài 5 và cùng giá có thể cùng hướng nên tổng chúng sẽ khác  $\vec{0}$ .

☑ Khi cộng 4 véc-tơ đôi một ngược hướng ta được kết quả là  $\vec{0}$ .

🔍 Chọn đáp án **(B)**.

**Câu 35.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

**(A)**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ .

**(B)**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA}$ .

**(C)**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$ .

**(D)**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}$ .

🔍 **Lời giải.**

☑ Ta có  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{0} = \vec{0}$ .

☑ Ta có  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{DA}$ .

☑ Ta có  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}$  đẳng thức này sai.

☑ Ta có  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \vec{0}$  đẳng thức này sai.

🔍 Chọn đáp án **(A)**.

**Câu 36.** Gọi  $O$  là tâm của hình vuông  $ABCD$ . Véc-tơ nào trong các véc-tơ dưới đây bằng  $\overrightarrow{CA}$ ?

**(A)**  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$ .

**(B)**  $-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ .

**(C)**  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$ .

**(D)**  $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CB}$ .

🔍 **Lời giải.**

Với  $O$  là tâm của hình vuông  $ABCD$  ta có:

☑  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ .

☑  $-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC}$ .

☑  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$

☑  $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC}$ .

🔍 Chọn đáp án **(C)**.

**Câu 37.** Cho tam giác  $ABC$  có  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ . Xác định vị trí điểm  $M$

**(A)**  $M$  là đỉnh của hình bình hành  $ACBM$ .

**(B)**  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ .

**(C)**  $M$  trùng  $C$ .

**(D)**  $M$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .

🔍 **Lời giải.**

Ta có  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow M$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .

🔍 Chọn đáp án **(D)**.

**Câu 38.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh  $a$ . Giá trị  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}|$  bằng bao nhiêu?

(A)  $2a$ .

(B)  $a$ .

(C)  $a\sqrt{3}$ .

(D)  $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ .

Ta có  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{AM}| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ .

**Chọn đáp án (C).**

## §3 TÍCH CỦA VEC-TƠ VỚI MỘT SỐ

### A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1 TÍCH CỦA MỘT SỐ ĐỐI VỚI MỘT VEC-TƠ

**Định nghĩa.** Cho một số thực  $k \neq 0$  và một vec-tơ  $\vec{a} \neq \vec{0}$ .

Tích  $k \cdot \vec{a}$  là một vec-tơ có cùng hướng  $\vec{a}$  và  $|k\vec{a}| = k|\vec{a}|$  khi  $k > 0$ .

Tích  $k \cdot \vec{a}$  là một vec-tơ có ngược hướng  $\vec{a}$  và  $|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|$  khi  $k < 0$ .

**Tính chất 1.**

$$\odot k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}.$$

$$\odot k(h\vec{a}) = (kh)\vec{a}.$$

$$\odot (k + h) \cdot \vec{a} = k\vec{a} + h\vec{a}.$$

$$\odot (-1)\vec{a} = -\vec{a}.$$

$$\odot 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}.$$

$$\odot 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}.$$

**Định lý 1 (Điều kiện để hai vector cùng phương).**

Điều kiện cần và đủ để hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$  ( $\vec{b} \neq \vec{0}$ ) cùng phương là tồn tại một số  $k$  để  $\vec{a} = k\vec{b}$ .

#### 2 TRUNG ĐIỂM ĐOẠN THẲNG VÀ TRỌNG TÂM TAM GIÁC

$$\odot I \text{ là trung điểm của } AB \Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} \text{ hay } \vec{IA} = -\vec{IB}.$$

$$\odot I \text{ là trung điểm } AB \text{ và } M \text{ là điểm bất kì, ta luôn có } 2\vec{MI} = \vec{MA} + \vec{MB}.$$

$$\odot G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \text{ và } M \text{ là điểm bất kì } \Leftrightarrow 3\vec{MG} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}.$$

### B CÁC DẠNG TOÁN VÀ VÍ DỤ

#### ○ Dạng 1. Chứng minh đẳng thức vec-tơ

$$\odot \text{ Quy tắc 3 điểm: } \vec{AB} = \vec{AM} + \vec{MB}, \text{ chèn điểm } M.$$

$$\odot \text{ Quy tắc 3 điểm (phép trừ): } \vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA}, \text{ hiệu hai vec-tơ cùng gốc.}$$

$$\odot \text{ Quy tắc hình bình hành: Với hình bình hành } ABCD \text{ luôn có } \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}.$$

$$\odot \text{ Cách thường dùng: Biến đổi một vế cho đến khi ra vế còn lại.}$$

$$\odot \text{ Cách bắc cầu: Biến đổi hai vế cho ra cùng một kết quả.}$$

**Vi dụ 1.** Cho tam giác  $ABC$  có 3 trung tuyến là  $AM, BN, CP$ . Chứng minh

$$\textcircled{1} \vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = \vec{0}.$$

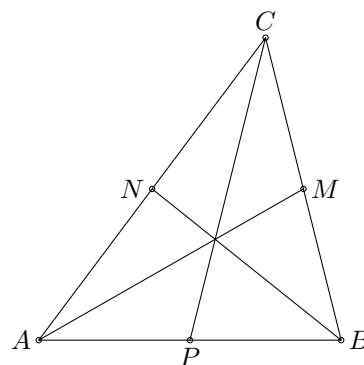
$$\textcircled{2} \vec{AP} + \vec{BM} = \frac{1}{2}\vec{AC}.$$

**Lời giải.**

$$\textcircled{1} \text{ Ta có } \vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BA} + \vec{AC} + \vec{CA} + \vec{BC} + \vec{CB}) = \vec{0}.$$

$$\textcircled{2} \text{ Vì } P \text{ là trung điểm của } AB \text{ nên } \vec{AP} = \vec{PB}. \text{ Khi đó ta có } \vec{AP} + \vec{BM} = \vec{PB} + \vec{BM} = \vec{PM}.$$

$$\text{Mà } PM \text{ là đường trung bình trong tam giác } ABC \text{ suy ra } \vec{PM} = \frac{1}{2}\vec{AC} \\ \text{suy ra } \vec{AP} + \vec{BM} = \frac{1}{2}\vec{AC}.$$

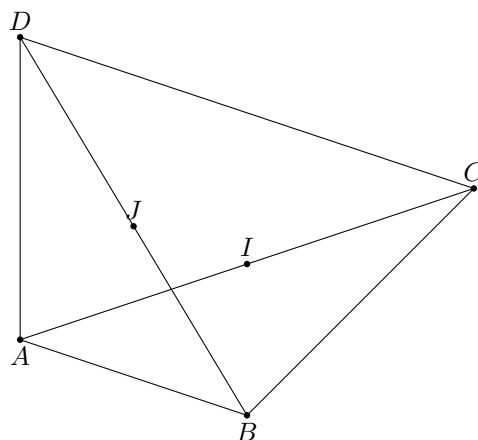


**❧ Ví dụ 2.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm  $AC, BD$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$ .

