



TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC



Nhị Thức

NEWTON

Special Edition

EBOOK ĐƯỢC LATEX VÀ PHÁT HÀNH MIỄN PHÍ



CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN

Nhi Thức

NEWTON

NHỊ THỨC NEWTON

THE BINOMIAL THEOREM

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

Ngày 10 tháng 12 năm 2019

Tóm tắt nội dung

Trong chương trình phổ thông lớp 11 chúng ta đã được làm quen với định lý nhị thức, hay ta hay gọi là công thức nhị thức Newton theo đó là các dạng bài tập cơ bản như tìm hệ số trong khai triển, chứng minh đẳng thức tổ hợp... Tuy nhiên đi theo công thức này là các dạng toán tương đối hay và khó mà các bạn không được tìm hiểu sâu, chính vì thế mà trong chuyên đề này, mình sẽ đề cập tới gần như là đầy đủ các dạng toán các bạn có thể gặp trong đề thi THPT Quốc Gia hay đề thi học sinh giỏi cấp tỉnh mà không chuyên, nhằm giúp các bạn có một cái nhìn bao quát nhất về chủ đề này. Để hoàn thành được bài viết này, không thể không nhắc tới sự trợ giúp và đóng góp từ bạn bè của mình, xin gửi lời cảm ơn tới

1. Bạn Doãn Quang Tiến - Đại Học KHTN TP.HCM.
2. Bạn Nguyễn Mai Hoàng Anh - Trường THPT Thực Hành Cao Nguyên - Đắk Lắk
3. Bạn Ngô Nguyên Quỳnh - Đại học Sư Phạm Quy Nhơn.
4. Thầy Trần Văn Dũng - Tư Duy Mới.

Trong bài viết có sử dụng tư liệu trong và ngoài nước, bạn đọc có thể xem ở phần cuối tài liệu. Mọi ý kiến đóng góp cũng như thắc mắc vui lòng gửi về

NGUYỄN MINH TUẤN

1. Email. tuangenk@gmail.com.
2. Facebook. fb.com/tuankhmt.fpt
3. Fanpage. fb.com/OlympiadMathematical/

1 Ký hiệu tổ hợp.

1.1 Hệ số nhị thức.

Hệ số nhị thức ký hiệu là $\binom{n}{k}$ là hệ số của x^k trong khai triển của nhị thức

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

Ta đọc $\binom{n}{k}$ là số tổ hợp n chập k (n choose k). Lưu ý rằng có một số quốc gia ở châu Á và trong đó có Việt Nam, các sách trên thị trường, cũng như trong các tài liệu thường ký hiệu là C_n^k , tuy nhiên trong tài liệu này mình sẽ viết theo quy ước quốc tế là $\binom{n}{k}$.

1.2 Công thức tổ hợp.

Trong Toán học, tổ hợp là cách chọn những phần tử từ một nhóm lớn hơn mà không phân biệt thứ tự. Trong những trường hợp nhỏ hơn có thể đếm được số tổ hợp. Ví dụ cho ba loại quả, một quả táo, một quả cam và một quả lê, có ba cách kết hợp hai loại quả từ tập hợp này: một quả táo và một quả lê; một quả táo và một quả cam; một quả lê và một quả cam. Theo định nghĩa, tổ hợp chập k của n phần tử là một tập con của tập hợp mẹ S chứa n phần tử, tập con gồm k phần tử riêng biệt thuộc S và không sắp thứ tự. Số tổ hợp chập k của n phần tử bằng với hệ số nhị thức. Ta có

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

trong đó $k \leq n$, nếu $k > n$ thì kết quả bằng 0. Chú ý ở đây $n! = 1.2 \dots n$ và quy ước $0! = 1$.

2 Tam giác Pascal và sự hình thành của công thức nhị thức Newton.

2.1 Sự hình thành của công thức nhị thức.

Các trường hợp đặc biệt của định lý nhị thức đã được biết đến từ ít nhất là vào thế kỷ thứ 4 trước Công nguyên khi nhà toán học Hy Lạp Euclid đã đề cập đến trường hợp đặc biệt của định lý nhị thức cho số mũ 2. Các hệ số nhị thức, như các đại lượng tổ hợp biểu thị số cách chọn k đối tượng trong số n mà không thay thế, được các nhà toán học Ấn Độ cổ đại quan tâm. Tài liệu tham khảo sớm nhất về vấn đề kết hợp này là Chandahsastra, một nhà thơ trữ tình Ấn Độ Pingala (khoảng năm 200 trước Công nguyên), trong đó có đề cập tới một phương pháp giải quyết vấn đề này. Nhà bình luận Halayudha từ thế kỷ thứ 10 sau Công nguyên giải thích phương pháp này bằng cách sử dụng công cụ đó là tam giác của Pascal. Vào thế kỷ thứ 6 sau Công nguyên, các nhà toán học Ấn Độ đã biểu thị giá trị của hệ số nhị thức này theo công thức $\frac{n!}{(nk)!k!}$, điều này được đưa ra trong tài liệu Lilavati của Bhaskara vào thế kỷ thứ 12.

Công thức đầu tiên của định lý nhị thức và bảng các hệ số nhị thức, có thể được tìm thấy trong một tác phẩm của Al-Karaji, được nhà toán học Al-Samaw'al trích dẫn trong tác phẩm "al-Bahir" của ông. Al-Karaji đã mô tả mô hình tam giác của các hệ số nhị thức và đưa ra lời chứng minh cho định lý nhị thức và tam giác Pascal bằng phương pháp quy nạp toán học. Khai triển nhị thức với đa thức có bậc nhỏ được biết đến trong các công trình toán học của thế kỷ 13 của 2 nhà toán học Trung Quốc là Yang Hui và Chu Shih-Chieh. Năm 1544, Michael Stifel đã giới thiệu thuật ngữ "hệ số nhị thức" và chỉ ra cách sử dụng chúng để biểu diễn $(1+a)^n(1+a)^n$ thông qua $(1+a)^{n-1}(1+a)^{n-1}$ bằng cách sử dụng "tam giác Pascal". Tuy có rất nhiều nhà toán học nghiên cứu ra định lý nhị thức, nhưng nó vẫn mang tên của Newton vì ý tưởng của Newton không dừng lại ở việc áp dụng công thức này cho trường hợp các số mũ là số nguyên dương mà cho số mũ bất kì: số dương, số âm, số nguyên và phân số. Chính ý tưởng mới đó cho một ý nghĩa lớn lao đối với việc phát triển của toán học. Các nhà toán học đương thời thấy ngay tầm quan trọng của công thức và công thức được áp dụng rộng rãi trong nhiều công trình nghiên cứu toán học, đặc biệt trong đại số và giải tích. Nhân đây cũng phải nói thêm rằng công thức nhị thức Newton không phải là sự đóng góp lớn nhất của Newton cho toán học. Newton đã đóng góp rất nhiều cho việc mở đầu những hướng toán học cao cấp, đó là các phép tính đối với các đại lượng vô cùng bé. Và do vậy đôi lúc Newton được coi là người sáng lập ra ngành Giải tích toán học.

2.2 Câu chuyện về nhị thức Newton.

Để ghi nhớ công lao của Isaac Newton (1642 – 1727) trong việc tìm ra công thức khai triển nhị thức sau, được gọi là nhị thức Newton.

$$(x+1)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots 3.2.1}{m!}x^m \quad (1)$$

Trên bia mộ của Newton tại tu viện Wesminster (là nơi an nghỉ của Hoàng gia và những người nổi tiếng của nước Anh) người ta còn khắc họa hình Newton cùng với cả nhị thức Newton. Vậy có phải chẳng loài người đã không hề biết gì về công thức khai triển nhị thức trước khi có phát minh của nhà bác học vĩ đại này? Theo các văn bản còn lưu giữ được từ rất lâu trước Newton, ngay từ 200 năm trước Công nguyên các nhà toán học Ấn Độ đã quen biết với một bảng tam giác số học. Trong tác phẩm của nhà toán học Trung Quốc Chu Sinh viết từ năm 1303 người ta tìm thấy bảng số sau

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\ & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\ & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\ 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 \end{array}$$

Rõ ràng đó là các hệ số của công thức khai triển nhị thức Newton từ cấp 0 đến cấp 8, dù nhà toán học này đã không nói gì cho các hệ số tiếp theo cùng công thức tổng quát của chúng, nhưng theo cách thức lập bảng của ông, ta có thể dễ dàng tìm ra quy luật cho phép viết được các hàng mới.

Vào nửa đầu thế kỉ XV trong tác phẩm chìa khóa số học viết bằng tiếng Ả rập của nhà toán học, thiên văn học Xamacan có tên là Giem Xit-Giaxedin Casi người ta lại gặp tam giác số học mà tác giả đã gọi tên rõ hơn là các hệ số nhị thức cùng với những chỉ dẫn cách thành lập các hàng kế tiếp của nhị thức. Với lối chỉ dẫn (không chứng minh) đó Casi đã cho ta khả năng khai triển nhị thức ở một cấp bất kì. Có thể coi đó là sự phát biểu bằng văn đầu tiên trong lịch sử của định lí về nhị thức Newton. Ở châu Âu, tam giác số học được tìm thấy đầu tiên trong công trình của nhà toán học người Đức Stiffel M. Công bố vào năm 1544. Trong công trình này cũng đã chỉ dẫn ra các hệ số của nhị thức cho đến cấp 17.

Gần một trăm năm sau, hoàn toàn độc lập với nhau, Các nhà toán học người Anh Bô-rit-gôn (1624), nhà toán học Pháp Fermat (1636) rồi nhà toán học Pháp Pascal (1654) đã đưa ra công thức hoàn hảo về hệ số của nhị thức Newton. Đặc biệt trong công trình mang tên Luận văn về tam giác số học công bố vào năm 1665, Pascal đã trình bày khá chi tiết về tính chất của các hệ số trong tam giác số học và từ đó tam giác số học được sử dụng một cách rộng rãi và tên tam giác Pascal ra đời thay cho tam giác số học. Rõ ràng mà nói về mặt lịch sử thì tam giác số học đã được các nhà toán học Á đông xét đến trước Pascal rất nhiều.

Vậy vai trò của Newton ở đâu trong quá trình hình thành công thức nhị thức Newton ? Năm 1676 trong bức thư thứ nhất gửi Ô-đen Hiario – Chủ tịch Viện Hàn Lâm hoàng gia Anh, Newton đã đưa công thức (1) mà không dẫn giải cách chứng minh. Sau đó ít lâu trong bức thư thứ hai gửi đến Viện Hàn Lâm, Newton đã trình bày rõ ràng bằng cách nào ông đi đến công thức đó. Thì ra bằng cách này Newton đã tìm ra công thức Newton từ năm 1665 khi mà ông chỉ mới 22 tuổi. Nhưng dù vậy thì việc đưa trình công thức của mình Newton cũng không nói được điều gì mới cho các nhà toán học đương thời.

2.3 Tam giác Pascal.

Trong toán học, tam giác Pascal là một mảng tam giác của các hệ số nhị thức. Trong phần lớn thế giới phương Tây, nó được đặt theo tên nhà toán học người Pháp Blaise Pascal, mặc dù các nhà toán học khác đã nghiên cứu nó hàng thế kỷ trước Pascal ở Ấn Độ, Ba Tư (Iran), Trung Quốc, Đức và Ý.

Các hàng của tam giác Pascal được liệt kê theo quy ước bắt đầu bằng hàng $n = 0$ ở trên cùng (hàng 0). Các mục trong mỗi hàng được đánh số từ đầu bên trái với $k = 0$ và thường được đặt so le so với các số trong các hàng liền kề. Tam giác có thể được xây dựng theo cách sau. Trong hàng 0 (hàng trên cùng), có một số 1 duy nhất. Mỗi số của mỗi hàng tiếp theo được xây dựng bằng cách thêm số ở trên và bên trái với số ở trên và sang bên phải, coi các mục trống là 0. Ví dụ số ban đầu trong hàng đầu tiên (hoặc bất kỳ số nào khác) là 1 (tổng của 0 và 1), trong khi các số 1 và 3 trong hàng thứ ba được thêm vào để tạo ra số 4 ở hàng thứ tư. Hay ta có thể hiểu đơn giản là

- Ở hàng đầu tiên, chúng ta viết một con số 1.
- Ở hàng tiếp theo, chúng ta viết hai con số 1.
- Tiếp tục các hàng tiếp theo,
 1. con số đầu tiên và con số cuối cùng bao giờ cũng là 1;
 2. còn mỗi con số ở bên trong thì bằng tổng của hai con số đứng ngay ở hàng phía trên.

Ví dụ. $1 + 1 = 2, 1 + 2 = 3, 2 + 1 = 3, 1 + 3 = 4, 3 + 3 = 6, 3 + 1 = 4.$

Ta có sơ đồ sau.

$$\begin{array}{ccccccc}
 n = 0 & & & & & & 1 \\
 n = 1 & & & & 1 & 1 & \\
 n = 2 & & & 1 & 2 & 1 & \\
 n = 3 & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 n = 4 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 n = 5 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
 \end{array}$$

Nhận xét.

- i) Xét hàng thứ nhất, ta có $1 = \binom{1}{0}, 1 = \binom{1}{1}.$

ii) Ở hàng thứ 2, ta có $1 = \binom{3}{0}, 2 = \binom{2}{1}, 1 = \binom{2}{2}$.

iii) Ở hàng thứ 3, ta có $1 = \binom{3}{0}, 3 = \binom{3}{1}, 3 = \binom{3}{2}, 1 = \binom{3}{3}$.

Như vậy các số ở hàng thứ n trong tam giác Pascal là dãy gồm $(n+1)$ số

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}.$$

Chúng ta dùng tam giác số Pascal để khai triển các biểu thức $(x+y)^n$ và $(x-y)^n$ như sau.

Khai triển $(x+y)^n$.

$$\begin{array}{rcl} 1 & \rightarrow & (x+y)^0 = 1 \\ 1 & 1 & \rightarrow (x+y)^1 = x+y \\ 1 & 2 & 1 \rightarrow (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \rightarrow (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \rightarrow (x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \rightarrow (x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 \end{array}$$

Khai triển $(x-y)^n$.

$$\begin{array}{rcl} 1 & \rightarrow & (x-y)^0 = 1 \\ 1 & 1 & \rightarrow (x-y)^1 = x-y \\ 1 & 2 & 1 \rightarrow (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \rightarrow (x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \rightarrow (x-y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \rightarrow (x-y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5 \end{array}$$

Chúng ta đánh số mỗi hàng của tam giác Pascal theo thứ tự bắt đầu là hàng số 0, tiếp đến là hàng số 1, hàng số 2, v.v... Còn trên mỗi hàng, chúng ta sắp xếp thứ tự các con số bắt đầu là con số thứ 0, tiếp đến là con số thứ 1, rồi con số thứ 2, v.v... Chúng ta sẽ gọi con số thứ k ở hàng thứ n là $p_{n,k}$. Từ đó suy ra công thức để xây dựng tam giác Pascal là

$$p_{n-1,k-1} + p_{n-1,k} = p_{n,k}.$$

Ta có sơ đồ.

$$\begin{array}{rcl} \text{Hàng thứ 0} & \rightarrow & 1 \\ \text{Hàng thứ 1} & \rightarrow & 1 \quad 1 \\ \text{Hàng thứ 2} & \rightarrow & 1 \quad 2 \quad 1 \\ \text{Hàng thứ 3} & \rightarrow & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ \text{Hàng thứ 4} & \rightarrow & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ \text{Hàng thứ 5} & \rightarrow & 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \end{array}$$

Từ đó ta có công thức tổng quát $p_{n,k}$ là $p_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Ví dụ $p_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 3} = 10$.

Ngoài ra từ công thức xây dựng tam giác Pascal, ta có công thức sau

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Công thức người ta gọi nó theo tên của nhà toán học Pascal - *Công thức Pascal*.

2.4 Chứng minh công thức tổng quát $p_{n,k}$ và công thức nhị thức Newton.

Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo biến số n công thức sau đây

$$p_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Với $n = 0$, chúng ta có $p_{0,0} = 1 = \frac{0!}{0!0!}$, như vậy công thức đúng với trường hợp $n = 0$. Chúng ta lưu ý rằng $0!$ bằng 1 chứ không phải bằng 0. Giả sử công thức đúng với các trường hợp $0 \leq n \leq N$. Bây giờ ta sẽ chứng minh công thức cũng đúng với trường hợp $n = N + 1$.

Thật vậy, với trường hợp $k = 0$ hoặc $k = N + 1$ thì khi đó ta có

$$p_{N+1,0} = p_{N+1,N+1} = 1 = \frac{(N+1)!}{0!(N+1)!} = \binom{N+1}{0} = \binom{N+1}{N+1}$$

Với trường hợp $1 \leq k \leq N$ ta có $p_{N+1,k} = p_{N,k-1} + p_{N,k}$. Theo giả thiết quy nạp thì công thức đúng với trường hợp $n = N$, do vậy mà

$$p_{N,k-1} = \binom{N}{k-1} = \frac{N!}{(k-1)!(N-k+1)!}, p_{N,k} = \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

Từ đó suy ra được

$$\begin{aligned} p_{N+1,k} &= p_{N,k-1} + p_{N,k} = \frac{N!}{(k-1)!(N-k+1)!} + \frac{N!}{k!(N-k)!} \\ &= \frac{N!k}{k!(N-k+1)!} + \frac{N!(N-k+1)}{k!(N-k+1)!} \\ &= \frac{N!(N+1)}{k!(N-k+1)!} = \frac{(N+1)!}{k!(N-k+1)!} = \binom{N+1}{k} \end{aligned}$$

Như vậy chúng ta đã chứng minh công thức đúng cho trường hợp $n = N + 1$. Tóm lại, theo nguyên lý quy nạp thì chúng ta đã chứng minh được công thức cho các hệ số trong tam giác Pascal là

$$p_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2.5 Chứng minh công thức nhị thức Newton.