**🔗 Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JD} \\ &= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD} \\ &= 2\overrightarrow{IJ}.\end{aligned}$$



### 🔗 Dạng 2. Xác định điểm thỏa điều kiện cho trước

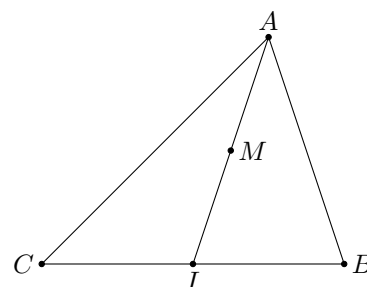
- ☑ Biến đổi đẳng thức đã cho về dạng  $\overrightarrow{AM} = \vec{v}$ , trong đó  $A$  là điểm cố định,  $\vec{v}$  là một vectơ cố định.
- ☑ Lấy điểm  $A$  là gốc dựng véc-tơ bằng  $\vec{v}$  thì điểm ngọn chính là điểm  $M$  cần tìm.

**❧ Ví dụ 1.** Cho tam giác  $ABC$ . Hãy xác định vị trí điểm  $M$  thỏa điều kiện  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .

**🔗 Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{CI} = \vec{0} \quad (I \text{ là trung điểm } AB) \\ &\Leftrightarrow 4\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{CI} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CI}.\end{aligned}$$



### 🔗 Dạng 3. Chứng minh ba điểm thẳng hàng

- ☑ Để chứng minh 3 điểm  $A, B, C$  thẳng hàng, ta chứng minh:  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$  (1).

Để nhận được (1), ta lựa chọn một trong hai hướng sau:

- Sử dụng các quy tắc biến đổi véc-tơ.
- Xác định (tính) véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  thông qua một tổ hợp trung gian.

Chú ý:

- Dựa vào lời bình 3, ta có thể suy luận được phát biểu sau: “Cho ba điểm  $A, B, C$ . Điều kiện cần và đủ để  $A, B, C$  thẳng hàng là:  $\overrightarrow{MC} = \alpha\overrightarrow{MA} + (1 - \alpha)\overrightarrow{MB}$  với điểm  $M$  tùy ý và số thực  $\alpha$  bất kỳ”. Đặc biệt khi  $0 \leq \alpha \leq 1$  thì  $C \in AB$ . Kết quả trên còn được sử dụng để tìm điều kiện của tham số  $k$  (hoặc  $m$ ) cho ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.
- Nếu không dễ nhận thấy  $k$  trong biểu thức  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ , ta nên quy đồng biểu thức phân tích véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  để tìm ra số  $k$ .

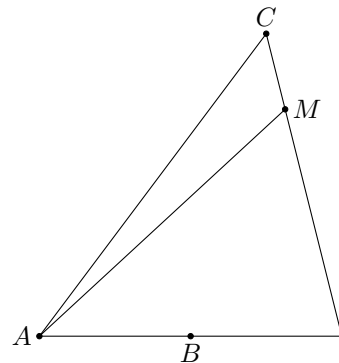
- ☑ Để chứng minh  $AB \parallel CD$  ta cần chứng minh  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$ .

**Ví dụ 1.** Cho tam giác  $ABC$ . Lấy điểm  $M$  trên cạnh  $BC$  sao cho  $MB = 3MC$ . Phân tích  $\overrightarrow{AM}$  theo các véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} \text{ (vì } MB = 3MC) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

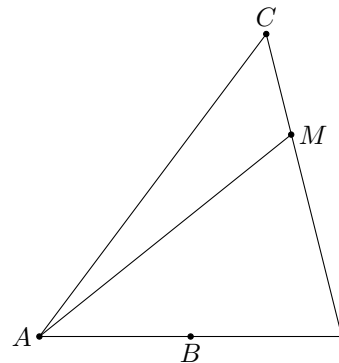


**Ví dụ 2.** Cho tam giác  $ABC$ . Lấy điểm  $M$  trên cạnh  $BC$  sao cho  $BM = \frac{2}{3}BC$ . Phân tích  $\overrightarrow{AM}$  theo các véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \text{ (vì } BM = \frac{2}{3}BC) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

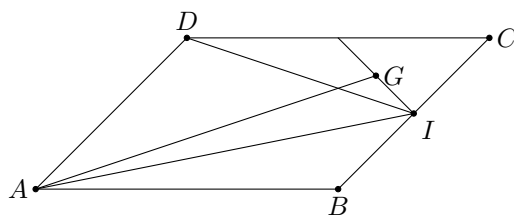


**Ví dụ 3.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ . Hãy tính các véc-tơ sau theo  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ .

①  $\overrightarrow{DI}$  với  $I$  là trung điểm  $BC$ .

②  $\overrightarrow{AG}$  với  $G$  là trọng tâm tam giác  $CDI$ .

**Lời giải.**



a) Ta có  $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CI} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \vec{a} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ .

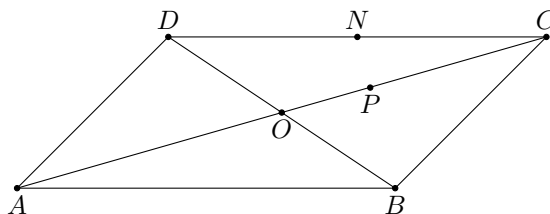
b) Gọi  $M$  là trung điểm  $DC$ , ta có

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AI} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} \\ &= 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ &= \frac{5}{2}\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Suy ra  $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$  hay  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}$ .

**Ví dụ 4.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  theo thứ tự là trung điểm của  $AB, CD$  và  $P$  là điểm thỏa mãn hệ thức  $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ . Chứng minh 3 điểm  $B, P, N$  thẳng hàng.

**Lời giải.**



Ta có  $CO$  là đường trung tuyến của tam giác  $BCD$ . Hơn nữa  $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$  suy ra  $P$  là trọng tâm của tam giác  $BCD$ .

Mặt khác  $BN$  cũng là đường trung tuyến trong tam giác  $BCD$  nên  $B, P, N$  thẳng hàng.

## C BÀI TẬP TỰ LUẬN

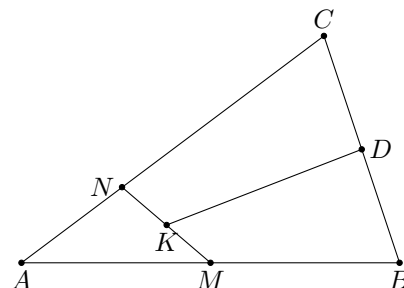
**Bài 1.** Cho tam giác  $ABC$  có  $M, D$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC$  và  $N$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$ . Gọi  $K$  là trung điểm của  $MN$ . Hãy tính các véc-tơ  $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{KD}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ .

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KD} &= \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AD} \\ &= -\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$



**Bài 2.** Cho  $\triangle ABC$ , trên hai cạnh  $AB, AC$  lấy hai điểm  $D$  và  $E$  sao cho  $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{EA}$ . Gọi  $M, I$  lần lượt là trung điểm của  $DE$  và  $BC$ . Hãy tính vectơ  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MI}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AC}.$$

Ta có

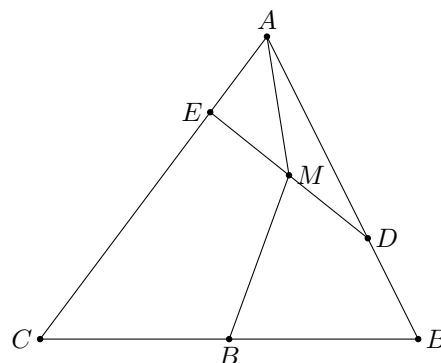
$$\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{CI}$$

và

$$\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BI}.$$

Suy ra

$$2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EC} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}.$$



**Bài 3.** Cho bốn điểm phân biệt  $A, B, C, D$  thỏa:  $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AD}$ . Chứng minh  $B, C, D$  thẳng hàng.

**Lời giải.**

Ta có

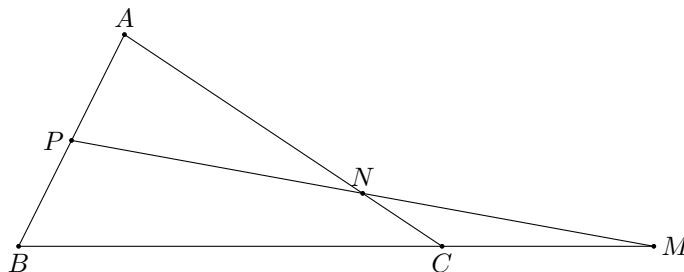
$$\begin{aligned}
 & 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AD} \\
 \Leftrightarrow & 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{AD} = \vec{0} \\
 \Leftrightarrow & 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AD} = \vec{0} \\
 \Leftrightarrow & 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) = \vec{0} \\
 \Leftrightarrow & 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} = \vec{0} \\
 \Leftrightarrow & \overrightarrow{DB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{DC}.
 \end{aligned}$$

Suy ra ba điểm  $B, C, D$  thẳng hàng.

**Bài 4.** Cho  $\triangle ABC$ , lấy điểm  $M, N, P$  sao cho  $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$ ,  $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$ ,  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$ .

- ① Tính  $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .
- ② Chứng minh ba điểm:  $M, N, P$  thẳng hàng.

**Lời giải.**



- ① Ta có:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC} & \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) \\
 & \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \\
 & \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}. \\
 \overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0} & \Leftrightarrow -\overrightarrow{AN} + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AN}) = \vec{0} \\
 & \Leftrightarrow -4\overrightarrow{AN} = -3\overrightarrow{AC} \\
 & \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}. \\
 \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0} & \Leftrightarrow -\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} = \vec{0} \\
 & \Leftrightarrow -2\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AB} \\
 & \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.
 \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{PM} &= \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AP} = \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}; \\
 \overrightarrow{PN} &= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.
 \end{aligned}$$

$$\text{② Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{PM} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{PN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{PN}.$$

Suy ra hai vectơ  $\overrightarrow{PM}$  và  $\overrightarrow{PN}$  cùng phương, nên ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng.

**Bài 5.** Cho  $\triangle ABC$  có hai đường trung tuyến  $BN, CP$ . Hãy biểu thị các vector  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$  theo các vector  $\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{BN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CP} - \overrightarrow{BN}.$$

Suy ra

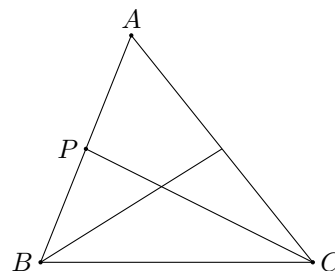
$$\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CP} - \frac{4}{3}\overrightarrow{BN}.$$

Ta lại có

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{CP} - \frac{4}{3}\overrightarrow{BN}\right) - \overrightarrow{CP} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{4}{3}\overrightarrow{CP}.$$

Khi đó

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{4}{3}\overrightarrow{CP} - \left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{CP} - \frac{4}{3}\overrightarrow{BN}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}.$$



**Bài 6 (0H1B3-4).** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $I, J$  nằm trên cạnh  $BC$  và  $BC$  kéo dài sao cho  $2CI = 3BI, 5JB = 2JC$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .

① Tính  $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

② Tính  $\overrightarrow{AG}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải.**

① Tính  $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

☑ Gọi  $E, D$  lần lượt là trung điểm  $BC$  và  $AB$ .

☑ Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

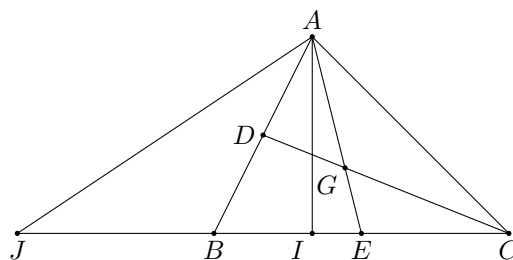
☑ Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AJ} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} \\ &= \overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

② Tính  $\overrightarrow{AG}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$



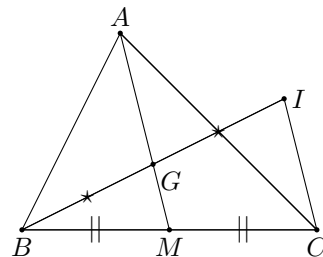
**Bài 7 (0H1B3-4).** Cho  $\triangle ABC$  có  $G$  là trọng tâm tam giác và  $I$  là điểm đối xứng của  $B$  qua  $G$ .  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Hãy tính  $\overrightarrow{AI}$ ,  $\overrightarrow{CI}$ ,  $\overrightarrow{MI}$  theo  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải.**

- ☑ Tính  $\overrightarrow{AI}$  theo  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ .

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= 2\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{4}{3}\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$



- ☑ Tính  $\overrightarrow{CI}$  theo  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ .

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CI} &= \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

- ☑ Tính  $\overrightarrow{MI}$  theo  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ .

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MI} &= \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AM} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

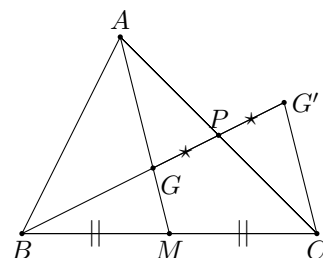
**Bài 8 (0H1K3-4).** Cho  $\triangle ABC$  có trọng tâm là  $G$  và các đường trung tuyến  $AM$ ,  $BP$ . Gọi  $G'$  là điểm đối xứng với điểm  $G$  qua  $P$ . Hãy biểu diễn các véc-tơ  $\overrightarrow{AG'}$ ,  $\overrightarrow{CG'}$  theo  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  và Chứng minh hệ thức:  $5\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{MG'}$

**Lời giải.**

- ☑ Biểu diễn các véc-tơ  $\overrightarrow{AG'}$  theo  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ .

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG'} &= 2\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{4}{3}\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$



- ☑ Biểu diễn các véc-tơ  $\overrightarrow{CG'}$  theo  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ .

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CG'} &= \overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

- ☑ Chứng minh hệ thức:  $5\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{MG'}$

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MG'} &= \overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{AM} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } 5\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{MG'}.$$

**Bài 9 (0H1K3-4).** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  theo thứ tự là trung điểm của các cạnh  $BC, CD$ . Hãy biểu diễn các véc-tơ  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$  theo các véc-tơ  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}$ .

**Lời giải.**

- ☑ biểu diễn các véc-tơ  $\overrightarrow{BC}$  theo các véc-tơ  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}$ .

Gọi  $E$  là trung điểm  $MN$  suy ra  $AC = \frac{4}{3}AE$ .

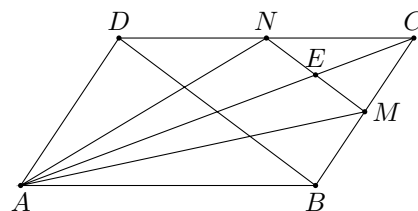
Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AC} - (2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) \\ &= 2\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AM} \\ &= 2 \cdot \frac{4}{3}\overrightarrow{AE} - 2\overrightarrow{AM} \\ &= \frac{4}{3}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) - 2\overrightarrow{AM} \\ &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AN}.\end{aligned}$$

- ☑ biểu diễn các véc-tơ  $\overrightarrow{CD}$  theo các véc-tơ  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}$ .

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD} &= -\overrightarrow{AB} \\ &= -(2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) \\ &= -2\overrightarrow{AM} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AE} \\ &= -2\overrightarrow{AM} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) \\ &= -\frac{4}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AN}.\end{aligned}$$



**Bài 10 (0H1K3-4).** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $M, N$  theo thứ tự là trung điểm của các cạnh  $AD, BC$ . Hãy biểu diễn véc-tơ  $\overrightarrow{MN}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$  và theo  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}$ .

**Lời giải.**

- ☑ Biểu diễn véc-tơ  $\overrightarrow{MN}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có Ta có

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{MN} &= (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA}) + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{BN}) \\ &= \vec{0} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \vec{0}\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}.$$

- ☑ Biểu diễn véc-tơ  $\overrightarrow{MN}$  theo  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}$ .

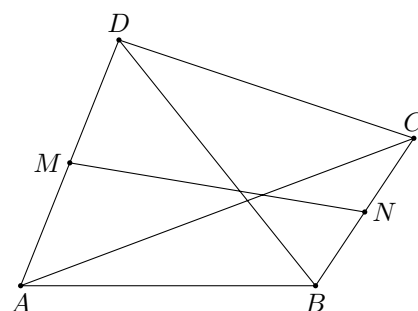
$$\text{Ta có } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC} \quad (3)$$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} &= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DM}) + 2\overrightarrow{MN} + (\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{NB}) \\ &= \vec{0} + 2\overrightarrow{MN} + \vec{0}\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}.$$



**Bài 11 (0H1K3-5).** Cho  $\triangle DEF$ . Dụng điểm  $H$  sao cho  $\overrightarrow{EH} = 4\overrightarrow{ED} - 3\overrightarrow{EF}$  và chứng minh điểm  $H$  nằm trên  $DF$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EH} &= 4\overrightarrow{ED} - 3\overrightarrow{EF} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FH} &= 4(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD}) - 3\overrightarrow{EF} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{FH} &= 4\overrightarrow{FD}\end{aligned}$$

Vậy 3 điểm  $F, D, H$  thẳng hàng hay

$H$  nằm trên  $DF$ .

Từ  $\overrightarrow{FH} = 4\overrightarrow{FD}$

Suy ra  $\begin{cases} F, D, H \text{ thẳng hàng} \\ FH = 4FD \text{ và } D \text{ nằm giữa } H, F \end{cases}$



**Bài 12 (0H1K3-5).** Cho  $\triangle ABC$  có  $I$  là trung điểm của trung tuyến  $AM$  và  $D$  là điểm thỏa hệ thức  $3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ . Biểu diễn véc-tơ  $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BI}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  và chứng minh ba điểm  $B, I, D$  thẳng hàng.

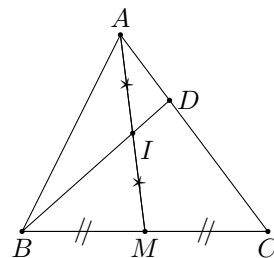
**Lời giải.**

Ta có  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ . (1)

Lại có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}. \quad (2)\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có  $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$ , suy ra ba điểm  $B, I, D$  thẳng hàng.

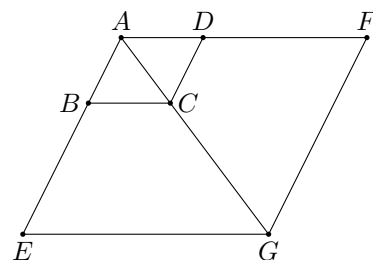


**Bài 13 (0H1K3-5).** Cho hình bình hành  $ABCD$ .

- ① Dụng các điểm  $E, F$  sao cho  $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$ .
- ② Dụng điểm  $G$  sao cho tứ giác  $AEGF$  là hình bình hành.
- ③ Chứng minh 3 điểm  $A, C, G$  thẳng hàng.

**Lời giải.**

- ① Ta có  $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$ .  
Lại có  $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$ , do đó ta dựng được các điểm  $E, F$  như hình vẽ.
- ② Điểm  $G$  được xác định như hình vẽ.
- ③ Do  $AEGF$  là hình bình hành nên ta có



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD} \\ &= 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = 3\overrightarrow{AC} \text{ (do } ABCD \text{ là hình bình hành)}.\end{aligned}$$

Suy ra 3 điểm  $A, C, G$  thẳng hàng.

**Bài 14 (0H1K3-5).** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$  và  $E$  là điểm thỏa hệ thức  $3\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{ID}$ . Chứng minh ba điểm  $A, C, E$  thẳng hàng.

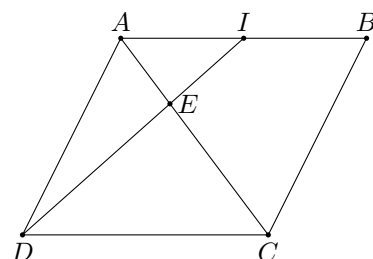
**Lời giải.**

Ta có  $3\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{ID} \Leftrightarrow \overrightarrow{DI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DE}$ .

Do  $ABCD$  là hình bình hành nên

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AD} \\ &= 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Vậy ba điểm  $A, C, E$  thẳng hàng.



**Bài 15 (0H1K3-5).** Cho  $\triangle ABC$ .

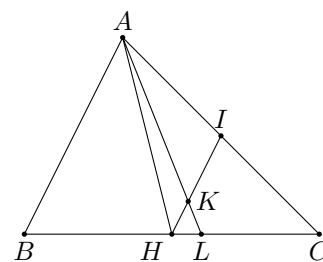
- ① Đặt các điểm  $K, L$  sao cho  $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$ ,  $2\overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \vec{0}$
- ② Chứng minh ba điểm  $A, K, L$  thẳng hàng.

**Lời giải.**

- ① Gọi  $H, I$  lần lượt là trung điểm của  $BC, AC$ . Khi đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0} &\Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC} + 2(\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{KI} + 4\overrightarrow{KH} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IH}.\end{aligned}$$

Từ đó dựng các điểm  $K, L$  như hình vẽ.



- ② Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{IH} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \text{ (do } IH \text{ là đường trung bình trong } \triangle ABC\text{)}.\end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AL} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{6}{5}\overrightarrow{AK}.\end{aligned}$$

Vậy ba điểm  $A, K, L$  thẳng hàng.

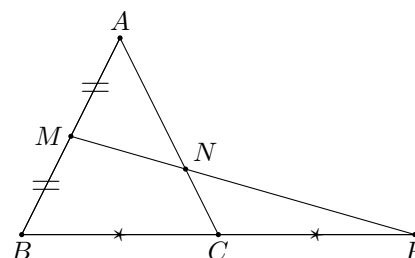
**Bài 16 (0H1K3-5).** Cho  $\triangle ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $AB$ ,  $N$  và  $P$  là hai điểm thỏa mãn hệ thức  $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}$ ,  $\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ . Chứng minh ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng.

**Lời giải.**

Ta có  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ .

Lại có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \\ &= 3\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) = 3\overrightarrow{MN}.\end{aligned}$$



Vậy ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng.

**Bài 17 (0H1K3-5).** Cho  $\triangle ABC$ . Hai điểm  $M, N$  được xác định bởi  $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ ,  $\overrightarrow{NB} - 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$ . Chứng minh  $MN$  đi qua trọng tâm  $\triangle ABC$ .

**Lời giải.**

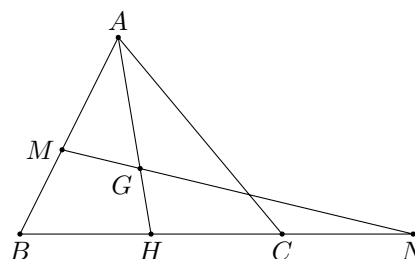
Gọi  $G$  là trọng tâm của  $\triangle ABC$ . Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MG} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AG} = -\frac{4}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AH} \\ &= -\frac{4}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{5}{21}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{15}{14}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{9}{2}\overrightarrow{MG}.\end{aligned}$$

Vậy  $M, N, G$  thẳng hàng, hay  $MN$  đi qua trọng tâm  $G$  của  $\triangle ABC$ .



**Bài 18 (0H1K3-5).** Cho  $\triangle ABC$ .

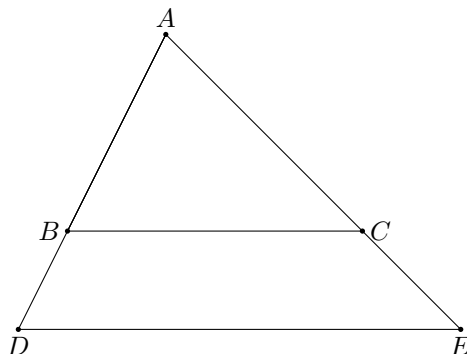
- ① Đặt các điểm  $D, E$  thỏa các hệ thức  $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ .
- ② Chứng minh ba điểm  $A, C, E$  thẳng hàng.

**Lời giải.**

- ① Ta dựng các điểm  $D, E$  như hình vẽ.
- ② Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Vậy ba điểm  $A, C, E$  thẳng hàng.

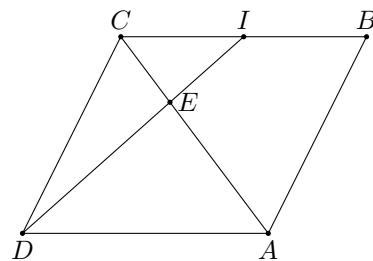


**Bài 19 (0H1K3-5).** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $I$  là trung điểm của cạnh  $BC$  và  $E$  là điểm xác định bởi  $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ . Chứng minh ba điểm  $D, E, I$  thẳng hàng.

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DI} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DE}.\end{aligned}$$



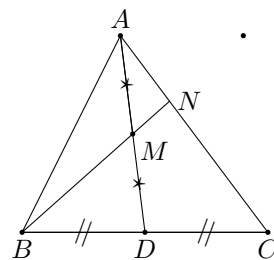
Vậy ba điểm  $D, E, I$  thẳng hàng.

**Bài 20 (0H1K3-5).** Cho  $\triangle ABC$  có trung tuyến  $AD$  và  $M$  là trung điểm  $AD$ . Điểm  $N$  được lấy trên  $AC$  sao cho  $3\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$ . Chứng minh ba điểm  $B, M, N$  thẳng hàng.

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{3}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{BN}.\end{aligned}$$



Vậy ba điểm  $B, M, N$  thẳng hàng.

**Bài 21.** Cho  $\triangle ABC$  có  $M$  là trung điểm  $BC$  và  $O$  là trung điểm của  $AM$ . Trên  $AB$  lấy điểm  $I$ ,  $AC$  lấy điểm  $J$  sao cho  $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ . Chứng minh ba điểm  $I, J, O$  thẳng hàng.

**Lời giải.**

Do  $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$  nên  $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ . Tương tự thì  $\overrightarrow{JC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ .

Ta có

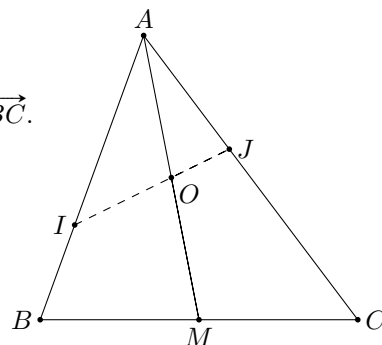
$$2\overrightarrow{IO} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IM} = \frac{-2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BM} = \frac{-2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{-1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

Tương tự,

$$2\overrightarrow{JO} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{10}\overrightarrow{BC}.$$

Suy ra  $6\overrightarrow{IO} = -10\overrightarrow{JO}$  hay  $\overrightarrow{IO} = \frac{-5}{3}\overrightarrow{JO}$ .

Vậy ba điểm  $I, J, O$  thẳng hàng.



**Bài 22.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  là hai điểm di động trên  $AB, CD$  sao cho  $\frac{MA}{MB} = \frac{ND}{NC}$  và hai điểm  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AD, BC$ .

- ① Tính  $\vec{IJ}$  theo  $\vec{AB}$  và  $\vec{DC}$ .
- ② Chứng minh trung điểm  $P$  của  $MN$  nằm trên  $IJ$ .

**Lời giải.**

a)  $2\vec{IJ} = \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{IA} + \vec{AB} + \vec{ID} + \vec{DC} = \vec{AB} + \vec{DC}$ .

Suy ra  $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{DC}$ .

b) Từ giả thiết ta có  $\vec{BM} = -\vec{AM} \cdot \frac{NC}{ND}$  và  $\vec{CN} = -\vec{DN} \cdot \frac{MB}{MA}$ .