Chứng minh. Bây giờ chúng ta dùng quy nạp để chứng minh định lý khai triển nhị thức Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n} b^n.$$

Với $n = 0$ hoặc $n = 1$ thì hiển nhiên ta có điều phải chứng minh. Giả sử công thức đúng trong trường hợp $0 \leq n \leq N$, với $N \geq 1$, bây giờ ta sẽ đi chứng minh nó đúng trong trường hợp $n = N + 1$.

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} (x+y)^{N+1} &= (x+y)(x+y)^N \\ &= (x+y)(x^N + p_{N,1}x^{N-1}y + p_{N,2}x^{N-2}y^2 + \dots + p_{N,N-2}x^2y^{N-2} + p_{N,N-1}xy^{N-1} + y^N) \\ &= x^{N+1} + p_{N,1}x^N y + p_{N,2}x^{N-1}y^2 + \dots + p_{N,N-2}x^3y^{N-2} + p_{N,N-1}x^2y^{N-1} + xy^N \\ &\quad + x^N y + p_{N,1}x^{N-1}y^2 + p_{N,2}x^{N-2}y^3 + \dots + p_{N,N-2}x^2y^{N-1} + p_{N,N-1}xy^N + y^{N+1} \end{aligned}$$

Để ý rằng theo công thức xây dựng tam giác Pascal thì ta có

$$p_{N,1} + 1 = p_{N+1,1}, p_{N,2} + p_{N,1} = p_{N+1,2}, \dots, p_{N,N-1} + p_{N,N-2} = p_{N+1,N-1}, 1 + p_{N,N-1} = p_{N+1,N},$$

từ đó suy ra

$$(x+y)^{N+1} = x^{N+1} + p_{N+1,1}x^N y + p_{N+1,2}x^{N-1}y^2 + \dots + p_{N+1,N-1}x^2y^{N-1} + p_{N+1,N}xy^N + y^{N+1}$$

Vậy chúng ta đã chứng minh công thức đúng cho trường hợp $n = N + 1$. Theo nguyên lý quy nạp thì chúng ta đã chứng minh xong định lý khai triển nhị thức Newton.

$$\begin{aligned} (x+y)^n &= x^n + p_{n,1}x^{n-1}y + p_{n,2}x^{n-2}y^2 + \dots + p_{n,n-2}x^2y^{n-2} + p_{n,n-1}xy^{n-1} + y^n \\ &= x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n-2}x^2y^{n-2} + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + y^n \end{aligned}$$

Hoặc ta có lời giải cũng sử dụng tam giác Pascal nhưng nhìn tường minh hơn như sau.

Lời giải 2. Sử dụng phương pháp quy nạp, ta thấy rằng $n = 0, 1, 2$ thì đẳng thức đúng, ta giả sử đẳng thức đúng với $n - 1$ tức là

$$(x + y)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n-1-i} y^i.$$

Khi đó thì

$$(x + y)^n = (x + y)(x + y)^{n-1} = (x + y) \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n-1-i} y^i.$$

Sử dụng tính chất phân phối, ta được

$$x \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n-1-i} y^i + y \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n-1-i} y^i = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n-i} y^i + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n-1-i} y^{i+1}.$$

Bây giờ ta biến đổi một chút để đưa về một tổng, ta được

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n-i} y^i + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n-1-i} y^{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n-i} y^i + \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} x^{n-i} y^i \\ &= \binom{n-1}{0} x^n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n-i} y^i + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} x^{n-i} y^i + \binom{n-1}{n-1} y^n \\ &= \binom{n-1}{0} x^n + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right) x^{n-i} y^i + \binom{n-1}{n-1} y^n. \end{aligned}$$

Khi đó sử dụng công thức Pascal ta được

$$\begin{aligned} & \binom{n-1}{0} x^n + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right) x^{n-i} y^i + \binom{n-1}{n-1} y^n \\ &= \binom{n-1}{0} x^n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i + \binom{n-1}{n-1} y^n \\ &= \binom{n}{0} x^n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i + \binom{n}{n} y^n \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i. \end{aligned}$$

Chú ý rằng ở bước tiếp theo, ta đã sử dụng công thức $\binom{n-1}{0} = \binom{n}{0}$ và $\binom{n-1}{n-1} = \binom{n}{n}$.

Như vậy định lý được chứng minh. □

3 Một số tính chất cơ bản.

3.1 Nhắc lại khai triển nhị thức Newton.

Trước tiên ta sẽ có công thức khai triển nhị thức Newton được phát biểu như sau.

ĐỊNH LÝ.

(3.1)

Với a, b là các số thực và n là số nguyên dương, ta có

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n} b^n. \quad (1)$$

Quy ước $a^0 = b^0 = 1$. Công thức trên được gọi là công thức nhị thức Newton.

Trong biểu thức ở vế phải của công thức (1) ta có

- Số các hạng tử là $n + 1$.
- Số các hạng tử có số mũ của a giảm dần từ n đến 0, số mũ của b tăng dần từ 0 đến n , nhưng tổng các số mũ của a và b trong mỗi hạng tử luôn bằng n .
- Các hệ số của mỗi hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối thì bằng nhau.

HỆ QUẢ.

- Với $a = b = 1$, thì ta có $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$.
- Với $a = 1; b = -1$, ta có $0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^k \binom{n}{k} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$.

CÁC CÔNG THỨC CƠ BẢN LIÊN QUAN TỚI KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NEWTON.

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, (n \geq 1)$.
- $k \cdot \binom{n}{k} = \frac{k \cdot n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = n \binom{n-1}{k-1}$.
- $\frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{k \cdot n!}{(k+1)(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)!}{(n+1)(n-k)!(k+1)!} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}$.

NGOÀI RA TA CÒN CÓ MỘT SỐ CÔNG THỨC KHÁC NHƯ SAU.

- $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$.
- $2^{n-1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} \dots + \binom{n}{2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.
- $2^{n-1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} \dots + \binom{n}{2 \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1}$.

Ngoài ra từ công thức $k \cdot \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ ta mở rộng được 2 công thức sau.

- $\binom{n}{k} + 2 \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2}$.
- $\binom{n}{k} + 3 \binom{n}{k+1} + 3 \binom{n}{k+2} + \binom{n}{k+3} = \binom{n+3}{k+3}$.

3.2 Dấu hiệu các bài toán sử dụng nhị thức Newton trong các bài toán chứng minh đẳng thức.

Sau đây là một số dấu hiệu giúp ta nhận biết được các dạng toán trong phần này, các dạng toán này sẽ được hướng dẫn kỹ hơn ở phần sau. Một số dấu hiệu là

+ Khi cần chứng minh đẳng thức hay bất đẳng thức mà có $\sum_{i=1}^n \binom{n}{i}$ với i là số tự nhiên liên tiếp.

+ Trong biểu thức có $\sum_{i=1}^n i(i-1) \binom{n}{i}$ thì ta dùng đạo hàm ($i \in \mathbb{N}$), ngoài ra nếu

- Trong biểu thức có $\sum_{i=1}^n (i+k) \binom{n}{i}$ thì ta nhân 2 vế với x^k rồi lấy đạo hàm.
- Trong biểu thức có $\sum_{i=1}^n a^k \binom{n}{i}$ thì ta chọn giá trị của $x = a$ thích hợp.

- Trong biểu thức có $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i-1} \binom{n}{i}$ thì ta lấy tích phân xác định trên $[a; b]$ thích hợp.
- Nếu bài toán cho khai triển

$$(x^a + x^b)^n = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (x^a)^{n-i} (x^b)^i = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} x^{a(n-i)+ib}$$

thì hệ số của x^m là $\binom{n}{i}$ sao cho phương trình $a(n-i) + bi = m$ có nghiệm $i \in \mathbb{N}$.

- $\binom{n}{i}$ đạt giá trị lớn nhất khi $i = \frac{n-1}{2}$ hay $i = \frac{n+1}{2}$ với n lẻ, $i = \frac{n}{2}$ với n chẵn.

Như vậy ta đã tìm hiểu được các dấu hiệu nhận biết khi nào thì ta sử dụng đến công thức Nhị thức Newton, sau đây chúng ta sẽ đi giải quyết các dạng bài tập của phần này.

4 Các dạng toán liên quan tới nhị thức newton.

4.1 Bài toán khai triển nhị thức và chứng minh đẳng thức cơ bản.

Đầu tiên ta sẽ đi tìm hiểu một thuật toán khai triển nhanh tam thức Newton $(a + b + c)^n$ như sau.

CÁC BƯỚC THỰC HIỆN.

- **Bước 1.** Viết tam giác Pascal đến dòng thứ n , để có được hệ số của nhị thức Newton $(b + c)^n$.
- **Bước 2.** Ở các đầu dòng ta viết các đơn thức là khai triển nhị thức Newton $(a + 1)^n$.
- **Bước 3.** Nhân lần lượt các đơn thức ở đầu dòng mỗi cột với các đơn thức còn lại trên mỗi dòng đó rồi cộng các kết quả lại, ta thu được kết quả khai triển.

Cụ thể ta có ở dưới đây

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1.a^n & & & & 1 \\
 & & \binom{n}{1}.a^{n-1} & & & & 1b \quad 1c \\
 & & \binom{n}{2}.a^{n-2} & & & & 1b^2 \quad 2bc \quad 1c^2 \\
 & & \binom{n}{3}.a^{n-3} & & & & 1b^3 \quad 3b^2c \quad 3bc^2 \quad 1c^3 \\
 & & & & & & \dots \\
 1.a^0 & 1.b^n & \binom{n}{1}.b^{n-1}.c & \dots & \binom{n}{n-1}.b.c^{n-1} & 1.c^n
 \end{array}$$

Sau khi cộng lại ta được

$$(a + b + c)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p}.a^{n-p} \cdot \left(\sum_{q=0}^p \binom{p}{q}.b^{p-q}.c^q \right) = \sum_{0 \leq q \leq p \leq n} \binom{n}{p} \cdot \binom{p}{q}.b^{p-q}.c^q.a^{n-p}$$

Sau khi khai triển $(a + b + c)^n$ với $0 \leq q \leq p \leq n$ số hạng thứ $p + 1$ trong khai triển là

$$T_p = \binom{n}{p} \cdot \binom{p}{q}.b^{p-q}.c^q.a^{n-p}$$

Bây giờ ta sẽ cùng đi tìm hiểu các ví dụ minh họa.

BÀI 1.

Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển $P(x) = (3x^2 + x + 1)^{10}$.

Chứng minh. Với $0 \leq q \leq p \leq 10$ thì số hạng tổng quát của khai triển $P(x) = (3x^2 + x + 1)^{10}$ là

$$T_p = \binom{10}{p} \cdot \binom{p}{q} \cdot (3x^2)^{10-p} \cdot x^{p-q} \cdot 1^q = \binom{10}{p} \cdot \binom{p}{q} \cdot 3^{10-p} \cdot x^{p-q+20-2p}$$

Theo đề bài thì ta có $p - q + 20 - 2p = 4 \Leftrightarrow p + q = 16$. Do $0 \leq q \leq p \leq 10$ nên

$$(p; q) \in \{(8; 8); (9; 7); (10; 6)\}$$

Vậy hệ số của x^4 trong khai triển $P(x) = (3x^2 + x + 1)^{10}$ là

$$\binom{10}{8} \cdot \binom{8}{8} \cdot 3^{10-8} + \binom{10}{9} \cdot \binom{9}{7} \cdot 3^{10-9} + \binom{10}{10} \cdot \binom{10}{6} \cdot 3^{10-10} = 1695$$

Bài toán được giải quyết. □



Chú ý khi ra nhiều trường hợp của $(p; q)$ thì ta cộng hệ số các trường hợp với nhau để có kết quả.

BÀI 2.

Tìm số hạng chứa x^{13} trong khai triển thành các đa thức của $(x + x^2 + x^3)^{10}$?

Chứng minh. Với $0 \leq q \leq p \leq 10$ thì số hạng tổng quát của khai triển $(x + x^2 + x^3)^{10}$ là

$$T_p = \binom{10}{p} \cdot \binom{p}{q} \cdot x^{10-p} \cdot (x^2)^{p-q} \cdot (x^3)^q = \binom{10}{p} \cdot \binom{p}{q} \cdot 3^{10-p} \cdot x^{10+p+q}$$

Theo đề bài thì $10 + p + q = 13 \Leftrightarrow p + q = 3$, do $0 \leq q \leq p \leq 10$ nên $(p; q) \in \{(2; 1); (3; 0)\}$.

Vậy hệ số của x^{13} trong khai triển là $\binom{10}{2} \cdot \binom{2}{1} + \binom{10}{3} \cdot \binom{3}{0} = 210$. □

BÀI 3.

Tìm hệ số của x^8 trong khai triển đa thức của $[1 + x^2(1 - x)^8]$.

Chứng minh. Cách 1. Ta có

$$f(x) = \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} [x^2(1-x)]^k = \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} x^{2k} \left[\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} x^i \right]^k.$$

Vậy ta có hệ số của x^8 là $(-1)^i \binom{8}{k} \binom{k}{i}$ thoả mãn

$$\begin{cases} 0 \leq i \leq k \leq 8 \\ 2k + i = 8 \\ i, k \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = 0 \\ k = 4 \\ i = 2 \\ k = 3 \end{cases}$$

Như vậy hệ số trong khai triển của x^8 là

$$(-1)^0 \binom{8}{4} \binom{4}{0} + (-1)^2 \binom{8}{3} \binom{3}{2} = 238$$

Cách 2. Ta có

$$f(x) = \binom{8}{0} + \dots + \binom{8}{3} [x^2(1-x)]^3 + \binom{8}{4} [x^2(1-x)]^4 + \dots + \binom{8}{8} [x^2(1-x)]^8$$

Ta nhận thấy rằng x^8 chỉ có trong các số hạng

1. Số hạng thứ 4 $\binom{8}{3} [x^2(1-x)]^3$.

2. Số hạng thứ 5 $\binom{8}{4} [x^2(1-x)]^4$.

Với hệ số tương đương với $A_8 = \binom{8}{3} \binom{3}{2} + \binom{8}{4} \binom{4}{0} = 238$. □

BÀI 4.

Với n là số nguyên dương và $x \neq 0$, xét biểu thức $\left(x^8 + x^3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^7}\right)^n$. Hỏi có bao nhiêu số $n \leq 2018$ sao cho khai triển của biểu thức trên có số hạng tự do là 0?

Chứng minh. Ta có

$$\left(x^8 + x^3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^7}\right)^n = \left(1 + x^5\right)^n \left(x^3 + \frac{1}{x^7}\right)^n$$

Do vậy số hạng tổng quát của khai triển trên là

$$T = \binom{n}{k} x^{5k} \cdot \binom{n}{h} x^{3n-10h} = \binom{n}{k} \binom{n}{h} x^{3n+5k-10h}$$

Số hạng này là số hạng tự do khi $3n + 5k - 10h = 0 \Leftrightarrow 3n = 5(2h - k)$.

Nếu n không chia hết cho 5 thì khai triển sẽ không chứa số hạng tự do, tức là số hạng tự do là 0. Còn khi n chia hết cho 5 thì khi $h = \frac{2n}{5}, k = \frac{n}{5}$, số hạng tự do sẽ là $\binom{n}{k} \binom{n}{h} \neq 0$, không thỏa mãn. $\square$

BÀI 5.

Cho khai triển $(1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}$, với $n \geq 2$ và $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ là các hệ số. Biết rằng $\frac{a_3}{14} = \frac{a_4}{41}$, khi đó tính tổng $S = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}$?

Chứng minh. Đầu tiên ta có

$$(1 + x + x^2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x + x^2)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} x^{k-l} \cdot x^{2l}$$

Hệ số của x^3 là

$$x^{k+l} = x^3 \Rightarrow k+l=3 \Rightarrow \begin{cases} l=0; k=3 \\ l=1; k=2 \end{cases} \Rightarrow a_3 = \binom{n}{3} \binom{3}{0} + \binom{n}{2} \binom{2}{1}$$

Tương tự như vậy, ta có hệ số của x^4 là

$$x^{k+l} = x^4 \Rightarrow k+l=4 \Rightarrow \begin{cases} l=0; k=4 \\ l=1; k=3 \\ l=2; k=2 \end{cases} \Rightarrow a_4 = \binom{n}{4} \binom{4}{0} + \binom{n}{3} \binom{3}{1} + \binom{n}{2} \binom{2}{2}$$

Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} 14a_4 &= 41a_3 \Leftrightarrow 14 \left(\binom{n}{4} \binom{4}{0} + \binom{n}{3} \binom{3}{1} + \binom{n}{2} \binom{2}{2} \right) = 41 \left(\binom{n}{3} \binom{3}{0} + \binom{n}{2} \binom{2}{1} \right) \\ &\Leftrightarrow 14 \left(\frac{n!}{4!(n-4)!} + \frac{3 \cdot n!}{3!(n-3)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} \right) = 41 \left(\frac{n!}{3!(n-3)!} + \frac{2 \cdot n!}{2!(n-2)!} \right) \\ &\Leftrightarrow n(n-1) \left(\frac{14}{24}n^2 - \frac{11}{4}n - \frac{185}{6} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n=1 \\ n=10 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{aligned}$$

Do $n \geq 2$ nên $n = 10$, mặt khác thay $x = 1$ vào hai vế của khai triển

$$(1 + x + x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{20}x^{20}$$

ta được $S = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = 3^{10}$.