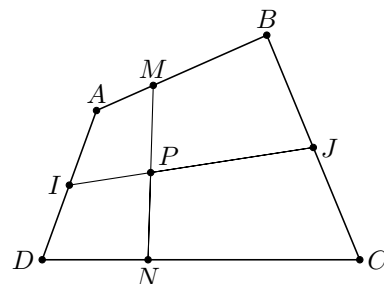
Mặt khác

$$2\vec{IP} = \vec{IM} + \vec{IN} = \vec{IA} + \vec{AM} + \vec{ID} + \vec{DN} = \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{AM} + \vec{DN}.$$

Mà

$$2\vec{JP} = \vec{BM} + \vec{CN} = -\vec{AM} \cdot \frac{NC}{ND} - \vec{DN} \cdot \frac{MB}{MA} = -\frac{MB}{MA}(\vec{AM} + \vec{DN}) = -\frac{2MB}{MA} \cdot \vec{IP}.$$

Suy ra  $I, P, J$  thẳng hàng hay  $P$  của  $MN$  nằm trên  $IJ$ .



**Bài 23.** Cho  $\triangle ABC$ . Lấy điểm  $I$  thỏa  $3\vec{AI} = \vec{AB}$ ,  $4\vec{AJ} = 3\vec{AC}$  và  $M$  là giao điểm của đường thẳng  $IJ$  và  $BC$ . Đặt  $\vec{BM} = m\vec{MC}$ .

- ① Chứng minh rằng  $12\vec{IJ} = 9\vec{BC} - 5\vec{BA}$ .
- ② Tính  $\vec{IM}$  theo  $\vec{BA}, \vec{BC}$ .
- ③ Tìm giá trị của  $m$ .

**Lời giải.**

a) Ta có  $12\vec{IJ} = 12\vec{IA} + 12\vec{AJ} = 4\vec{BA} + 9\vec{AC} = 4\vec{BA} + 9(\vec{BC} - \vec{BA}) = 9\vec{BC} - 5\vec{BA}$ .

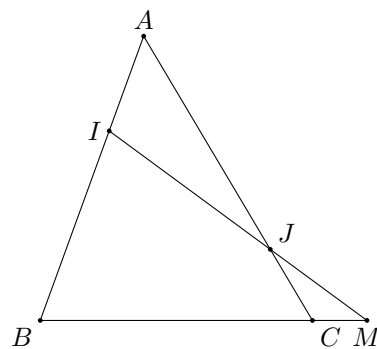
b) Do  $\vec{BM} = m\vec{MC}$  nên  $m \neq -1$  và  $\vec{BM} = \frac{m}{m+1}\vec{BC}$ .

Suy ra  $\vec{IM} = \vec{IB} + \vec{BM} = \frac{-2}{3}\vec{BA} + \frac{m}{m+1}\vec{BC}$ .

c) Do  $I, J, M$  thẳng hàng nên  $\vec{IM} = k\vec{IJ}, k \neq 0$

Suy ra  $\frac{-2}{3}\vec{BA} + \frac{m}{m+1}\vec{BC} = k \cdot \left(\frac{3}{4}\vec{BC} - \frac{5}{12}\vec{BA}\right)$ .

Do đó  $\begin{cases} \frac{2}{3} = \frac{5}{12}k \\ \frac{m}{m+1} = \frac{3}{4}k \end{cases}$ . Suy ra  $m = -6$ .



**Bài 24.** Cho  $\triangle ABC$ . Gọi  $P, Q, R$  là các điểm thỏa các đẳng thức :

$$3\vec{PB} + 4\vec{PC} = \vec{0}, \quad \vec{AQ} = 2\vec{QC}, \quad k\vec{RA} = \vec{RB}, \quad k \neq 1.$$

- ① Chứng minh rằng:  $21\vec{PQ} = 2\vec{BC} + 7\vec{BA}$ .
- ② Chứng minh rằng:  $\vec{RP} = \frac{k}{1-k}\vec{BA} + \frac{4}{7}\vec{BC}$ .
- ③ Tìm  $k$  sao cho  $P, Q, R$  thẳng hàng.

**Lời giải.**

a) Từ  $3\overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ ,  $\overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{QC}$  suy ra  $\overrightarrow{PC} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}$  và  $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ .

Do đó

$$21\overrightarrow{PQ} = 21\overrightarrow{PC} + 21\overrightarrow{CQ} = 9\overrightarrow{BC} + 7\overrightarrow{CA} = 9\overrightarrow{BC} + 7(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) = 2\overrightarrow{BC} + 7\overrightarrow{BA}.$$

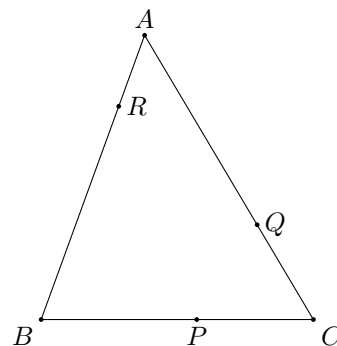
b) Từ  $k\overrightarrow{RA} = \overrightarrow{RB}$  suy ra  $\overrightarrow{RB} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{BA}$ .

$$\text{Do đó } \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{BP} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{BA} + \frac{4}{7}\overrightarrow{BC}.$$

c) Để  $P, Q, R$  thẳng hàng thì  $\overrightarrow{RP} = a \cdot \overrightarrow{PQ}$ ,  $a \neq 0$ .

$$\text{Suy ra } \frac{k}{1-k}\overrightarrow{BA} + \frac{4}{7}\overrightarrow{BC} = a \cdot \left( \frac{2}{21}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} \right)$$

$$\text{Suy ra } k = \frac{2}{3}.$$



**Bài 25.** Cho hình bình hành  $ABCD$ .

- ① Gọi  $I, F, K$  là các điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{AI} = \alpha\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AF} = \beta\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AK} = \gamma\overrightarrow{AD}$ . Chứng minh điều kiện cần và đủ để  $I, F, K$  thẳng hàng là

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \quad (\alpha, \beta, \gamma \neq 0).$$

- ② Gọi  $M, N$  là hai điểm lần lượt trên đoạn  $AB, CD$  sao cho  $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{CN}{CD} = \frac{1}{2}$ . Gọi  $G$  là trọng tâm  $\triangle MNB$ . Tính  $\overrightarrow{AN}$ ,  $\overrightarrow{AG}$  theo  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ . Gọi  $H$  là điểm xác định bởi  $\overrightarrow{BH} = k \cdot \overrightarrow{BC}$ . Tính  $\overrightarrow{AH}$  theo  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  và  $k$ . Tìm  $k$  để đường thẳng  $AH$  đi qua điểm  $G$ .

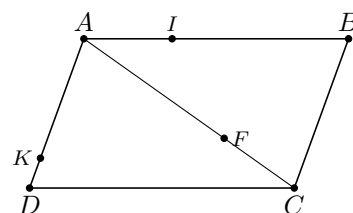
**Lời giải.**

a) Do  $\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AK} = \alpha\overrightarrow{AB} - \gamma\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{KF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AK} = \beta\overrightarrow{AC} - \gamma\overrightarrow{AD} = \beta(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \gamma\overrightarrow{AD}$ .

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{KF} = \beta\overrightarrow{AB} + (\beta - \gamma)\overrightarrow{AD}.$$

Mặt khác,  $I, F, K$  thẳng hàng khi và chỉ khi  $\overrightarrow{KI} = k\overrightarrow{KF}$ ,  $k \neq 0$ .

$$\text{Hay } \begin{cases} \alpha = k\beta \\ \gamma = -k(\beta - \gamma) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\alpha\gamma}{\beta} = \alpha + \gamma \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}.$$



b) Từ giả thiết suy ra  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}$ .

Ta có

$$\bullet \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

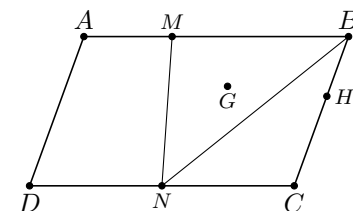
$$\bullet \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NG} = \overrightarrow{AN} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AN} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{5}{18}\overrightarrow{AB}.$$

$$\bullet \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}.$$

Để  $AH$  đi qua điểm  $G$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AH} = t\overrightarrow{AG}$ ,  $t \neq 0$  hay

$$(1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC} = t \left( \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{5}{18}\overrightarrow{AB} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-k = \frac{5}{18}t \\ k = \frac{t}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{6}{11} \\ t = \frac{11}{11} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } k = \frac{6}{11}.$$

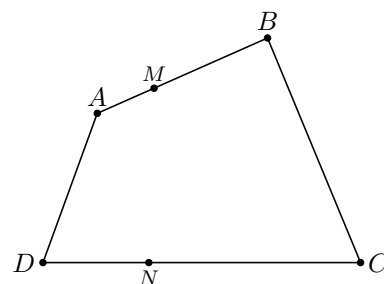


**Bài 26.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Lấy các điểm  $M, N$  theo thứ tự thuộc  $AB$  và  $CD$  sao cho  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DC}$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{MN} = (1-k)\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{BC}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = -k\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{DC} = -k(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{AD} + k(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}).$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MN} = (1-k)\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{BC}.$$



**Bài 27.** Cho  $\triangle ABC$ . Gọi  $O, H, G$  lần lượt theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm, trực tâm của  $\triangle ABC$ . Chứng minh rằng  $O, G, H$  thẳng hàng.

**Lời giải.**

Gọi  $P$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $O$  và  $M$  là trung điểm của  $BC$ .

Khi đó  $M$  là trung điểm của  $HP$  ( $BHCP$  là hình bình hành).

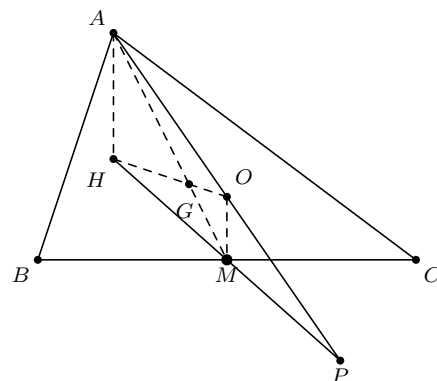
Mà  $OM \parallel AH$  nên  $AH = 2OM$ . Suy ra  $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$ .

Ta lại có  $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GH}$

Mà  $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OG} + 2\overrightarrow{GM}$ .

Suy ra  $\overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{OG}$ .

Suy ra  $H, G, O$  thẳng hàng.



**Bài 28.** Cho hình thang  $ABCD$  có đáy lớn là  $AB$ . Gọi  $M, N$  theo thứ tự là các trung điểm của  $AD$  và  $BC$ .

① Chứng minh rằng  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ .

② Chứng minh  $MN \parallel DC$ .

**Lời giải.**

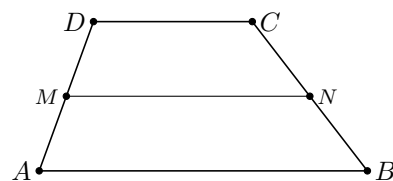
a) Ta có  $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ .

Suy ra  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ .

b) Do  $AB \parallel DC$  nên  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}, k > 0$ .

Suy ra  $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC} = (k+1)\overrightarrow{DC}, k+1 > 0$ .

Suy ra  $MN \parallel DC$ .



**Bài 29.** Cho  $\triangle ABC$  có trọng tâm  $G$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  và  $I$  là điểm thỏa mãn hệ thức  $4\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ . Chứng minh  $MI \parallel BG$ .

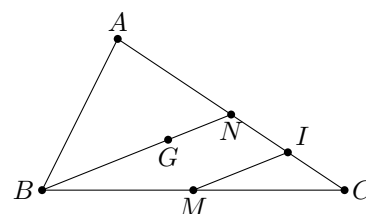
**Lời giải.**

Gọi  $N$  là trung điểm của  $AC$ . Ta có

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}).$$

$$\text{Có } \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}).$$

Vậy  $3\overrightarrow{BG} = 4\overrightarrow{MI}$  nên  $BG$  và  $MI$  cùng phương, suy ra  $BG \parallel MI$ .



**Bài 30.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $E$  và  $F$  lần lượt là trọng tâm của  $\triangle ABD$  và  $\triangle BCD$ . Chứng minh rằng  $EF \parallel AC$ .

**Lời giải.**

Gọi  $M$  là trung điểm của  $BD$ .

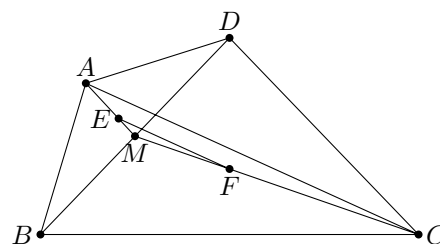
Vì  $E$  là trọng tâm của tam giác  $ABD$  nên theo tính chất trọng tâm ta có

$$ME = \frac{1}{3}MA.$$

Vì  $F$  là trọng tâm của tam giác  $BCD$  nên theo tính chất trọng tâm ta có

$$MF = \frac{1}{3}MC.$$

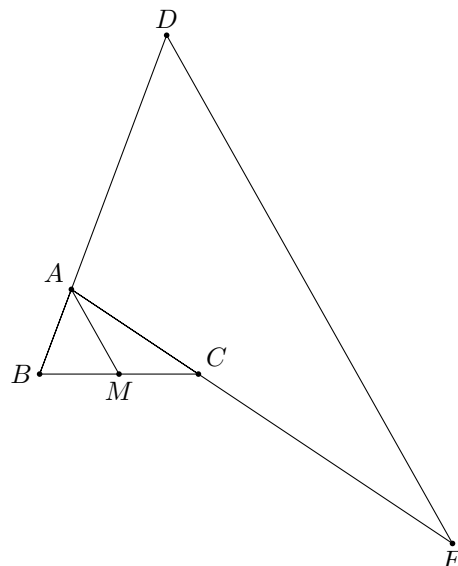
Vậy  $\frac{ME}{MA} = \frac{MF}{MC} = \frac{1}{3}$  nên theo định lý Ta-let đảo ta có  $EF \parallel AC$ .