Đến đây bài toán đã được giải quyết. $\square$

BÀI 6.

Biết tổng các hệ số của ba số hạng đầu trong khai triển Newton

$$\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (x^2)^{n-k} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^k$$

Bảng 49. Khi đó tính hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển đó?

Chứng minh. Ta có

$$\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (x^2)^{n-k} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 2^k x^{2n-3k}$$

Tổng các hệ số của ba số hạng đầu trong khai triển bằng 49 nên

$$\binom{n}{0} - 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} = 49 \quad (*)$$

Điều kiện $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$. khi đó (*) tương đương với

$$\begin{aligned} 1 - 2n + 2^2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} &= 49 \Leftrightarrow 2n^2 - 4n - 48 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} n = -4 (L) \\ n = 6 (N) \end{cases} \end{aligned}$$

Với $n = 6$ ta có nhị thức $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^6$. số hạng tổng quát của khai triển là

$$\binom{6}{k} (-1)^k 2^k x^{12-3k} \quad (k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 6)$$

Số hạng chứa x^3 ứng với k thỏa mãn $12 - 3k = 3 \Leftrightarrow k = 3$, thỏa mãn.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển là $\binom{6}{3} (-1)^3 2^3 = -160$. □

BÀI 7.

Giả sử $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10})^{11} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{110}x^{110}$ với $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{110}$ là các hệ số. Tính tổng

$$T = \binom{11}{0}a_{11} - \binom{11}{1}a_{10} + \binom{11}{2}a_9 - \binom{11}{3}a_8 + \dots + \binom{11}{10}a_1 - \binom{11}{11}a_0$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} A &= (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10})^{11} \Leftrightarrow (1 - x)^{11}A = (1 - x^{11})^{11} \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} (-x)^k}_{P} \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{110} a_i x^i}_{Q} = \sum_{m=0}^{11} \binom{11}{m} (-x^{11})^m \end{aligned}$$

Hệ số của x^{11} trong P là

$$\binom{11}{0}a_{11} - \binom{11}{1}a_{10} + \binom{11}{2}a_9 - \binom{11}{3}a_8 + \dots + \binom{11}{10}a_1 - \binom{11}{11}a_0 = T$$

Hệ số của x^{11} trong Q là $-\binom{11}{1}$.

Vậy $T = -\binom{11}{1} = -11$. □

BÀI 8.

Cho khai triển $T = (1 + x - x^{2017})^{2018} + (1 - x + x^{2018})^{2017}$. Hệ số của số hạng chứa x trong khai triển bằng bao nhiêu?

Chứng minh. Ta có 2 lời giải như sau.

Cách 1. Ta có

$$T = \sum_{k=0}^{2018} \binom{2018}{k} (x - x^{2017})^k + \sum_{k'=0}^{2017} \binom{2017}{k'} (x^{2018} - x)^{k'}$$

Hệ số của số hạng chứa x ứng với $k = k' = 1$. Do đó hệ số cần tìm là $\binom{2018}{1} - \binom{2017}{1} = 1$.

Cách 2. Ta có

$$\begin{aligned} T &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2017 \cdot 2018}x^{2017 \cdot 2018} = f(x) \\ \Rightarrow f'(x) &= a_1 + 2a_2x + \dots + 2017 \cdot 2018 a_{2017 \cdot 2018}x^{2017 \cdot 2018 - 1} \\ \Rightarrow f'(0) &= a_1 \end{aligned}$$

Mặt khác ta lại có

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2018(1 + x - x^{2017})^{2017} (1 - 2017x^{2016}) + 2017(1 - x + x^{2018})^{2016} (-1 + 2018x^{2017}) \\ \Rightarrow f'(0) &= 2018 - 2017 = 1 \\ \Rightarrow a_1 &= 1 \end{aligned}$$

Do đó hệ số cần tìm là 1. □

BÀI 9.

Tìm hệ số của x^6 trong khai triển $(2x + 1)^6 \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)^4$ thành đa thức?

Chứng minh. Ta xét khai triển

$$(2x + 1)^6 = (1 + 2x)^6 = \sum_{k=0}^n \binom{6}{k} 1^{6-k} (2x)^k = \sum_{k=0}^n \binom{6}{k} 2^k x^k$$

và khai triển

$$\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)^4 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{1}{2} + x\right)^8 = \sum_{j=0}^8 \binom{8}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{8-j} x^j$$

Như vậy thì ta được

$$(2x + 1)^6 \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)^4 = \sum_{k=0}^n \binom{6}{k} 2^k x^k \cdot \sum_{j=0}^8 \binom{8}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{8-j} x^j = \sum_{k=0}^n \binom{6}{k} 2^k \cdot \sum_{j=0}^8 \binom{8}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{8-j} x^{j+k}$$

Số hạng của khai triển chứa x^6 khi $j + k = 6$. Ta kí hiệu $[x^6]$ là hệ số của x^6 , chú ý rằng

$$[x^6] = \binom{6}{k} 2^k \cdot \binom{8}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{8-j}$$

Khi đó ta xét các trường hợp sau.

1. Nếu $k = 0 \Rightarrow j = 6 \Rightarrow [x^6] = \binom{6}{0} 2^0 \cdot \binom{8}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^2$.
2. Nếu $k = 1 \Rightarrow j = 5 \Rightarrow [x^6] = \binom{6}{1} 2^1 \cdot \binom{8}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^3$.
3. Nếu $k = 2 \Rightarrow j = 4 \Rightarrow [x^6] = \binom{6}{2} 2^2 \cdot \binom{8}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4$.

4. Nếu $k = 3 \Rightarrow j = 3 \Rightarrow [x^6] = \binom{6}{3} 2^3 \cdot \binom{8}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^5$.

5. Nếu $k = 4 \Rightarrow j = 2 \Rightarrow [x^6] = \binom{6}{4} 2^4 \cdot \binom{8}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^6$.

6. Nếu $k = 5 \Rightarrow j = 1 \Rightarrow [x^6] = \binom{6}{5} 2^5 \cdot \binom{8}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^5$.

7. Nếu $k = 6 \Rightarrow j = 0 \Rightarrow [x^6] = \binom{6}{6} 2^6 \cdot \binom{8}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Vậy hệ số x^6 trong khai triển $(2x+1)^6 \left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)^4$ thành đa thức là $\frac{3003}{4} = \frac{1}{4} \binom{14}{6}$. $\square$

BÀI 10.

Cho khai triển $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, $n \geq 1$. Tìm số giá trị nguyên của n với $n \leq 2018$ sao cho tồn tại k ($0 \leq k \leq n-1$) thỏa mãn $a_k = a_{k+1}$.

Chứng minh. Đầu tiên ta có

$$(1+2x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k x^k$$

từ đó suy ra $a_k = \binom{n}{k} 2^k$ với $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$. Do đó

$$\begin{aligned} a_k = a_{k+1} &\Leftrightarrow \binom{n}{k} 2^k = \binom{n}{k+1} 2^{k+1} \\ &\Leftrightarrow \frac{n!}{k!(n-k)!} = 2 \cdot \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{(n-k)} = \frac{2}{(k+1)} \\ &\Leftrightarrow 2n - 2k = k + 1 \\ &\Leftrightarrow k = \frac{2n-1}{3} \end{aligned}$$

Vì $0 \leq k \leq n-1$ nên suy ra $n \geq 2$.

1. Nếu $n = 3m, m \in \mathbb{N}$, thì $k = \frac{2 \cdot 3m - 1}{3} = 2m - \frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$.

2. Nếu $n = 3m + 1, m \in \mathbb{N}$, thì $k = \frac{2 \cdot (3m + 1) - 1}{3} = 2m + \frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$.

Bài toán được giải quyết. $\square$

BÀI 11.

Cho khai triển $(x-1)^{2n} + x(x+1)^{2n-1} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}$ với n là số tự nhiên và $n \geq 3$. Biết rằng $\sum_{k=0}^n a_{2k} = 768$, tính a_5 .

Chứng minh. Ta có

$$\begin{cases} f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} \\ f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_{2n} \end{cases} \Rightarrow f(1) + f(-1) = 2 \cdot \sum_{k=0}^n a_{2k} = 1536$$

hay $2^{2n-1} + 2^{2n} = 1536 \Rightarrow n = 5$, từ đây suy ra được hệ số $a_5 = \binom{10}{5} (-1)^5 + \binom{9}{4} = -126$. $\square$

BÀI 12.

Gọi S là tổng các hệ số của các lũy thừa bậc nguyên dương của x trong khai triển $P(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{2018}$.
 Tính giá trị của biểu thức $S + \frac{1}{2} \binom{2018}{1009}$.

Chứng minh. Ta có $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2018} = \sum_{k=0}^{2018} \binom{2018}{k} x^{2018-2k}$.

Để lũy thừa với số mũ nguyên dương thì $2018 - 2k > 0 \Leftrightarrow k < 1009$, từ đó suy ra

$$S = \binom{2018}{0} + \binom{2018}{1} + \dots + \binom{2018}{1008}.$$

Áp dụng công thức $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ta được

$$\begin{aligned} S + \frac{1}{2} \binom{2018}{1009} &= \binom{2018}{0} + \binom{2018}{1} + \dots + \binom{2018}{1008} + \frac{1}{2} \binom{2018}{1009} \\ \Rightarrow 2 \left(S + \frac{1}{2} \binom{2018}{1009} \right) &= \binom{2018}{0} + \binom{2018}{1} + \dots + \binom{2018}{1008} + \frac{1}{2} \binom{2018}{1009} \\ &\quad + \binom{2018}{2018} + \binom{2018}{2017} + \dots + \binom{2018}{1010} + \frac{1}{2} \binom{2018}{1009} \\ &= \binom{2018}{0} + \binom{2018}{1} + \dots + \binom{2018}{2017} + \binom{2018}{2018} = 2^{2018}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S + \frac{1}{2} \binom{2018}{1009} = 2^{2017}.$$

□

BÀI 13.

Cho khai triển $a_n(x-1)^n + a_{n-1}(x-1)^{n-1} + \dots + a_1(x-1) + a_0 = x^n$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 5$.
 Tìm n , biết $a_2 + a_3 + a_4 = 83n$.

Chứng minh. Ta có

$$x^n = [(x-1) + 1]^n = \binom{n}{0}(x-1)^n + \binom{n}{1}(x-1)^{n-1} + \binom{n}{2}(x-1)^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1}(x-1) + \binom{n}{n}.$$

Vì $a_2 + a_3 + a_4 = 83n$, từ đây suy ra được

$$\begin{aligned} \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} &= 83n \Leftrightarrow \frac{(n-1)}{2!} + \frac{(n-1)(n-2)}{3!} + \frac{(n-1)(n-2)(n-4)}{4!} = 83 \\ &\Rightarrow n = 13. \end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết.

□

BÀI 14.

Sau khi khai triển và rút gọn thì biểu thức $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{20} + \left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{10}$, có tất cả bao nhiêu số hạng?

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{20} + \left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{10} &= \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} x^{20-k} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k + \sum_{m=0}^{10} \binom{10}{m} x^{3(10-m)} \left(-\frac{1}{x}\right)^m \\ &= \sum_{k=0}^{20} (-1)^k \binom{20}{k} x^{20-3k} + \sum_{m=0}^{10} (-1)^m \binom{10}{m} x^{30-4m}. \end{aligned}$$

Ta tìm các số hạng có cùng lũy thừa của x , ta có

$$\begin{cases} 0 \leq m \leq 10, 0 \leq k \leq 20 \\ 20 - 3k = 30 - 4m \Leftrightarrow 4m - 3k = 10 \end{cases} \Leftrightarrow (k; m) = (2; 4), (6; 7), (10; 10).$$

Vậy trong khai triển đã cho có tất cả $21 + 11 - 3 = 29$ số hạng. □

BÀI 15.

Có bao nhiêu số thực x để khi khai triển nhị thức $(2^x + 2^{\frac{1}{2}-x})^n$ có tổng số hạng thứ 3 và thứ 5 bằng 135, còn tổng của ba số hạng cuối bằng 22?

Chứng minh. Số hạng thứ $(k+1)$ trong khai triển là $T_k = \binom{n}{k} (2^x)^{n-k} (2^{\frac{1}{2}-x})^k$. Từ đó suy ra

1. Tổng hai số hạng thứ 3 và thứ 5 bằng 135, suy ra

$$T_2 + T_4 = \binom{n}{2} (2^x)^{n-2} (2^{\frac{1}{2}-x})^2 + \binom{n}{4} (2^x)^{n-4} (2^{\frac{1}{2}-x})^4 = 135 \quad (1)$$

2. Tổng ba hệ số của ba số cuối bằng 22, suy ra

$$\binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 22 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} + n + 1 = 22 \Leftrightarrow n = 6.$$

Thay $n = 6$ vào (1), ta được

$$\binom{6}{2} \cdot 2^{4x} \cdot 2^{1-2x} + \binom{6}{4} \cdot 2^{2x} \cdot 2^{2-4x} = 135 \Leftrightarrow 2^{2x+1} + 2^{2-2x} = 9.$$

Đặt $0 < u = 2^{2x}$, ta được

$$2u + \frac{4}{u} = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 \Rightarrow x = 1 \\ u = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $x \in \left\{1; -\frac{1}{2}\right\}$. □

BÀI 16.

Trong khai triển của biểu thức $(x^3 - x - 2)^{2017}$. Tính tổng S của các hệ số của x^{2k+1} với k nguyên dương?

Chứng minh. Ta có

$$(x^3 - x - 2)^{2017} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{6051}x^{6051} \quad (1)$$

Ta cần tính $S = a_3 + a_5 + a_7 + \dots + a_{6051}$.

Thay $x = 1$ vào (1), ta được

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{6051} = -2^{2017} \quad (2)$$

Thay $x = -1$ vào (1), ta được

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots - a_{6051} = -2^{2017} \quad (3)$$

Trừ vế theo vế (2) và (3), ta được

$$2(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{6051}) = 0 \Leftrightarrow 2S + 2a_1 = 0 \Leftrightarrow S = -a_1$$

Theo khai triển nhị thức Newton, ta có

$$(x^3 - x - 2)^{2017} = \sum_{k=0}^{2017} \binom{2017}{k} (x^3 - x)^k (-2)^{2017-k}$$

Từ đó suy ra số hạng a_1x chỉ xuất hiện trong $\binom{2017}{1}(x^3 - x)^1(-2)^{2017-1}$. Mặt khác

$$\binom{2017}{1}(x^3 - x)^1(-2)^{2017-1} = 2017 \cdot 2^{2016} \cdot (x^3 - x) \Rightarrow a_1 = -2017 \cdot 2^{2016} \Rightarrow S = 2017 \cdot 2^{2016}.$$

Như vậy bài toán được giải quyết. □

BÀI 17.

Kí hiệu a_{3n-3} là hệ số của số hạng chứa x^{3n-3} trong khai triển $(x^2 + 1)^n(x + 2)^n$. Tìm n sao cho $a_{3n-3} = 26n$.

Chứng minh. Ta có

$$(x^2 + 1)^n(x + 2)^n = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^2)^{n-k} \right) \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} 2^i \right) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{i} 2^i x^{3n-2k-i}.$$

Chọn $3n - 2k - i = 3n - 3 \Leftrightarrow 2k + i = 3 \rightarrow (k; i) \in \{(0; 3), (1; 1)\}$.

Suy ra hệ số của số hạng chứa x^{3n-3} là $\binom{n}{0} \binom{n}{3} 2^3 + \binom{n}{1} \binom{n}{1} 2$. Theo giả thiết ta có

$$\binom{n}{0} \binom{n}{3} 2^3 + \binom{n}{1} \binom{n}{1} 2 = 26n \Rightarrow n = 5.$$

Như vậy bài toán được giải quyết. □

BÀI 18.

Cho khai triển $x(x + 1)^n + 2(x + 1)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n+1}x^{n+1}$ với n là số tự nhiên và $n \geq 2$. Tìm n , biết rằng $a_2 = 7n$; na_n ; a_{n-2} theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

Chứng minh. Ta có

$$x(x + 1)^n + 2(x + 1)^n = (x + 1)^n(x + 2) = (x + 1)^n[(x + 1) + 1] = (x + 1)^{n+1} + (x + 1)^n.$$

Suy ra được

$$\begin{aligned} a_2 &= \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} = \frac{(n+1)n}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 \\ a_n &= \binom{n+1}{n} + \binom{n}{n} = (n+1) + 1 = n+2 \\ a_{n-2} &= \binom{n+1}{n-2} + \binom{n}{n-2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(n+4)}{6} \end{aligned}$$

Theo giả thiết bài toán, ta có

$$n(n+2) - (n^2 - 7n) = \frac{n(n-1)(n+4)}{6} - n(n+2) \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = -7 \\ n = 10 \end{cases}$$

Vậy ta tìm được $n = 10$ là giá trị thỏa mãn. □

BÀI 19.

Xác định n biết rằng hệ số của x^n trong khai triển $(1 + x + 2x^2 + \dots + nx^n)^2$ bằng $6n$.

Chứng minh. Ta có

$$(1 + x + 2x^2 + \dots + nx^n)^2 = (1 + x + 2x^2 + \dots + nx^n) \cdot (1 + x + 2x^2 + \dots + nx^n)$$

Hệ số của x^n là

$$\begin{aligned} & 1.n + 1.(n-1) + 2.(n-2) + \dots + (n-1).1 + n.1 \\ &= 1.n + 1.(n-1) + 2.(n-2) + \dots + (n-1).[n - (n-1)] + n.1 \\ &= 2n + n[1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)] - [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2] \\ &= 2n + n \left[\frac{1 + (n-1)}{2} \cdot (n-1) \right] - \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2 \right] \\ &= \frac{n^3 + 11n}{6} \end{aligned}$$

Theo giả thiết, ta có $\frac{n^3 + 11n}{6} = 6n \Rightarrow n = 5$. □

BÀI 20.

Biết rằng trong khai triển nhị thức Newton của đa thức $P(x) = (2 + x + 2x^2 + x^3)^n$ thì hệ số của x^5 là 1001. Tổng các hệ số trong khai triển của $P(x)$ bằng bao nhiêu?

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} P(x) &= (2 + x + 2x^2 + x^3)^n = (2 + x)^n (1 + x^2)^n \\ &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} x^k \right) \left(\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} x^{2l} \right) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n \left(\binom{n}{k} \binom{n}{l} 2^{n-k} \right) x^{k+2l}. \end{aligned}$$

Hệ số của x^5 ứng với $k + 2l$ thỏa mãn $k + 2l = 5 \Rightarrow (k; l) = \{(5; 0), (3; 1), (1; 2)\}$.

1. **Trường hợp 1.** Với $n \geq 5$ khi đó $(k; l) = \{(5; 0), (3; 1), (1; 2)\}$, suy ra hệ số của x^5 là

$$\binom{n}{5} \binom{n}{0} 2^{n-5} + \binom{n}{3} \binom{n}{1} 2^{n-3} + \binom{n}{1} \binom{n}{2} 2^{n-1} = 1001.$$

Vì về trái lẽ mà về phải luôn chẵn nếu $n > 5$ do đó chỉ có thể chọn $n = 5$. Thử lại vào phương trình ta thấy $n = 5$ thỏa mãn điều kiện.

2. **Trường hợp 2.** Với $3 \leq n < 5$ khi đó $(k; l) = \{(3; 1), (1; 2)\}$, từ đây suy ra hệ số của x^5 là

$$\binom{n}{3} \binom{n}{1} 2^{n-3} + \binom{n}{1} \binom{n}{2} 2^{n-1} = 1001.$$

Vì về trái lẽ mà về phải luôn chẵn nếu $n > 3$ do đó chỉ có thể chọn $n = 3$. Thử lại vào phương trình ta thấy $n = 3$ không thỏa mãn điều kiện.

3. **Trường hợp 3.** Với $n = 2$ khi đó $(k; l) = (1; 2)$, suy ra hệ số của x^5 là $\binom{1}{2} \binom{2}{2} 2 = 1001$, vô lý.

Do đó chỉ có $n = 5$ thỏa mãn suy ra tổng các hệ số trong khai triển là $6^5 = 7776$. □

BÀI 21.

Cho khai triển $P(x) = (1 + x)(2 + x) \dots (1 + 2017x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2017}x^{2017}$. Kí hiệu $P'(x)$ và $P''(x)$ lần lượt là đạo hàm cấp 1 và đạo hàm cấp 2 của đa thức $P(x)$. Tìm hệ số a_2 ?

Chứng minh. Ta có $P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + 2017a_{2017}x^{2016}$, tiếp tục đạo hàm lần nữa, ta có

$$P''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \dots + 2017 \cdot 2016a_{2017}x^{2015}.$$

Cho $x = 0$, ta được $P''(0) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{P''(0)}{2}$. Chú ý rằng ta có

$$P'(x) = P(x) \cdot \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2}{2+x} + \dots + \frac{2017}{1+2017x} \right)$$

$$P''(x) = P(x) \cdot \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2}{2+x} + \dots + \frac{2017}{1+2017x} \right)^2 + P(x) \left(-\frac{1^2}{1+x} - \frac{2^2}{2+x} - \dots - \frac{2017^2}{1+2017x} \right).$$

Như vậy bài toán được giải quyết. $\square$

BÀI 22.

Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển $(1 - 2x + 2015x^{2016} - 2016x^{2017} + 2017x^{2018})^{60}$.

Chứng minh. Đặt

$$f(x) = (1 - 2x + 2015x^{2016} - 2016x^{2017} + 2017x^{2018})^{60}$$

$$g(x) = 2015x^{2016} - 2016x^{2017} + 2017x^{2018}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} f(x) &= [1 + (-2x + g(x))]^{60} = \sum_{k=0}^{60} \binom{60}{k} [-2x + g(x)]^k \\ &= \sum_{k=0}^{60} \binom{60}{k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-2x)^i [g(x)]^{k-i} \quad (0 \leq i \leq k \leq 60). \end{aligned}$$

Vì bậc của đa thức $g(x)$ là 2018, suy ra số hạng chứa x^3 ứng với

$$\begin{cases} k-i=0 \\ i=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ i=3 \end{cases}.$$

Vậy hệ số cần tìm là $\binom{60}{3} \cdot \binom{3}{3} \cdot (-2)^3 = -8 \cdot \binom{60}{3}$. $\square$

BÀI 23.

Với $x \neq -1$ ta có khai triển sau $\left(\frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} \right)^{2018} = \sum_{i=0}^{2018} a_i x^i + \sum_{i=j}^{2018} \frac{b_j}{(x+1)^j}$. Tính tổng $S = \sum_{k=1}^{2018} b_k$?

Chứng minh. Đặt

$$f(x) = (1 - 2x + 2015x^{2016} - 2016x^{2017} + 2017x^{2018})^{60}$$

$$g(x) = 2015x^{2016} - 2016x^{2017} + 2017x^{2018}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} f(x) &= [1 + (-2x + g(x))]^{60} = \sum_{k=0}^{60} \binom{60}{k} [-2x + g(x)]^k \\ &= \sum_{k=0}^{60} \binom{60}{k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-2x)^i [g(x)]^{k-i} \quad (0 \leq i \leq k \leq 60). \end{aligned}$$

Vì bậc của đa thức $g(x)$ là 2018, suy ra số hạng chứa x^3 ứng với

$$\begin{cases} k-i=0 \\ i=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ i=3 \end{cases}.$$

Vậy hệ số cần tìm là $\binom{60}{3} \cdot \binom{3}{3} \cdot (-2)^3 = -8 \cdot \binom{60}{3}$. $\square$

BÀI 24.

Tính tổng $T = \binom{2017}{1} + \binom{2017}{3} + \binom{2017}{5} + \dots + \binom{2017}{2017}$?

Chứng minh. Xét hai khai triển

$$2^{2017} = (1+1)^{2017} = \binom{2017}{0} + \binom{2017}{1} + \binom{2017}{2} + \binom{2017}{3} + \dots + \binom{2017}{2017} \quad (1)$$

$$0 = (1-1)^{2017} = \binom{2017}{0} - \binom{2017}{1} + \binom{2017}{2} - \binom{2017}{3} + \dots - \binom{2017}{2017} \quad (2)$$

Lấy (1) – (2) theo về ta được

$$2^{2017} = 2 \left(\binom{2017}{1} + \binom{2017}{3} + \binom{2017}{5} + \dots + \binom{2017}{2017} \right) \Rightarrow T = 2^{2016}$$

Bài toán được giải quyết. □

BÀI 25.

Với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ và thỏa mãn $\binom{2}{2}^{-1} + \binom{3}{2}^{-1} + \binom{4}{2}^{-1} + \dots + \binom{n}{2}^{-1} = \frac{9}{5}$. Tính $P = \frac{\binom{n}{5} + \binom{n+2}{3}}{(n-4)!}$.

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} \binom{2}{2}^{-1} + \binom{3}{2}^{-1} + \binom{4}{2}^{-1} + \dots + \binom{n}{2}^{-1} &= \frac{9}{5} \Leftrightarrow \frac{0!2!}{2!} + \frac{1!2!}{3!} + \frac{2!2!}{4!} + \dots + \frac{(n-2)!2!}{n!} = \frac{9}{5} \\ &\Leftrightarrow 2! \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} \right) = \frac{9}{5} \\ &\Leftrightarrow 2! \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \frac{9}{5} \\ &\Leftrightarrow 2! \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{9}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow n = 10 \end{aligned}$$

Như vậy ta được $P = \frac{\binom{n}{5} + \binom{n+2}{3}}{(n-4)!} = \frac{\binom{10}{5} + \binom{12}{3}}{6!} = \frac{59}{90}$. □

BÀI 26.

Tính tổng $S = \binom{2018}{1009} + \binom{2018}{1010} + \binom{2018}{1011} + \dots + \binom{2018}{2018}$, trong tổng đó, các số hạng có dạng $\binom{2018}{k}$ với k nguyên dương nhận giá trị liên tục từ 1009 đến 2018.

Chứng minh. Áp dụng tính chất $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ta có

$$\binom{2018}{0} = \binom{2018}{2018}$$

$$\binom{2018}{1} = \binom{2018}{2017}$$

$$\binom{2018}{2} = \binom{2018}{2016}$$

...

$$\binom{2018}{1008} = \binom{2018}{1010}$$

$$\binom{2018}{1009} = \binom{2018}{1009}$$

Từ đó ta có được $\binom{2018}{0} + \binom{2018}{1} + \binom{2018}{2} + \dots + \binom{2018}{1009} = \binom{2018}{1009} + \binom{2018}{2010} + \dots + \binom{2018}{2018}$, suy ra

$$2S = \binom{2018}{0} + \binom{2018}{1} + \binom{2018}{2} + \dots + \binom{2018}{2018} + \binom{2018}{1009}$$

Mặt khác ta lại có

$$\binom{2018}{0} + \binom{2018}{1} + \binom{2018}{2} + \dots + \binom{2018}{2018} = (1+1)^{2018} = 2^{2018}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{2^{2018} + \binom{2018}{1009}}{2} = 2^{2017} + \frac{\binom{2018}{1009}}{2}.$$

□

BÀI 27.

Tính giá trị của biểu thức $\frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^9}{9!} \cdot \frac{(1-x)}{1!} + \frac{x^8}{8!} \cdot \frac{(1-x)^2}{2!} + \dots + \frac{(1-x)^{10}}{10!}$.

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{(1-x)^{10-k}}{(10-k)!} &= \frac{1}{10!} \cdot \frac{10!}{k!(10-k)!} \cdot x^k \cdot (1-x)^{10-k} = \frac{1}{10!} \cdot \binom{10}{k} \cdot x^k \cdot (1-x)^{10-k} \\ &\Rightarrow \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^9}{9!} \cdot \frac{(1-x)}{1!} + \frac{x^8}{8!} \cdot \frac{(1-x)^2}{2!} + \dots + \frac{(1-x)^{10}}{10!} \\ &= \frac{1}{10!} \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \cdot x^k \cdot (1-x)^{10-k} = \frac{1}{10!} (x+1-x)^{10} = \frac{1}{10!} \end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết.

□

BÀI 28.

Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $\binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{3} + \dots + \binom{2n+1}{2n+1} = 1024$.

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} 2^{2n+1} &= (1+1)^{2n+1} = \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \dots + \binom{2n+1}{2n+1} \\ 0 &= (1-1)^{2n+1} = \binom{2n+1}{0} - \binom{2n+1}{1} + \dots - \binom{2n+1}{2n+1} \end{aligned}$$

Suy ra được

$$2 \left(\binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{3} + \dots + \binom{2n+1}{2n+1} \right) = 2^{2n+1} \Rightarrow \binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{3} + \dots + \binom{2n+1}{2n+1} = 2^{2n}$$

Do đó $2^{2n} = 1024 \Leftrightarrow 2^{2n} = 2^{10} \Leftrightarrow n = 5$.

□

BÀI 29.

Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{1}{1!2018!} + \frac{1}{2!2017!} + \frac{1}{3!2016!} + \dots + \frac{1}{1008!1011!} + \frac{1}{1009!1010!}$.

Chứng minh. Ta có $\frac{1}{k!(n-k)!} = \frac{\binom{n}{k}}{n!}$. Do đó

$$\begin{aligned} A &= \frac{\binom{2019}{1}}{2019!} + \frac{\binom{2019}{2}}{2019!} + \frac{\binom{2019}{3}}{2019!} + \dots + \frac{\binom{2019}{1009}}{2019!} \\ &= \frac{\binom{2019}{1} + \binom{2019}{2} + \dots + \binom{2019}{1009}}{2019!} \\ &= \frac{\binom{2019}{0} + \binom{2019}{1} + \binom{2019}{2} + \dots + \binom{2019}{1009} - 1}{2019!} \\ &= \frac{2^{2018} - 1}{2019!} \end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết. □

BÀI 30.

Có bao nhiêu số dương n sao cho

$$S = 2 + \sum_{i=1}^n \binom{i}{0} + \sum_{i=1}^n \binom{i}{1} + \left(\binom{n-1}{n-1} + \binom{n}{n-1} \right) + \binom{n}{n}$$

là một số có 1000 chữ số?

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n \binom{i}{0} + \sum_{i=1}^n \binom{i}{1} + \left(\binom{n-1}{n-1} + \binom{n}{n-1} \right) + \binom{n}{n} \\ &= 2 + \left(\binom{1}{0} + \binom{1}{1} \right) + \left(\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} \right) + \dots + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \\ &= 2 + 2 + (1+1)^2 + \dots + (1+1)^{n-1} + (1+1)^n \\ &= 2 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n \\ &= 2 + 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} \Rightarrow S = 2^{n+1} \end{aligned}$$

Như vậy S là một số có 1000 chữ số, suy ra

$$\begin{aligned} 10^{999} \leq S < 10^{1000} &\Leftrightarrow 10^{999} \leq 2^{n+1} < 10^{1000} \\ &\Leftrightarrow 999 \log_2 10 - 1 \leq n < 1000 \log_2 10 - 1 \end{aligned}$$

Do $n \in \mathbb{N}$ nên $n \in \{3318; 3319; 3320\}$. Vậy có 3 số nguyên dương n thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

BÀI 31.

Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của $(2-3x)^{2n}$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn

$$\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{2} + \binom{2n+1}{4} + \dots + \binom{2n+1}{2n} = 1024$$

Chứng minh. Ta có

$$(x+1)^{2n+1} = \binom{2n+1}{0} \cdot x^{2n+1} + \binom{2n+1}{1} \cdot x^{2n} + \dots + \binom{2n+1}{2n} \cdot x + \binom{2n+1}{2n+1} \quad (1)$$

Thay $x = 1$ vào (1) ta được

$$2^{2n+1} = \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \dots + \binom{2n+1}{2n} + \binom{2n+1}{2n+1} \quad (2)$$

Thay $x = -1$ vào (1) ta được

$$0 = -\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} - \dots - \binom{2n+1}{2n} + \binom{2n+1}{2n+1} \quad (3)$$

Phương trình (2) trừ (3) theo vế ta suy ra

$$2^{2n+1} = 2 \left(\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{2} + \dots + \binom{2n+1}{2n} \right)$$

Theo đề bài ta có $2^{2n+1} = 2.1024 \Leftrightarrow n = 5$. Số hạng tổng quát của khai triển $(2 - 3x)^{10}$ là

$$T_{k+1} = \binom{10}{k} \cdot 2^{10-k} \cdot (-3x)^k = \binom{10}{k} \cdot 2^{10-k} \cdot (-3)^k \cdot x^k$$

Theo giả thiết ta có $k = 5$, vậy hệ số cần tìm là $\binom{10}{5} \cdot 2^5 \cdot (-3)^5 = -1959552$. □

BÀI 32.

Với n là số tự nhiên lớn hơn 2, đặt $S_n = \frac{1}{\binom{3}{3}} + \frac{1}{\binom{4}{3}} + \frac{1}{\binom{5}{3}} + \dots + \frac{1}{\binom{n}{3}}$. Tính $\lim S_n$?

Chứng minh. Ta có

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \Rightarrow \binom{n}{3}^{-1} = \frac{6}{n(n-1)(n-2)}$$

Vậy ta có $S_n = \frac{6}{1.2.3} + \frac{6}{2.3.4} + \frac{6}{3.4.5} + \dots + \frac{6}{n(n-1)(n-2)}$. Ta có nhận xét

$$\frac{2}{1.2.3} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3};$$

$$\frac{2}{2.3.4} = \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4};$$

...

$$\frac{2}{(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{(n-2)(n-1)} - \frac{1}{(n-1)n}$$

Từ đây ta suy ra được

$$\begin{aligned} S_n &= 3 \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) = 3 \left(\frac{n-2}{2n} \right) = \frac{3n-6}{2n} \end{aligned}$$

Vậy $\lim S_n = \lim \left(\frac{3n-6}{2n} \right) = \lim \left(\frac{3 - \frac{6}{n}}{2} \right) = \frac{3}{2}$. Kết hợp giả thiết có

$$\frac{2^{n+2} - n - 3}{(n+1)(n+2)} = \frac{2^{100} - n - 3}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow n = 98$$

Bài toán được giải quyết. □

BÀI 33.

Cho n và k nguyên dương thỏa mãn $k \leq n$. Chứng minh rằng

$$\frac{n+1}{n+2} \left(\binom{n+1}{k}^{-1} + \binom{n+1}{k+1}^{-1} \right) = \binom{n}{k}^{-1}$$

Chứng minh. Biến đổi giả thiết ta có

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n+2} \left(\binom{n+1}{k}^{-1} + \binom{n+1}{k+1}^{-1} \right) &= \frac{n+1}{n+2} \left(\frac{k!(n+1-k)!}{(n+1)!} + \frac{(k+1)!(n-k)!}{(n+1)!} \right) \\ &= \frac{n+1}{n+2} \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} (n+1-k+k+1) \\ &= \frac{n+1}{n+2} \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} (n+2) = \frac{k!(n-k)!}{n!} = \binom{n}{k}^{-1} \end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết. □

Ta có bài toán tổng quát.

$$\frac{1}{\binom{n+1}{1}} + \frac{1}{\binom{n+1}{2}} + \dots + \frac{1}{\binom{n+1}{n+1}} = \frac{n+2}{2(n+1)} \left(\frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \dots + \frac{1}{\binom{n}{n}} \right)$$

Sau đây ta sẽ đề cập tới một số tính chất của hệ số nhị thức có liên quan tới tam giác Pascal.

4.2 Bài toán về hệ số lớn nhất.

Với các bài toán yêu cầu tìm hệ số lớn nhất a_k khi khai triển nhị thức $(ax+b)^n$ thành đa thức ta sẽ làm theo phương pháp sau.

Phương pháp

- i) Lập hệ bất phương trình $\begin{cases} a_k \geq a_{k-1} \\ a_k \geq a_{k+1} \end{cases}$
- ii) Giải hệ bất phương trình trên để tìm các số nguyên k thỏa mãn.
- iii) Thay các giá trị k vừa tìm được để tìm hệ số lớn nhất.

Sau đây là các bài toán minh họa.

BÀI 1.

Khai triển đa thức $P(x) = (1+2x)^{12} = a_0 + a_1x + \dots + a_{12}x^{12}$. Tìm $\max(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{12})$?

Chứng minh. Gọi a_k là hệ số lớn nhất của khai triển suy ra $a_k > a_{k-1}$.

Từ đây ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2^k \binom{12}{k} \geq 2^{k-1} \binom{12}{k-1} \\ 2^k \binom{12}{k} \geq 2^{k+1} \binom{12}{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{k} \geq \frac{1}{12-k+1} \\ \frac{1}{12-k} \geq \frac{2}{k+1} \end{cases} \Rightarrow \max(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{12}) = a_8 = \binom{12}{8} 2^{18} = 126720$$

Bài toán được giải quyết. □

BÀI 2.

Cho khai triển nhị thức

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10} = a_0 + a_1x + \dots + a_9x^9 + a_{10}x^{10}.$$

Hãy tìm số hạng a_k lớn nhất.

Chứng minh. Ta có

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10} = \frac{1}{3^{10}}(1 + 2x)^{10} = \frac{1}{3^{10}} \sum_{k=0}^n \binom{10}{k} (2x)^k \Rightarrow a_k = \frac{1}{3^{10}} \binom{10}{k} 2^k$$

Như vậy a_k đạt được giá trị lớn nhất thì

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_k \geq a_{k+1} \\ a_k \geq a_{k-1} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \binom{10}{k} 2^k \leq \binom{10}{k+1} 2^{k+1} \\ \binom{10}{k} 2^k \leq \binom{10}{k-1} 2^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2^k 10!}{k! (10-k)!} \geq \frac{2^{k+1} 10!}{(k+1)! (9-k)!} \\ \frac{2^k 10!}{k! (10-k)!} \geq \frac{2^{k-1} 10!}{(k-1)! (11-k)!} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{10-k} \geq \frac{2}{k+1} \\ \frac{2}{k} \geq \frac{2}{11-k} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \frac{19}{3} \leq k \leq \frac{22}{3} \Rightarrow k = 7 \quad (k \in \mathbb{N}, k \in [0, 10]) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \max a_k = a_7 = \frac{2^7}{3^{10}} \binom{10}{7}.$$

□

BÀI 3.

Trong khai triển biểu thức $F = (\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})^9$ số hạng nguyên có giá trị lớn nhất là?

Chứng minh. Ta có số hạng tổng quát $T_{k+1} = \binom{9}{k} (\sqrt{3})^{9-k} (\sqrt[3]{2})^k$. Ta thấy bậc hai của căn thức là 2 và 3 là hai số nguyên tố, do đó để T_{k+1} là một số nguyên thì

$$\begin{cases} k \in \mathbb{N} \\ 0 \leq k \leq 9 \\ (9-k) : 2 \\ k : 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \Rightarrow T_4 = \binom{9}{3} (\sqrt{3})^6 (\sqrt[3]{2})^3 = 4536 \\ k = 9 \Rightarrow T_{10} = \binom{9}{9} (\sqrt{3})^0 (\sqrt[3]{2})^9 = 8 \end{cases}$$

Vậy trong khai triển có hai số hạng nguyên là $T_4 = 4536$ và $T_{10} = 8$.

□

BÀI 4.

Hệ số có giá trị lớn nhất khi khai triển $P(x) = (1 + 2x^2)^{12}$ thành đa thức là?

Chứng minh. Ta có khai triển

$$P(x) = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} 2^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{12} a_k x^{2k}$$

$$\text{với } a_k = \binom{12}{k} 2^k.$$

Ta xét bất phương trình $a_{k+1} > a_k$, từ đây suy ra

$$\binom{12}{k+1} 2^{k+1} > \binom{12}{k} 2^k \Leftrightarrow \frac{2}{k+1} > \frac{1}{12-k} \Leftrightarrow k < \frac{23}{3} \Leftrightarrow k \leq 7$$

Như vậy $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_8$.

Xét bất phương trình $a_{k+1} < a_k$, ta suy ra

$$\binom{12}{k+1} 2^{k+1} < \binom{12}{k} 2^k \Leftrightarrow \frac{2}{k+1} < \frac{1}{12-k} \Leftrightarrow k > \frac{23}{3} \Leftrightarrow k \geq 8$$

Như vậy $a_8 > a_9 > a_{10} > \dots > a_{12}$. Vậy hệ số có giá trị lớn nhất là $a_8 = \binom{12}{8} 2^8 = 126720$. $\square$

BÀI 5.

Cho biểu thức $P(x) = (x+2)^n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$. Cho biết rằng $a_{n-9} > a_{n-8}$ và $a_{n-9} > a_{n-10}$. Tìm giá trị của n ?

Chứng minh. Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có

$$P(x) = (x+2)^n = \binom{n}{0} x^n 2^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} 2^1 + \dots + \binom{n}{n-k} x^k 2^{n-k} + \dots + \binom{n}{n-1} x^1 2^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 2^n$$

Mặt khác ta lại có

$$P(x) = (x+2)^n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0, n \in \mathbb{N}^*$$

Nên ta được

$$a_k = 2^{n-k} \binom{n}{n-k} = 2^{n-k} \binom{n}{k}, 0 \Rightarrow a_{n-8} = 2^8 \binom{n}{8} = 2^8 \binom{n}{8}, a_{n-9} = 2^9 \binom{n}{9}, a_{n-10} = 2^{10} \binom{n}{10}$$

Theo đề bài với $n \geq 10, n \in \mathbb{N}^*$ thì

$$\begin{cases} a_{n-9} > a_{n-8} \\ a_{n-9} > a_{n-10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^9 \frac{n!}{9!(n-9)!} > 2^8 \frac{n!}{8!(n-8)!} \\ 2^9 \frac{n!}{9!(n-9)!} > 2^{10} \frac{n!}{10!(n-10)!} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{9} > \frac{1}{n-8} \\ \frac{1}{n-9} > \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n > \frac{25}{2} \\ n < 14 \end{cases} \Leftrightarrow n = 13.$$

Như vậy bài toán được giải quyết. $\square$

BÀI 6.

Cho $(1+2x)^n = a_0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n, n \in \mathbb{N}^*$. Biết rằng

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096$$

Số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ có giá trị bằng bao nhiêu?

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} (1+2x)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 2^k \cdot x^k = \binom{n}{0} \cdot 2^0 x^0 + \binom{n}{1} \cdot 2^1 x^1 + \binom{n}{2} \cdot 2^2 x^2 + \dots + \binom{n}{n} \cdot 2^n x^n \\ &= a_0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} &= 4096 \Rightarrow \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 4096 \\ &\Leftrightarrow 2^n = 4096 \Leftrightarrow n = 12 \end{aligned}$$

Ta có

$$a_k < a_{k+1} \Leftrightarrow \binom{12}{k} \cdot 2^k < \binom{12}{k+1} \cdot 2^{k+1} \Leftrightarrow \binom{12}{k} < 2 \binom{12}{k+1}$$

Suy ra $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_8$. Mặt khác ta lại có

$$a_k > a_{k+1} \Leftrightarrow \binom{12}{k} \cdot 2^k > \binom{12}{k+1} \cdot 2^{k+1} \Leftrightarrow \binom{12}{k} > 2 \binom{12}{k+1}$$

Suy ra $a_8 > a_9 > a_{10} > \dots > a_{12}$.

Vậy số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ là $a_8 = \binom{12}{8} \cdot 2^8 = 126720$. $\square$

BÀI 7.

Cho khai triển $(x+3)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$ và $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực. Gọi S là tập hợp chứa các số tự nhiên n để a_{10} là số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng bao nhiêu?

Chứng minh. Ta có khai triển

$$(x+3)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} x^k$$

Số hạng tổng quát của khai triển là $T_k = \binom{n}{k} 3^{n-k} x^k$, suy ra hệ số của T_k là $a_k = \binom{n}{k} 3^{n-k}$. Để a_{10} là số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ thì

$$\begin{cases} a_{10} \geq a_9 \\ a_{10} \geq a_{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \binom{n}{10} \cdot 3^{n-10} \geq \binom{n}{9} \cdot 3^{n-9} \\ \binom{n}{10} \cdot 3^{n-10} \geq \binom{n}{11} \cdot 3^{n-11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \binom{n}{10} \geq 3 \binom{n}{9} \\ 3 \binom{n}{10} \geq \binom{n}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 39 \\ n \leq 43 \end{cases} \Leftrightarrow 39 \leq n \leq 43$$

Vậy $S = \{39; 40; 41; 42; 43\}$.

Tổng các phần tử của S là $T = 39 + 40 + 41 + 42 + 43 = 205$. $\square$

BÀI 8.

Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $\binom{n+1}{n-1} + \binom{n+1}{n} = 171$. Tìm hệ số lớn nhất của biểu thức $P(x) = (1+x)(1+2x)^n$ sau khi khai triển và rút gọn.

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{n-1} + \binom{n+1}{n} &= 171 \Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{2! \cdot (n-1)!} + \frac{(n+1)!}{n!} = 171 \\ &\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = 171 \\ &\Leftrightarrow n^2 + 3n - 340 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 17 \\ n = -20 \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó ta có

$$P(x) = (1+x)(1+2x)^{17} = (1+x) \sum_{k=0}^{17} \binom{17}{k} 2^k x^k = \sum_{k=0}^{17} \binom{17}{k} 2^k x^k + \sum_{k=0}^{17} \binom{17}{k} 2^k x^{k+1}.$$

Suy ra hệ số của x^k trong khai triển là $\binom{17}{k} 2^k + \binom{17}{k-1} 2^{k-1}$. Hệ số của x^k là lớn nhất khi

$$\begin{cases} \binom{17}{k} 2^k + \binom{17}{k-1} 2^{k-1} \geq \binom{17}{k+1} 2^{k+1} + \binom{17}{k} 2^k \\ \binom{17}{k} 2^k + \binom{17}{k-1} 2^{k-1} \geq \binom{17}{k-1} 2^{k-1} + \binom{17}{k-2} 2^{k-2} \end{cases}$$

Điều này tương đương với

$$\begin{aligned} \begin{cases} \binom{17}{k-1} 2^{k-1} \geq \binom{17}{k+1} 2^{k+1} \\ \binom{17}{k} 2^k \geq \binom{17}{k-2} 2^{k-2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{(k-1)! \cdot (18-k)!} \geq \frac{2^2}{(k+1)! \cdot (16-k)!} \\ \frac{2^2}{k! \cdot (17-k)!} \geq \frac{1}{(k-2)! \cdot (19-k)!} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{(18-k)(17-k)} \geq \frac{4}{k(k+1)} \\ \frac{4}{(k-1)k} \geq \frac{1}{(18-k)(19-k)} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3k^2 - 141k + 1224 \leq 0 \\ 3k^2 - 147k + 1368 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow k = 12 \end{aligned}$$

Vậy hệ số lớn nhất cần tìm là $\binom{17}{12} 2^{12} + \binom{17}{11} 2^{11} = 50692096$. □

4.3 Chứng minh các đẳng thức.

4.3.1 Các đẳng thức cơ bản.

Những bài toán ở đây chỉ đơn giản là áp dụng các tính chất của công thức tổ hợp.

BÀI 1.

Symmetry Identity

Với mọi số nguyên dương m, n sao cho $0 \leq n \leq m$, thì ta có $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$, tính chất này người ta gọi nó là **tính chất đối xứng**.

Chứng minh. Ta có

$$\binom{m}{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!(m-(m-n))!} = \frac{m!}{(m-(m-n))!(m-n)!} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{n}$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh.



Bài tập áp dụng. Với mọi số nguyên dương m, n sao cho $0 \leq n < m$, chứng minh rằng

$$\binom{m}{n} = \frac{m}{m-n} \binom{m-1}{n}$$

Tính chất này người ta gọi nó là **công thức lùi cơ sở**. □

BÀI 2.

Với $m \in \mathbb{Q}$ và n là các số nguyên dương, khi đó ta có $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$.

Chứng minh. Với n là các số tự nhiên thì ta có $n! = n \cdot (n-1)!$ do vậy

$$(n-1)! = \frac{n!}{n} \Rightarrow \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{\frac{n!}{n}} = \frac{1}{n!} \cdot n$$

Ta có

$$\binom{m}{n-1} = \frac{m(m-1) \cdots (m-(n-1)+1)}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot (m(m-1) \cdots (m-(n-1)+1))$$

Thay m bởi $m - 1$ ta được

$$\begin{aligned} \binom{m-1}{n-1} &= \underbrace{\frac{1}{(n-1)!}}_{=\frac{1}{n!} \cdot n} \cdot \left((m-1) \underbrace{((m-1)-1) \cdots ((m-1)-(n-1)+1)}_{=m-2} \right) \\ &= \frac{1}{n!} \cdot n \cdot ((m-1)(m-2) \cdots (m-n+1)) \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác ta lại có

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{n!} = \frac{1}{n!} (m(m-1) \cdots (m-n+1))$$

Thay m bởi $m - 1$ ở đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} \binom{m-1}{n} &= \frac{1}{n!} \left((m-1) \underbrace{((m-1)-1) \cdots ((m-1)-n+1)}_{=m-2} \right) \\ &= \frac{1}{n!} \underbrace{((m-1)(m-2) \cdots (m-n))}_{=((m-1)(m-2) \cdots (m-n+1)) \cdot (m-n)} \\ &= \frac{1}{n!} ((m-1)(m-2) \cdots (m-n+1)) \cdot (m-n) \\ &= \frac{1}{n!} (m-n) \cdot ((m-1)(m-2) \cdots (m-n+1)) \end{aligned}$$

Từ đẳng thức (1) ta có

$$\begin{aligned} \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} &= \frac{1}{n!} (m-n) \cdot ((m-1)(m-2) \cdots (m-n+1)) \\ &\quad + \frac{1}{n!} \cdot n \cdot ((m-1)(m-2) \cdots (m-n+1)) \\ &= \frac{1}{n!} \underbrace{((m-n) + n)}_{=m} \cdot ((m-1)(m-2) \cdots (m-n+1)) \\ &= \frac{1}{n!} \underbrace{m \cdot ((m-1)(m-2) \cdots (m-n+1))}_{=m(m-1) \cdots (m-n+1)} \\ &= \frac{1}{n!} (m(m-1) \cdots (m-n+1)) \\ &= \binom{m}{n} \end{aligned}$$

Đẳng thức được chứng minh. □

BÀI 3.

Absorption Identity

Với mọi số nguyên dương n, k sao cho $0 < n \leq m$, thì ta có $\binom{m}{n} = \frac{m}{n} \binom{m-1}{n-1}$, tính chất này người ta gọi nó là *quy tắc "hút" - Absorption*.

Chứng minh. Chứng minh tính chất này rất đơn giản, ta chỉ cần áp dụng công thức giai thừa. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} \binom{m-1}{n-1} &= \frac{m}{n} \cdot \frac{(m-1)(m-2) \cdots (m-n+1)}{(n-1)!} \\ &= \frac{m(m-1)(m-2) \cdots (m-n+1)}{n(n-1)!} \\ &= \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{n!} = \binom{m}{n} \end{aligned}$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh. □

Bài tập áp dụng. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương k, a, b thỏa mãn $k \leq a \leq b$ thì ta có

$$\frac{k-1}{k} \sum_{n=a}^b \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{1}{\binom{a-1}{k-1}} - \frac{1}{\binom{b}{k-1}}$$

BÀI 4.

Trinomial Revision

Với các số $m \in \mathbb{Q}, a \in \mathbb{N}$ và $i \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $i \geq a$, ta có $\binom{m}{i} \binom{i}{a} = \binom{m}{a} \binom{m-a}{i-a}$. Tính chất này người ta gọi nó là **tập con của tập con**

Chứng minh. Tương tự như tính chất ở trên, ta cũng sử dụng các biến đổi từ công thức giai thừa. Ta có

$$\begin{aligned} \binom{m}{a} \binom{m-a}{i-a} &= \frac{m(m-1) \cdots (m-a+1)}{a!} \cdot \frac{(m-a)((m-a)-1) \cdots ((m-a)-(i-a)+1)}{(i-a)!} \\ &= \frac{1}{a! \cdot (i-a)!} \cdot (m(m-1) \cdots (m-a+1)) \cdot ((m-a)((m-a)-1) \cdots ((m-a)-(i-a)+1)) \\ &= \frac{1}{a! \cdot (i-a)!} \cdot m(m-1) \cdots (m-i+1) \end{aligned}$$

Đồng thời ta cũng có

$$\begin{aligned} \binom{m}{i} \binom{i}{a} &= \frac{m(m-1) \cdots (m-i+1)}{i!} \cdot \frac{i!}{a!(i-a)!} \\ &= \frac{1}{a! \cdot (i-a)!} \cdot m(m-1) \cdots (m-i+1) \end{aligned}$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh. □

BÀI 5.

Chứng minh rằng $\binom{n}{k} + 3\binom{n}{k+1} + 3\binom{n}{k+2} + \binom{n}{k+3} = \binom{n+3}{k+3}$ với $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq k \leq n-3$.

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right) \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \frac{n+1}{k(n-k+1)} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

Áp dụng kết quả trên ta có

$$\begin{aligned} VT &= \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \right) + 2 \left(\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} \right) + \left(\binom{n}{k+2} + \binom{n}{k+3} \right) \\ &= \binom{n+1}{k+1} + 2\binom{n+1}{k+2} + \binom{n+1}{k+3} \\ &= \left(\binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k+2} \right) + \left(\binom{n+1}{k+2} + \binom{n+1}{k+3} \right) \\ &= \binom{n+2}{k+2} + \binom{n+2}{k+3} = \binom{n+3}{k+3} = \binom{n+3}{k+3} \end{aligned}$$

Như vậy bài toán được giải quyết. □

BÀI 6.

Chứng minh rằng

1. $\binom{n}{k} + 4\binom{n}{k-1} + 6\binom{n}{k-2} + 4\binom{n}{k-3} + \binom{n}{k-4} = \binom{n+4}{k}$ với $4 \leq k \leq n$.
2. $\binom{n}{0}\binom{n}{k} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1} + \dots + \binom{n}{k}\binom{n-k}{0} = 2^k \binom{n}{k}$.

Chứng minh. 1. Ta có

$$\begin{aligned} VT &= \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) + 3 \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-2} \right) + 3 \left(\binom{n}{k-2} + \binom{n}{k-3} \right) + \left(\binom{n}{k-3} + \binom{n}{k-4} \right) \\ &= \binom{n+1}{k} + 3\binom{n+1}{k-1} + 3\binom{n+1}{k-2} + \binom{n+1}{k-3} = \binom{n+4}{k} \end{aligned}$$

2. Ta có

$$\begin{aligned} \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m} &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{m!(k-m)!(n-k)!} \\ &= \frac{k!}{m!(k-m)!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{k}{m} \cdot \binom{n}{k} \end{aligned}$$

Suy ra

$$\sum_{m=0}^k \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m} = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \binom{n}{k} = \binom{n}{k} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} = 2^k \binom{n}{k}$$

Bài toán được giải quyết. □

4.3.2 Ứng dụng một số tính chất đẳng thức đặc biệt.

Trong chủ đề này, ta sẽ đi tìm hiểu các bài toán chứng minh đẳng thức có sử dụng một số bổ đề, cũng như tính chất đặc biệt mà mình đã đề cập ở phần đầu, sau đây chúng ta sẽ tìm hiểu một số các đẳng thức cơ bản khác.

BÀI 1.

Chứng minh rằng

1. $\sum_{k=0}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.
2. $\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$.

Chứng minh. 1. Ta sử dụng tam giác Pascal và phương pháp sai phân để biến đổi, ta được

$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{m} = \sum_{k=0}^n \left[\binom{k+1}{m+1} - \binom{k}{m+1} \right] = \binom{n+1}{m+1} - \binom{0}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$$

Người ta gọi tính chất này là **tổng theo cột**, ta có thể lấy ví dụ sau.

n	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$
2		1	
3		3	
4		6	
5		10	
6		15	
7			35

Ta thấy rằng $1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35$.

2. Áp dụng quy tắc tổng theo cột và quy tắc đối xứng ta có

$$\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{m+k}{m} = \binom{m+n+1}{m+1} = \binom{m+n+1}{n}$$

Ta gọi tính chất này là **Tổng theo đường chéo chính**, ta có thể lấy ví dụ như sau

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$
2	1				
3		3			
4			6		
5				10	
6					15
7					35

Ta thấy rằng $1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35$.

Bài toán được giải quyết. □

BÀI 2.

Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k} = F_{n+1}$, trong đó F_n là số Fibonacci thứ n được cho bởi công thức

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh đẳng thức này bằng phương pháp quy nạp.

Để thấy rằng với $n = 1$ thì $F_1 = \binom{0}{0} = 1$ và $F_2 = \binom{1}{0} + \binom{0}{1} = 1$ thì đẳng thức đúng. Khi đó ta giả sử rằng đẳng thức đúng tới $n - 1$. Áp dụng tam giác Pascal ta có

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k} &= \sum_{k=0}^n \binom{n-1-k}{k-1} + \sum_{k=0}^n \binom{n-1-k}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2-k}{k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1-k}{k-1} \\ &= F_{n-2} + F_{n-1} = F_n \end{aligned}$$

Tính chất này ta gọi nó là **Tổng theo đường chéo phụ, hay là số Fibonacci**. Ta có thể lấy ví dụ như sau.

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$
2				F_6	F_7
3			3	1	F_8
4		4	6	4	
5	1	5	10		
6	1	6			
7	1				

Ta thấy rằng $\begin{cases} F_6 = 1 + 4 + 3 = 8 \\ F_7 = 1 + 5 + 6 + 1 = 13 \\ F_8 = 1 + 6 + 10 + 4 = 21 \end{cases}$.

Như vậy ta có điều phải chứng minh. □

BÀI 3.

Cho các số nguyên không âm m, n, r , chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}$$

Đẳng thức Vandermonde, 2 thừa số.

Chứng minh. Xét khai triển của biểu thức $(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$, ta có

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} x^j = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{k} \binom{m}{j} x^{j+k} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^k$$

So sánh hệ số của x^r ở cả 2 vế ta thu được

$$\sum_{j+k=r} \binom{n}{k} \binom{m}{j} = \binom{n+m}{r} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh. □

Từ đẳng thức Vandermonde trên ta có phát biểu mở rộng của nó.

Cho các số nguyên không âm $n_1, \dots, n_r, k = k_1 + k_2 + \dots + k_r$, khi đó ta có

$$\sum_{k_1+k_2+\dots+k_r=k} \left(\prod_{i=1}^r \binom{n_i}{k_i} \right) = \binom{n_1+n_2+\dots+n_r}{k}$$

Tiếp theo ta sẽ đi tìm hiểu một tính chất sau, từ đẳng thức

$$k \cdot \binom{n}{k} = \frac{k \cdot n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = n \binom{n-1}{k-1} \quad (1)$$

ta thay k bởi $k+1$ và n bởi $n+1$ ta thu được

$$\frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} \quad (2)$$

sử dụng kết quả này ta sẽ chứng minh được rằng

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} \binom{n}{i} = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1)$$

Đây là hướng làm rất tự nhiên mà không phải sử dụng tới công cụ đạo hàm. Quay lại với đẳng thức (1), khi đó áp dụng đẳng thức này vào biểu thức $(k-1)k \binom{n}{k}$ ta thu được

$$(k-1)k \binom{n}{k} = n(k-1) \binom{n-1}{k-1} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2} \quad (3)$$

Áp dụng đẳng thức này ta sẽ chứng minh được rằng

$$\sum_{i=2}^n i(i-1) \binom{n}{i} = n(n-1) \sum_{i=2}^{n-2} \binom{n-2}{i} = n(n-1) \cdot 2^{n-2}$$

Bây giờ để tăng mức độ khó hơn, ta sẽ xét tới đẳng thức

$$k^2 \binom{n}{k} = k(k-1) \binom{n}{k} + k \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2} + n \binom{n-1}{k-1} \quad (4)$$

Sử dụng đẳng thức này ta sẽ chứng minh được

$$\sum_{i=1}^n i^2 \binom{n}{i} = n(n-1) \sum_{i=2}^n \binom{n-2}{i-2} + n \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} = n(n-1)2^{n-2} + n \cdot 2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$$

BÀI 4.

Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2i} \binom{2n}{2i-1} = \frac{2^{2n}-1}{2n+1}$.

Chứng minh. Với bài toán này ta đã được tìm hiểu cách sử dụng tích phân, ở phần này ta sẽ tìm hiểu một lời giải tự nhiên hơn bằng cách sử dụng đẳng thức (2). Ta có

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2i} \binom{2n}{2i-1} = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^n \binom{2n+1}{2i} = \frac{1}{2n+1} \left(\sum_{i=0}^n \binom{2n+1}{2i} - 1 \right) = \frac{1}{2n+1} (2^{2n} - 1)$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh. □



Qua bài toán này ta có thể thấy rằng công thức (2) là một công cụ cực kì đắc lực trong việc giải quyết các bài toán chứng minh khó. Sau đây là một bài toán phức tạp hơn sử dụng tới đẳng thức (2).

Ta sử dụng đẳng thức (2) hai lần cho biểu thức sau, ta thu được

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k} &= \frac{1}{k+2} \left(\frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \right) = \frac{1}{k+2} \cdot \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{k+2} \binom{n+1}{k+1} \right) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2} \binom{n+2}{k+2} \end{aligned} \quad (5)$$

Trước khi vào tìm hiểu bài toán thứ 5, ta sẽ nhắc lại một số các kết quả đã có.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k; \\ g_1(x) &= (1-x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k x^k; \\ f_2(x) &= (x+1)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k; \\ g_2(x) &= (1-x)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^k x^k. \end{aligned}$$

Từ đây suy ra được

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \frac{f_1(x) + g_1(x)}{2} = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} x^{2k}; \\ h_2(x) &= \frac{f_2(x) + g_2(x)}{2} = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} x^{2k}; \\ p_1(x) &= \frac{f_1(x) - g_1(x)}{2} = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k-1} x^{2k-1}; \\ p_2(x) &= \frac{f_2(x) - g_2(x)}{2} = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} x^{2k+1}. \end{aligned}$$

Như vậy ta nhận thấy rằng

$$\begin{aligned} f_1(1) &= p_2(1) = 2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1}; \\ h_1(1) &= p_1(1) = 2^{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k-1}; \\ f_2(1) &= 2^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}; \\ h_2(1) &= 2^{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k}. \end{aligned}$$

Từ $f_1(1)$ và $f_2(1)$ ta suy ra được $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ (*).

Đến đây kết hợp với đẳng thức (5) ta sẽ tính được tổng

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \frac{1}{(i+1)(i+2)} \binom{n}{i} &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{i=0}^n \binom{n+2}{i+2} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(2^{n+2} - \binom{n+2}{0} - \binom{n+2}{1} \right) \\ &= \frac{2^{n+2} - n - 3}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Sau đây ta sẽ đi tìm hiểu một bài toán khó hơn nữa.

BÀI 5.

Tính tổng $\sum_{i=3}^n i(i-1)(i-2) \binom{n}{i}$.

Chứng minh. Từ các bài toán ở trên ta sẽ rút ra được mấu chốt là phải sử dụng các đẳng thức đã có để cố định các biểu thức đứng trước công thức tổ hợp, tức là sao? Hãy để ý tới đẳng thức $\frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}$, ta đã biến đổi để từ công thức ban đầu chứa $\frac{1}{k+1}$ trở thành biểu thức chứa đại lượng $\frac{1}{n+1}$, đây chính là đại lượng cố định. Công việc còn lại là tính tổng các tổ hợp, và ta đã có rất nhiều công cụ để làm việc này. Quay lại bài toán này, ta sẽ áp dụng đẳng thức (1) ba lần, khi đó ta được

$$\begin{aligned} (k-2)(k-1)k \binom{n}{k} &= (k-2)(k-1)n \binom{n-1}{k-1} \\ &= n(k-2)(k-1) \binom{n-1}{k-1} \\ &= n(k-2)(n-1) \binom{n-2}{k-2} \\ &= n(n-1)(k-2) \binom{n-2}{k-2} \\ &= n(n-1)(n-2) \binom{n-3}{k-3} \end{aligned}$$

Áp dụng kết quả (*) ta tính được

$$\sum_{i=3}^n i(i-1)(i-2) \binom{n}{i} = n(n-1)(n-2) \sum_{i=3}^n \binom{n-3}{i-3} = n(n-1)(n-2) \cdot 2^{n-3}$$

Đến đây bài toán đã được giải quyết. □

BÀI 6.

Tính tổng $\sum_{i=0}^n \frac{1}{(i+1)(i+2)(i+3)} \binom{n}{i}$.

Chứng minh. Với bài toán này, nhận thấy có phân thức nên ta sẽ áp dụng đẳng thức (2) ba lần để biến đổi, ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \binom{n}{k} &= \frac{1}{(k+2)(k+3)} \cdot \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{(k+2)(k+3)} \cdot \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{k+3} \cdot \frac{1}{k+2} \binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{k+3} \cdot \frac{1}{n+2} \binom{n+2}{k+2} \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2} \cdot \frac{1}{k+3} \binom{n+2}{k+2} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2} \cdot \frac{1}{n+3} \binom{n+3}{k+3} \end{aligned}$$

Áp dụng đẳng thức (*) ta được

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n \frac{1}{(i+1)(i+2)(i+3)} \binom{n}{i} &= \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \sum_{i=3}^n \binom{n+3}{i+3} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \left(2^{n+3} - \binom{n+3}{0} - \binom{n+3}{1} - \binom{n+3}{2} \right) \\ &= \frac{2^{n+4} - n^2 - 7n - 14}{2(n+1)(n+2)(n+3)}\end{aligned}$$

Đến đây bài toán đã được giải quyết. $\square$

Hơn thế nữa từ đẳng thức (2) ta cũng chứng minh được rằng $\frac{1}{2k+1} \binom{2n}{2k} = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{2k+1}$, từ đó ta tính được biểu thức

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{2i+1} \binom{2n}{2i} = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=0}^n \binom{2n+1}{2i+1} = \frac{p_2(1)}{2n+1} = \frac{2^{n+1}}{2n+1}$$

Sau đây là một bài toán có dạng gần tương tự như này, tuy nhiên sẽ phức tạp hơn.

BÀI 7.

Tính tổng $\sum_{i=0}^n \frac{1}{2i+2} \binom{2n}{2i}$.

Chứng minh. Vẫn như các bài toán ở trên, ta áp dụng đẳng thức để biến đổi

$$\begin{aligned}\frac{1}{2k+2} \binom{2n}{2k} &= \frac{2k+1}{2k+2} \frac{1}{2k+1} \binom{2n}{2k} \\ &= \frac{2k+1}{2k+2} \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{2k+1} \\ &= \frac{2k+1}{2n+1} \frac{1}{2k+2} \binom{2n+1}{2k+1} \\ &= \frac{2k+2-1}{(2n+1)(2k+2)} \binom{2n+1}{2k+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{2k+1} - \frac{1}{2n+1} \frac{1}{2k+2} \binom{2n+1}{2k+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{2k+1} - \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \binom{2n+2}{2k+2}\end{aligned}$$

Từ đó áp dụng công thức $p_2(1)$ và $p_1(1)$ ta có

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n \frac{1}{2i+2} \binom{2n}{2i} &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{2k+1} - \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \binom{2n+2}{2k+2} \right) \\ &= \frac{2^{2n}}{2n+1} - \frac{2^{2n+1}-1}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n \cdot 2^{2n+1} + 1}{(2n+1)(2n+2)}\end{aligned}$$

Đến đây bài toán đã được giải quyết. $\square$

BÀI 8.

Tính tổng $\sum_{i=1}^n \frac{2^{2i}}{2i} \binom{2n}{2i-1}$.

Chứng minh. Sử dụng đẳng thức (2) ta có

$$\frac{2^{2k}}{2k} \binom{2n}{2k-1} = 2^{2k} \frac{1}{2k} \binom{2n}{2k-1} = 2^{2k} \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{2k}$$

Khi đó áp dụng công thức $h_2(x)$ ta thu được

$$\sum_{i=1}^n \frac{2^{2i}}{2i} \binom{2n}{2i-1} = \frac{1}{2n+1} \left(\sum_{k=1}^n \binom{2n+1}{2k} 2^{2k} \right) = \frac{1}{2n+1} \left(h_2(2) - \binom{2n+1}{0} \right) = \frac{3(3^{2n}-1)}{2(2n+1)}$$

Đến đây bài toán đã được giải quyết. □



Như vậy qua các ví dụ ở trên ta đã phần nào hiểu được tư duy để tiếp cận các bài toán chứng minh đẳng thức tổ hợp này thông qua sử dụng một số các tính chất đẳng thức đặc biệt. Với cách làm đó ta có thể dễ dàng giải quyết bài toán sau đây.

BÀI 9.

Tính tổng $\sum_{i=1}^n 2i \binom{2n}{2i}$.

Chứng minh. Áp dụng đẳng thức (1) ta được $2k \binom{2n}{2k} = 2n \binom{2n-1}{2k-1}$, khi đó sử dụng đẳng thức $p_2(1)$ ta có

$$\sum_{i=1}^n 2i \binom{2n}{2i} = 2n \sum_{i=1}^n \binom{2n-1}{2i-1} = n \cdot 2^{2n-1}$$

Đến đây bài toán đã được giải quyết. □



Đây là một bài toán khá đơn giản, tương tự ta có thể sử dụng đẳng thức (1) để chứng minh rằng

$$k \cdot 2^{2k} \binom{2n}{2k} = 2^{2k-1} \cdot 2k \binom{2n}{2k} = 2^{2k-1} \cdot 2n \cdot \binom{2n-1}{2k-1}$$

Từ đó áp dụng đẳng thức $p_2(x)$ ta có

$$\sum_{i=1}^n i \cdot 2^{2i} \binom{2n}{2i} = 2n \sum_{i=1}^n 2^{2i-1} \binom{2n-1}{2i-1} = 2n \frac{(1+2)^{2n-1} - (1-2)^{2n-1}}{2} = n(3^{2n-1} + 1)$$

BÀI 10.

Tính tổng $S = \frac{1}{2018} \binom{2018}{1}^2 + \frac{2}{2017} \binom{2018}{2}^2 + \dots + \frac{2017}{2} \binom{2018}{2017}^2 + \frac{2018}{1} \binom{2018}{2018}^2$.

Chứng minh. Ta có $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k} \cdot \binom{n}{k-1}$ với $\forall k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \geq k$ nên

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2018} \binom{2018}{1} \cdot \frac{2018}{1} \binom{2018}{0} + \frac{2}{2017} \binom{2018}{2} \cdot \frac{2017}{2} \binom{2018}{1} + \dots + \frac{2018}{1} \binom{2018}{2018} \cdot \frac{1}{2018} \binom{2018}{2017} \\ &= \binom{2018}{1} \cdot \binom{2018}{0} + \binom{2018}{2} \cdot \binom{2018}{1} + \dots + \binom{2018}{2017} \cdot \binom{2018}{2016} + \binom{2018}{2018} \cdot \binom{2018}{2017} \end{aligned}$$

Mà $\binom{2018}{k} = \binom{2018}{2018-k}$ suy ra

$$S = \binom{2018}{1} \cdot \binom{2018}{2018} + \binom{2018}{2} \cdot \binom{2018}{2017} + \dots + \binom{2018}{2017} \cdot \binom{2018}{2} + \binom{2018}{2018} \cdot \binom{2018}{1}$$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned} (1+x)^{2018} &= \sum_{k=0}^{2018} \binom{2018}{k} x^k \Rightarrow (1+x)^{2018} \cdot (1+x)^{2018} \\ &= \sum_{k=0}^{2018} \binom{2018}{k} x^k \cdot \sum_{l=0}^{2018} \binom{2018}{l} x^l = \sum_{k,l=0}^{2018} \binom{2018}{k} \cdot \binom{2018}{l} x^{k+l} \end{aligned} \quad (1)$$

Suy ra hệ số của số hạng chứa x^{2019} trong khai triển của (1) là

$$S = \binom{2018}{1} \cdot \binom{2018}{2018} + \binom{2018}{2} \cdot \binom{2018}{2017} + \dots + \binom{2018}{2017} \cdot \binom{2018}{2} + \binom{2018}{2018} \cdot \binom{2018}{1}$$

Lại do

$$(1+x)^{2018} \cdot (1+x)^{2018} = (1+x)^{4036};$$

$$(1+x)^{4036} = \sum_{n=0}^{4036} \binom{4036}{n} x^n \quad (2)$$

Suy ra hệ số của số hạng chứa x^{2019} trong khai triển của (2) là $\binom{4036}{2019}$. Vậy ta được

$$S = \binom{2018}{1} \cdot \binom{2018}{2018} + \binom{2018}{2} \cdot \binom{2018}{2017} + \dots + \binom{2018}{2017} \cdot \binom{2018}{2} + \binom{2018}{2018} \cdot \binom{2018}{1} = \binom{4036}{2019}$$

$$= \frac{4036!}{2019! \cdot (4036-2019)!} = \frac{4036-2018}{2019} \frac{4036!}{2018! \cdot (4036-2018)!} = \frac{2018}{2019} \binom{4036}{2018}$$

Bài toán được giải quyết. □

BÀI 11.

Cho số nguyên dương n , tính tổng $S = \frac{-\binom{n}{1}}{2.3} + \frac{2\binom{n}{2}}{3.4} - \frac{3\binom{n}{3}}{4.5} + \dots + \frac{(-1)^n n \binom{n}{n}}{(n+1)(n+2)}$.

Chứng minh. Với $k, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$, ta có

$$\frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k+1)k!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}$$

Áp dụng vào ta được

$$\frac{k \cdot \binom{n}{k}}{(k+1)(k+2)} = \frac{\binom{n}{k}}{k+1} \left(1 - \frac{2}{k+2}\right) = \frac{\binom{n}{k}}{k+1} - 2 \frac{\binom{n}{k}}{(k+1)(k+2)} = \frac{\binom{n+1}{k+1}}{n+1} - 2 \frac{\binom{n+2}{k+2}}{(n+1)(n+2)}$$

Suy ra $S = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n+1}{i+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n+2}{i+2}$, ta có

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n+1}{i+1} = \sum_{i=-1}^n (-1)^i \binom{n+1}{i+1} + \binom{n+1}{0} - \binom{n+1}{1} = -(1-1)^{n+1} + 1 - (n+1) = -n$$

Và

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n+2}{i+2} = \sum_{i=-2}^n (-1)^i \binom{n+2}{i+2} - \left(\binom{n+2}{0} - \binom{n+2}{1} + \binom{n+2}{2} \right)$$

$$= (1-1)^{n+1} - \left(1 - (n+2) + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right) = -\frac{n^2+n}{2}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{1}{n+1} (-n) + \frac{2}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n^2+n}{2} = \frac{-n}{(n+1)(n+2)}. \quad \square$$

BÀI 12.

Chứng minh đẳng thức $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{n+j}{j} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{n}{j} 2^j$

Chứng minh. Trước tiên ta sử dụng đẳng thức quen thuộc sau đây $2^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j}$ và tính chất rất cơ bản $\binom{n}{k} \binom{k}{j} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j}$ thì vế phải của đẳng thức cần chứng minh có thể được viết lại thành

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k &= \sum_{k=0}^n \binom{m}{k} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \binom{m}{k} \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n \binom{n}{j} \binom{m}{k} \binom{n-j}{n-k} \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\sum_{k=j}^n \binom{m}{k} \binom{n-j}{n-k} \right) \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{m+(n-j)}{n-j} \end{aligned}$$

Từ đây áp dụng **đẳng thức Vandermonde** vào dấu bằng cuối dùng rồi cho $m = n$ thì ta thu được đẳng thức cần chứng minh. $\square$

BÀI 13.

Chứng minh đẳng thức $\sum_{0 \leq i < j \leq n} j \binom{n}{i} = 2^{n-3} (3n^2 + n)$

Chứng minh. Trước tiên ta có các biến đổi đại số và tính toán về trái như sau

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i < j \leq n} j \binom{n}{i} &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n j \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \sum_{j=i+1}^n j = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \left(\binom{n+1}{2} - \binom{i}{2} - i \right) \\ &= \binom{n+1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \binom{i}{2} - \sum_{i=0}^{n-1} i \binom{n}{i} \\ &= \binom{n+1}{2} (2^n - 1) - \sum_{i=2}^{n-1} \binom{n}{2} \binom{n-2}{i-2} - \sum_{i=1}^{n-1} n \binom{n-1}{i-1} \\ &= \binom{n+1}{2} (2^n - 1) - \binom{n}{2} \sum_{i=0}^{n-3} \binom{n-2}{i} - n \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i} \\ &= \binom{n+1}{2} (2^n - 1) - \binom{n}{2} (2^{n-2} - 1) - n(2^{n-1} - 1) = 2^{n-3} (3n^2 + n) \end{aligned}$$

vậy từ đây ta suy ra đẳng thức cần chứng minh. $\square$

BÀI 14.

Tìm tất cả các giá trị của r sao cho biểu thức $\frac{\binom{2009}{r}}{(r+36)!}$ đạt giá trị lớn nhất.

Chứng minh. Trước tiên thì ta đặt $a_r = \frac{\binom{2009}{r}}{(r+36)!}$ khi đó thì ta thu được

$$\frac{a_{r+1}}{a_r} = \frac{2009!}{(2008-r)!(r+1)!(r+37)!} : \frac{2009!}{(2009-r)!r!(r+36)!} = \frac{2009-r}{(r+1)(r+37)}$$

Khi đó thì ta thấy biểu thức $\frac{2019-r}{(r+1)(r+37)}$ giảm ngặt với mọi $r \in [0, 2009]$. Từ đó mà ta thu được kết quả sau

$$\begin{cases} \frac{a_{r+1}}{a_r} = 1 & \text{if } r = 29 \\ \frac{a_{r+1}}{a_r} > 1 & \text{if } r < 29 \\ \frac{a_{r+1}}{a_r} < 1 & \text{if } r > 29 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_0 < a_1 < \dots < a_{28} < a_{29} = a_{30} > a_{31} > a_{32} > \dots > a_{2009}$$

Do đó ta suy ra được $\max_{0 \leq r \leq 2009} a_r = a_{29} = a_{30} \Rightarrow r \in \{29, 30\}$. □

BÀI 15.

Chứng minh đẳng thức $T = 1 \binom{n}{1}^2 + 2 \binom{n}{2}^2 + \dots + n \binom{n}{n}^2 = \frac{n}{2} \binom{2n}{n}$.

Chứng minh. Trước tiên ta nên lưu ý một đẳng thức khá quen thuộc và rất quan trọng sau đây

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

Khi đó áp dụng vào vế trái của điều cần chứng minh thì ta thu được

$$\begin{aligned} T &= n \left[\binom{n-1}{0} \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} \binom{n}{1} + \dots + \binom{n-1}{n-1} \binom{n}{n} \right] \\ &= n \left[\binom{n-1}{n-1} \binom{n}{0} + \binom{n-1}{n-2} \binom{n}{1} + \dots + \binom{n-1}{0} \binom{n}{n} \right] \\ &= n \binom{2n-1}{n} \\ &= n \left[\binom{2n}{n} - \binom{2n-1}{n-1} \right] = n \binom{2n}{n} - n \binom{2n-1}{n-1} \\ &= n \binom{2n}{n} - \frac{n}{2} \binom{2n}{n} = \frac{n}{2} \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

do sử dụng **đẳng thức Vandermonde** ta thu được, vậy từ đây ta có đẳng thức cần chứng minh. □

BÀI 16.

Cho a, b là 2 số nguyên không âm, chứng minh rằng với $m \in \mathbb{Q}$ thì ta có

$$\binom{m}{a} \binom{m}{b} = \sum_{i=a}^{a+b} \binom{i}{a} \binom{a}{a+b-i} \binom{m}{i}$$

Chứng minh. Theo đẳng thức Vandermonde ta có $\binom{(m-a)+a}{b} = \sum_{k=0}^b \binom{m-a}{k} \binom{a}{b-k}$.

Vì $(m-a)+a = m$ nên ta viết lại như sau

$$\binom{m}{b} = \sum_{k=0}^b \binom{m-a}{k} \binom{a}{b-k} = \sum_{i=a}^{a+b} \binom{m-a}{i-a} \binom{a}{a+b-i}$$

Nhân cả hai vế với $\binom{m}{a}$ ta được

$$\binom{m}{a} \binom{m}{b} = \binom{m}{a} \sum_{k=0}^b \binom{m-a}{k} \binom{a}{b-k} = \sum_{i=a}^{a+b} \binom{m}{a} \binom{m-a}{i-a} \binom{a}{a+b-i}$$

Sử dụng tính chất tập con của tập con ta có

$$\sum_{i=a}^{a+b} \binom{m}{a} \binom{m-a}{i-a} \binom{a}{a+b-i} = \sum_{i=a}^{a+b} \binom{m}{i} \binom{i}{a} \binom{a}{a+b-i}$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh. $\square$

4.4 Ứng dụng đạo hàm trong chứng minh đẳng thức tổ hợp.

Đạo hàm cấp 1. Khi hệ số đứng trước tổ hợp tăng dần hoặc giảm dần từ 1, 2, 3, ..., n hay $n, \dots, 3, 2, 1$ tức là số hạng đó có dạng $k \binom{n}{k}$ hoặc $k \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k-1}$ thì ta có thể dùng đạo hàm cấp 1 để tính. Cụ thể

$$(a+x)^n = \binom{n}{0} a^n + 2 \binom{n}{1} a^{n-1} x + \dots + n \binom{n}{n} a x^n$$

Lấy đạo hàm hai vế theo x ta được

$$n(a+x)^{n-1} = \binom{n}{1} a^{n-1} + 2 \binom{n}{2} a^{n-2} x + \dots + n \binom{n}{n} a x^{n-1} \quad (1)$$

Đến đây thay x, a bằng hằng số thích hợp ta được tổng cần tìm. Trên đây là dấu hiệu nhận biết và phương pháp làm dạng này. Sau đây ta sẽ cùng tìm hiểu kỹ hơn qua các bài toán minh họa.

BÀI 1.

Tính tổng $\binom{n}{1} - 2 \binom{n}{2} + 3 \binom{n}{3} - 4 \binom{n}{4} + \dots + (-1)^{n-1} n \binom{n}{n}$.

Chứng minh. Ta thấy tổng cần tính có dạng như VP (1). Việc còn lại chỉ cần chọn $a = 1, x = -1$ ta tính được tổng bằng 0.

Cách khác. Sử dụng đẳng thức $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ ta tính được tổng bằng

$$n \binom{n-1}{0} - n \binom{n-1}{1} + n \binom{n-1}{2} - \dots + (-1)^{n-1} n \binom{n-1}{n-1} = n(1-1)^{n-1} = 0$$

Bài toán được giải quyết. $\square$

BÀI 2.

Tính tổng $2008 \binom{2007}{0} + 2007 \binom{2007}{1} + \dots + \binom{2007}{2007}$.

Chứng minh. Hệ số trước tổ hợp giảm dần từ 2008, 2007, ..., 1 nên dùng đạo hàm là điều dễ hiểu

$$(x+1)^{2007} = \binom{2007}{0} x^{2007} + \binom{2007}{1} x^{2006} + \dots + \binom{2007}{2007}$$

Bây giờ nếu đạo lấy đạo hàm thì chỉ được $2007 \binom{2007}{0} x^{2006}$ trong khi đó đề đến 2008 do đó ta phải nhân thêm với x vào đẳng thức trên rồi mới dùng đạo hàm

$$\begin{aligned} x(x+1)^{2007} &= \binom{2007}{0} x^{2008} + \binom{2007}{1} x^{2007} + \dots + \binom{2007}{2007} x \\ \Leftrightarrow (x+1)^{2006} (2008x+1) &= 2008 \binom{2007}{0} x^{2007} + 2007 \binom{2007}{1} x^{2006} + \dots + \binom{2007}{2007} \end{aligned}$$

Thay $x = 1$ vào ta tìm được tổng là 2009.22006. $\square$

BÀI 3.

Chứng minh rằng $(x+2)^n = 1.2^{n-1} \binom{n}{2} + 2.2^{n-2} \binom{n}{2} + \dots + n \binom{n}{n} = n3^{n-1}, \forall n \leq 1 \in \mathbb{Z}$.

Chứng minh. Ta có

$$(x+2)^n = \binom{n}{0}2^n + \binom{n}{1}2^{n-1}x + \binom{n}{2}2^{n-2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$$

Đạo hàm 2 vế theo biến x ta được $n(x+2)^{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} kx^{k-1}$.

Cho $x=1 \Rightarrow n.3^{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k$, điều phải chứng minh. □

BÀI 4.

Tính tổng $S = n2^{n-1} \binom{n}{0} + (n-1)2^{n-2}.3. \binom{n}{1} + (n-2)2^{n-3}.3^2. \binom{n}{2} + \dots + 3^{n-1} \binom{n}{n-1}$

Chứng minh. Nhận thấy hệ số đứng trước tổ hợp giảm dần $n, n-1, \dots, 3, 2, 1$ nên phải hoán đổi vị trí a và x .

Xét khai triển $(x+a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} a^k$.

Đạo hàm theo biến x ta được

$$n(x+a)^{n-1} = \sum_{k=1}^n (n-k) \binom{n}{k} x^{n-k-1} a^k$$

Thay $x=2, a=3$ ta được $S = n.5^{n-1}$.

Cách 2. Ta sẽ sử dụng tới 2 đẳng thức $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}, k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ ta có

$$\begin{aligned} S &= n2^{n-1} \binom{n}{n} + (n-1)2^{n-2}.3. \binom{n}{n-1} + (n-2)2^{n-3}.3^2. \binom{n}{n-2} + \dots + 3^{n-1} \binom{n}{1} \\ &= n2^{n-1} \binom{n-1}{n-1} + n.2^{n-2}.3. \binom{n-1}{n-2} + n2^{n-3}.3^2. \binom{n-1}{n-3} + \dots + n.3^{n-1} \binom{n-1}{0} \\ &= n \left(2^{n-1} \binom{n-1}{n-1} + 2^{n-2}.3. \binom{n-1}{n-2} + 2^{n-3}.3^2. \binom{n-1}{n-3} + \dots + 3^{n-1} \binom{n-1}{0} \right) \\ &= n(2+3)^{n-1} = n.5^{n-1} \end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết. □

BÀI 5.

Chứng minh rằng $\binom{n}{0} + 2 \binom{n}{1} + 3 \binom{n}{2} + \dots + (p+1) \binom{n}{p} + \dots + (n+1) \binom{n}{n} = (n+2)2^{n-1}$.

Chứng minh. Ta nhận thấy rằng nếu xét khai triển tổng quát thì các hệ số bị lệch đi 1 đơn vị, do đó để xử lý được ta sẽ nhân thêm vào 2 vế đại lượng x , xét khai triển $x(x+1)^n$ ta được

$$x(x+1)^n = x \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \Rightarrow (x+1)^n + nx(x+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

Cho $x=1$ ta có điều phải chứng minh. □

BÀI 6.

Tính tổng $S = 3 \binom{n}{0} + 4 \binom{n}{1} + 5 \binom{n}{2} + \dots + (n+3) \binom{n}{n}$.

Chứng minh. Nhận thấy rằng với $x = 1$ thì ta có

$$\begin{cases} 3 \binom{n}{0} = \left(\binom{n}{0} x^3 \right)' \\ 4 \binom{n}{1} = \left(\binom{n}{1} x^4 \right)' \\ \dots \\ (n+3) \binom{n}{n} = \left(\binom{n}{n} x^{n+3} \right)' \end{cases}$$

Từ đây ta suy ra được

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} x^3 + \binom{n}{1} x^4 + \binom{n}{2} x^5 + \dots + (n+3) \binom{n}{n} x^{n+3} &= x^3 \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \dots + \binom{n}{n} x^n \right) \\ &= x^3 (x+1)^n \end{aligned} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(x) = x^3(x+1)^n \Rightarrow f'(x) = 3x^2(x+1)^n + nx^3(x+1)^{n-1}$.

Kết hợp với (*) thì ta được

$$f'(x) = 3x^2 \binom{n}{0} + 4x^3 \binom{n}{1} + \binom{n}{2} 5x^4 + \dots + (n+3) x^{n+2} \binom{n}{n}$$

Chọn $x = 1$ ta có

$$S = 3 \binom{n}{0} + 4 \binom{n}{1} + 5 \binom{n}{2} + \dots + (n+3) \binom{n}{n} = 3 \cdot 2^n + n 2^{n-1} = 2^{n-1} (n+6)$$

Như vậy bài toán được giải quyết. □

BÀI 7.

Cho số nguyên dương n thỏa mãn đẳng thức tổ hợp $\binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + \dots + \binom{2n}{2n-1} = 512$. Tính tổng

$$S = 2^2 \binom{n}{2} - 3^2 \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \cdot n^2 \cdot \binom{n}{n}$$

Chứng minh. Ta có

$$(1+x)^{2n} = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} x + \binom{2n}{2} x^2 + \binom{2n}{3} x^3 + \dots + \binom{2n}{2n-1} x^{2n-1} + \binom{2n}{2n} x^{2n} \quad (1)$$

Thay $x = 1$ vào (1) ta có

$$2^{2n} = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} + \binom{2n}{3} + \dots + \binom{2n}{2n-1} + \binom{2n}{2n} \quad (2)$$

Thay $x = -1$ vào (1) ta có

$$0 = \binom{2n}{0} - \binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} - \binom{2n}{3} + \dots - \binom{2n}{2n-1} + \binom{2n}{2n} \quad (3)$$

Trừ từng vế của (2) và (3) ta có

$$2^{2n} = 2 \cdot \left(\binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + \dots + \binom{2n}{2n-1} \right) \Leftrightarrow \binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + \dots + \binom{2n}{2n-1} = 2^{2n-1}$$

Do vậy mà

$$\binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + \dots + \binom{2n}{2n-1} = 512 \Leftrightarrow 2^{2n-1} = 2^9 \Leftrightarrow 2n-1 = 9 \Leftrightarrow n = 5$$

Bởi vậy $S = 2^2 \binom{5}{2} - 3^2 \binom{5}{3} + 4^2 \binom{5}{4} - 5^2 \cdot \binom{5}{5}$. Ta có

$$(1+x)^5 = \binom{5}{0} + \binom{5}{1} x + \binom{5}{2} x^2 + \binom{5}{3} x^3 + \binom{5}{4} x^4 + \binom{5}{5} x^5$$

Từ đây lấy đạo hàm hai vế ta được

$$\begin{aligned} 5(1+x)^4 &= \binom{5}{1} + 2\binom{5}{2}.x + 3\binom{5}{3}.x^2 + 4\binom{5}{4}.x^3 + 5\binom{5}{5}.x^4 \Rightarrow 5x(1+x)^4 \\ &= \binom{5}{1}x + 2\binom{5}{2}.x^2 + 3\binom{5}{3}.x^3 + 4\binom{5}{4}.x^4 + 5\binom{5}{5}.x^5 \end{aligned} \quad (4)$$

Lại lấy đạo hàm hai vế (4), ta có

$$5(1+x)^4 + 20x(1+x)^3 = \binom{5}{1} + 2^2\binom{5}{2}.x + 3^2\binom{5}{3}.x^2 + 4^2\binom{5}{4}.x^3 + 5^2\binom{5}{5}.x^4 \quad (5)$$

Thay $x = -1$ vào (5) ta được

$$0 = \binom{5}{1} - 2\binom{5}{2} + 3^2\binom{5}{3} - 4^2\binom{5}{4} + 5^2\binom{5}{5} \Leftrightarrow 2\binom{5}{2} - 3^2\binom{5}{3} + 4^2\binom{5}{4} - 5^2\binom{5}{5} = \binom{5}{1}$$

Hay $S = 2^2\binom{5}{2} - 3^2\binom{5}{3} + 4^2\binom{5}{4} - 5^2\binom{5}{5} = 5.$ □

BÀI 8.

Tính tổng $S = 2.2^{2017}\binom{2018}{1} + 3.2^{2016}\binom{2018}{2} + 4.2^{2015}\binom{2018}{3} + \dots + 2019\binom{2018}{2018}.$

Chứng minh. Áp dụng khai triển nhị thức Newton ta có

$$\begin{aligned} (2+x)^{2018} &= \binom{2018}{0}.2^{2018} + \binom{2018}{1}.2^{2017}.x + \binom{2018}{2}.2^{2016}.x^2 + \dots + \binom{2018}{2018}.x^{2018} \\ \Leftrightarrow x(2+x)^{2018} &= \binom{2018}{0}.2^{2018}.x + \binom{2018}{1}.2^{2017}.x^2 + \binom{2018}{2}.2^{2016}.x^3 + \dots + \binom{2018}{2018}.x^{2019} \end{aligned}$$

Lấy đạo hàm theo x hai vế ta được

$$\begin{aligned} (x(2+x)^{2018})' &= (2+x)^{2018} + x.2018.(2+x)^{2017} \\ &= \binom{2018}{0}.2^{2018} + 2.\binom{2018}{1}.2^{2017}.x + 3.\binom{2018}{2}.2^{2016}.x^2 + \dots + 2019.\binom{2018}{2018}.x^{2018} \end{aligned}$$

Cho $x = 1$ ta được

$$\begin{aligned} 3^{2018} + 2018.3^{2017} &= \binom{2018}{0}.2^{2018} + 2.\binom{2018}{1}.2^{2017} + 3.\binom{2018}{2}.2^{2016} + \dots + 2019.\binom{2018}{2018} \\ \Rightarrow S &= 3^{2018} + 2018.3^{2017} - \binom{2018}{0}.2^{2018} = 2021.3^{2017} - 2^{2018} \end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết. □

BÀI 9.

Tính tổng $S = \frac{1}{2017} \left(2.3\binom{2017}{2} + 3.3^2\binom{2017}{3} + 4.3^3\binom{2017}{4} + \dots + 2017.3^{2016}\binom{2017}{2017} \right).$

Chứng minh. Xét khai triển

$$P(x) = (1+x)^{2017} = \binom{2017}{0} + \binom{2017}{1}x + \binom{2017}{2}x^2 + \binom{2017}{3}x^3 + \binom{2017}{4}x^4 + \dots + \binom{2017}{2017}x^{2017}$$

Lấy đạo hàm hai vế ta được:

$$2017(1+x)^{2016} = \binom{2017}{1} + 2\binom{2017}{2}x + 3\binom{2017}{3}x^2 + 4\binom{2017}{4}x^3 + \dots + 2017\binom{2017}{2017}x^{2016}$$

Cho $x = 3$ ta được

$$2017 \cdot 4^{2016} = \binom{2017}{1} + 2 \cdot 3 \binom{2017}{2} + 3 \cdot 3^2 \binom{2017}{3} + 4 \cdot 3^3 \binom{2017}{4} + \dots + 2017 \cdot 3^{2016} \binom{2017}{2017}$$

Tương đương với

$$\begin{aligned} 2017 \cdot 4^{2016} - \binom{2017}{1} &= 2 \cdot 3 \binom{2017}{2} + 3 \cdot 3^2 \binom{2017}{3} + 4 \cdot 3^3 \binom{2017}{4} + \dots + 2017 \cdot 3^{2016} \binom{2017}{2017} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2017} (2017 \cdot 4^{2016} - 2017) &= \frac{1}{2017} \left(2 \cdot 3 \binom{2017}{2} + 3 \cdot 3^2 \binom{2017}{3} + 4 \cdot 3^3 \binom{2017}{4} + \dots + 2017 \cdot 3^{2016} \binom{2017}{2017} \right) \\ \Leftrightarrow 4^{2016} - 1 &= S \end{aligned}$$

Như vậy bài toán được giải quyết. □

BÀI 10.

Cho số nguyên dương n thỏa mãn $2 \binom{n}{1} + 3 \binom{n}{2} + \dots + (n+1) \binom{n}{n} = 2621439$. Số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ bằng bao nhiêu?

Chứng minh. Ta có $x(1+x)^n = \binom{n}{0}x + \binom{n}{1}x^2 + \binom{n}{2}x^3 + \dots + \binom{n}{n}x^{n+1}$.

Lấy đạo hàm hai vế ta được

$$(x+1)^n + nx(x+1)^{n-1} = \binom{n}{0} + 2 \binom{n}{1}x + 3 \binom{n}{2}x^2 + \dots + (n+1) \binom{n}{n}x^n$$

Cho $x = 1$, ta có

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} + 2 \binom{n}{1} + 3 \binom{n}{2} + \dots + (n+1) \binom{n}{n} &= 2^n + n2^{n-1} = 2^{n-1}(2+n) \\ \Rightarrow 2^{n-1}(2+n) - 1 &= 2621439 \\ \Leftrightarrow 2^{n-1}(2+n) = 2621440 &\Leftrightarrow 2^n = \frac{2621440}{2+n} \cdot 2 \quad (*) \end{aligned}$$

Xét $f(n) = 2^n$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ và $g(n) = 2 \cdot \frac{2621440}{2+n}$ là hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Ta có $f(18) = g(18) \Rightarrow n = 18$ là nghiệm duy nhất của (*).

Khi đó số hạng tổng quát của khai triển $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{18}$ là $\binom{18}{k} x^{36-3k}$ với $k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq 18$.

Vậy số hạng không chứa x là $\binom{18}{12} = 18564$. □

BÀI 11.

Tính tổng $\binom{2017}{1} - 2^2 \binom{2017}{2} + 3 \cdot 2^2 \binom{2017}{3} - 4 \cdot 2^3 \binom{2017}{4} + \dots - 2016 \cdot 2^{2015} \binom{2017}{2016} + 2017 \cdot 2^{2016} \binom{2017}{2017}$?

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} (1-x)^{2017} &= \sum_{k=0}^{2017} \binom{2017}{k} \cdot (-1)^k \cdot x^k \\ \Rightarrow [(1-x)^{2017}]' &= \sum_{k=0}^{2017} \left[\binom{2017}{k} \cdot (-1)^k \cdot x^k \right]' \\ \Leftrightarrow 2017 \cdot (1-x)^{2016} &= \sum_{k=0}^{2017} \binom{2017}{k} (-1)^k x^{k-1} \end{aligned}$$

Cho $x = 2$ ta được

$$\binom{2017}{1} - 2^2 \binom{2017}{2} + 3 \cdot 2^2 \binom{2017}{3} - 4 \cdot 2^3 \binom{2017}{4} + \dots - 2016 \cdot 2^{2015} \binom{2017}{2016} + 2017 \cdot 2^{2016} \binom{2017}{2017} = 2017$$

Bài toán được giải quyết. $\square$

Như vậy ta đã tìm hiểu xong dạng sử dụng đạo hàm cấp 1, sau đây ta sẽ tìm hiểu các bài toán sử dụng tới đạo hàm cấp 2.

Đạo hàm cấp 2. Khi hệ số đứng trước tổ hợp có dạng $1, 2, 3, \dots, (n-1)n$ hay $(n-1)n, \dots, 3, 2, 2, 1$ hay $1^2, 2^2, \dots, n^2$ tức có dạng $k(k-1) \binom{n}{k}$ hay tổng quát hơn $k(k-1) \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ thì ta có thể dùng đạo hàm đến cấp 2 để tính. Xét đa thức

$$(a + bx)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} a^{n-1} bx + \dots + \binom{n}{n} b^n x^n$$

Khi đó đạo hàm hai vế theo x ta được

$$bn(a + bx)^{n-1} = \binom{n}{1} a^{n-1} b + 2 \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 x + \dots + n \binom{n}{n} b^n x^{n-1}$$

Đạo hàm lần nữa ta được

$$b^2 n(n-1) (a + bx^{n-2}) = 2 \cdot 1 \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + n(n-1) \binom{n}{n} b^n x^{n-1} \quad (2)$$

Đến đây ta gần như giải quyết xong ví dụ toán chỉ việc thay a, b, x bởi các hằng số thích hợp nữa thôi. Sau đây ta sẽ cùng đi vào các ví dụ minh họa để hiểu rõ hơn phương pháp!

Bài 1.

Cho hàm số $f(x) = (1+x)^n, (2 \leq n \leq \mathbb{Z})$.

i) Tính $f''(1)$.

ii) Chứng minh rằng $2 \cdot 1 \binom{n}{2} + 3 \cdot 2 \binom{n}{3} + \dots + (n-1)n \binom{n}{n} = n(n-1)2^{n-2}$.

Chứng minh. i) Ta có $f'(x) = n(1+x)^{n-1} \Rightarrow f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} \Rightarrow f''(1) = n(n-1)2^{n-2}$.

ii) Ta có khai triển

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^k \\ &\Rightarrow f'(x) = \binom{n}{1} + \sum_{k=2}^n k \binom{n}{k} x^{k-1} \\ &\Rightarrow f''(x) = \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^{k-2} \\ &\Rightarrow f''(1) = \sum_{k=1}^n k(k-1) \binom{n}{k} = 2^{n-2} \end{aligned}$$

Như vậy đến đây ta có điều phải chứng minh. $\square$

Từ câu ii) thay $n-1 = n+1$ thì ta có một bài toán khác.

Chứng minh rằng

$$2 \cdot 1 \binom{n}{1} + 3 \cdot 2 \binom{n}{2} + \dots + (n+1)n \binom{n}{n} = n(n+1)2^{n-2}$$

Với bài toán này ta giải như sau. Xét nhị thức

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \dots + \binom{n}{n} x^n$$

Nhân 2 vế của đẳng thức với $x \neq 0$ đồng thời lấy đạo hàm cấp 2 hai vế theo biến x ta được

$$2n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2} = 2\binom{n}{1}x + 3.2\binom{n}{2}x + \dots + (n+1)n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

Cho $x = 2$ ta được điều phải chứng minh.

BÀI 2.

Rút gọn tổng sau $S = 1^2\binom{2009}{1}2^{2008} + 2^2\binom{2009}{2}2^{2007} + 3^2\binom{2009}{3}2^{2006} + \dots + 2009^2\binom{2009}{2009}$

i) Tính $f''(1)$.

ii) Chứng minh rằng $2.1\binom{n}{2} + 3.2\binom{n}{3} + \dots + (n-1)n\binom{n}{n} = n(n-1)2^{n-2}$.

Chứng minh. Với ý tưởng như bài trên ta xét đa thức

$$(x+2)^{2009} = \binom{2009}{0}2^{2009} + \binom{2009}{1}2^{2008}x + \binom{2009}{2}2^{2007}x^2 + \dots + \binom{2009}{2009}x^{2009}$$

Lấy đạo hàm 2 vế ta được

$$2.2009(x+2)^{2008} = 1\binom{2009}{1}2^{2008} + 2\binom{2009}{2}2^{2007}x + \dots + 2009\binom{2009}{2009}x^{2008}$$

Nếu ta tiếp tục đạo hàm lần nữa thì chỉ thu được 1, 2, 3, do đó để thu được $2^2, 3^2, \dots$ ta phải nhân thêm hai vế với x rồi mới lấy đạo hàm, ta có

$$\begin{aligned} 2009x(x+2)^{2008} &= 1\binom{2009}{1}2^{2008}x + 2\binom{2009}{2}2^{2007}x^2 + \dots + 2009\binom{2009}{2009}x^{2009} \\ &\Rightarrow 2009(x+2)^{2008} + 2009.2008x(x+2)^{2007} \\ &= 1^2\binom{2009}{1}2^{2008} + 2^2\binom{2009}{2}2^{2007}x + \dots + 2009^2\binom{2009}{2009}x^{2008} \end{aligned}$$

Thay $x = 1$ rút gọn tổng trên ta được $2011.2009.3^{2007}$. Tương tự khi tính tổng

$$2.1\binom{n}{1} + 3.2\binom{n}{2} + 4.3\binom{n}{3} + \dots + (n+1)n\binom{n}{n}$$

ta cần chú ý là trước tổ hợp có một hệ số lớn hơn k trong $\binom{n}{k}$ nên ta phải nhân với x trước khi đạo hàm 2 lần. □

Sau đây chúng ta sẽ đi tìm hiểu một ứng dụng của tích phân trong chứng minh các đẳng thức tổ hợp.

4.5 Ứng dụng tích phân trong chứng minh đẳng thức tổ hợp.

Ý tưởng của phương pháp này là dựa vào hệ thức

$$\int_a^b x^k dx = \left(\frac{x^{k+1}}{k+1} \right) \Big|_a^b = \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{k+1}$$

Từ đây dễ dàng tìm được dấu hiệu để sử dụng phương pháp này là số hạng của tổng có dạng $\frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k}$.

Cụ thể xét tích phân $I = \int_a^b (c+dx)^n dx$ ta có thể tính bằng 2 cách.

- Tính trực tiếp. Ta có

$$I = \frac{1}{d} \int_a^b (c+dx)^n d(c+dx) = \frac{1}{d} \frac{(c+dx)^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b$$

- Tính gián tiếp. Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c^{n-k} d^k x^k \right) dx = \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} c^{n-k} d^k \int_a^b x^k dx \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} c^{n-k} d^k \left(\frac{x^{