**Bài 31.** Cho  $\triangle ABC$  có  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Các điểm  $D, E$  thỏa mãn các đẳng thức  $\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC}$ . Chứng minh rằng  $DE \parallel AM$ .

**Lời giải.**

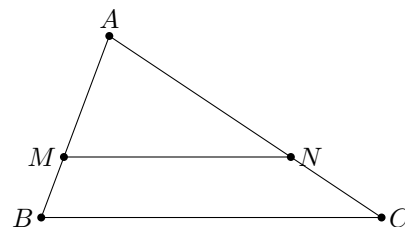
Theo quy tắc trung điểm ta có  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ .  
 Ta có:  $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ .  
 Vậy  $\overrightarrow{DE} = 6\overrightarrow{AM}$ . Suy ra  $DE \parallel AM$ .



**Bài 32.** Cho  $\triangle ABC$ . Dựng các điểm  $M, N$  sao cho  $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ . Chứng minh rằng  $MN \parallel BC$ .

**Lời giải.**

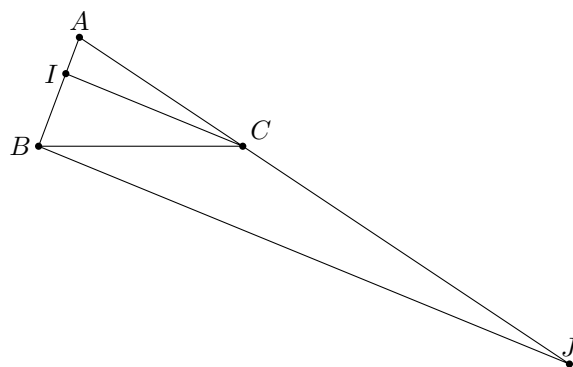
Theo định lý Ta-let đảo ta có  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{2}{3}$ , suy ra  $MN \parallel BC$ .



**Bài 33.** Cho  $\triangle ABC$ . Dựng các điểm  $I, J$  sao cho  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$ . Chứng minh  $IC \parallel BJ$ .

**Lời giải.**

Theo định lý Ta-let đảo ta có  $\frac{AI}{AB} = \frac{AC}{AJ} = \frac{1}{3}$ .  
 Suy ra  $IC \parallel BJ$ .



**Bài 34.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$ . Dựng các điểm  $E, F$  thỏa mãn  $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DI}$ ,  $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BJ}$ . Chứng minh  $AF \parallel CE$ .

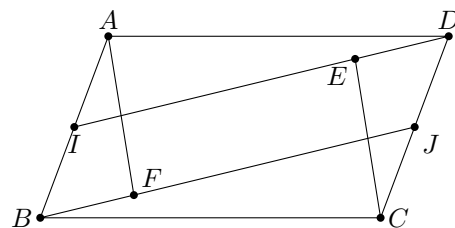
**Lời giải.**

Có  $BI$  song song và bằng  $DJ$  nên  $BIDJ$  là hình bình hành, suy ra  $DI$  song song và bằng  $BJ$ .

Ta có  $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BJ}$ .

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{ID} = -\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{ID}\right)$ .

Vậy  $\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{CE}$  nên  $AF$  song song với  $CE$ .



**Bài 35.** Cho  $\triangle ABC$ . Các điểm  $D, E, G$  được xác định bởi hệ thức  $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{CE}$ ,  $2\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GC}$ .

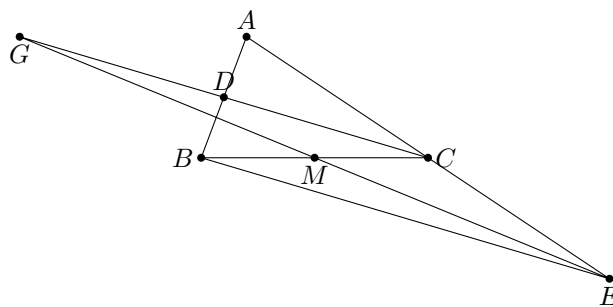
① Chứng minh  $BE \parallel CD$ .

② Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Chứng minh  $E, G, M$  thẳng hàng.

**Lời giải.**

① Ta có  $\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AE} = \frac{1}{2}$ , theo định lý Ta-let đảo suy ra  $DC \parallel BE$ .

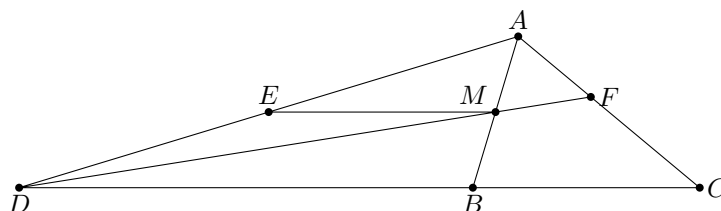
② Có  $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})$ .  
 $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$ .  
 Vậy  $\overrightarrow{GE} = 2\overrightarrow{GM}$ , suy ra ba điểm  $E, G, M$  thẳng hàng.



**Bài 36.** Cho  $\triangle ABC$ ,  $M$  là trung điểm của cạnh  $AB$  và  $D, E, F$  theo thứ tự được xác định bởi các hệ thức:  $3\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$ ,  $\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} - 2\overrightarrow{EC} = \vec{0}$ ,  $5\overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ .

- ① Chứng minh rằng  $EM \parallel BC$ .
- ② Chứng minh rằng ba điểm  $A, D, E$  thẳng hàng.
- ③ Chứng minh rằng ba đường thẳng  $AD, BC, MF$  đồng quy tại một điểm.

**Lời giải.**



① Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} - 2\overrightarrow{EC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EB} - 2\overrightarrow{EC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 2\overrightarrow{EM} &= 2\overrightarrow{BC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{EM} &= \overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

Vậy  $EM \parallel BC$ .

② Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} - 2\overrightarrow{EC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} &= 3\overrightarrow{EB} - 2\overrightarrow{EC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} &= 3\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{EA} - 2\overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AE} &= 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 3\overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{AC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} &= 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

Vậy  $2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD}$ , suy ra ba điểm  $A, D, E$  thẳng hàng.

- ③ Ta có  $AD$  và  $BC$  cắt nhau tại  $D$  nên để chứng minh ba đường thẳng  $AD, BC, MF$  đồng quy tại một điểm ta chỉ cần chứng minh  $MF$  cũng đi qua  $D$  hay ba điểm  $M, F, D$  thẳng hàng.  
 Theo giả thiết ta có

$$5\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AM} + 5\overrightarrow{MF} = 2\overrightarrow{AC} \\
 &\Leftrightarrow 5\overrightarrow{MF} = 2\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{AM} \\
 &\Leftrightarrow 5\overrightarrow{MF} = 2\overrightarrow{AC} - \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}.
 \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
 &\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} \\
 &\Leftrightarrow \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM} \\
 &\Leftrightarrow \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\
 &\Leftrightarrow \overrightarrow{MD} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}.
 \end{aligned}$$

Vậy  $5\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MD}$ , suy ra ba điểm  $M, F, D$  thẳng hàng.

### **D** CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN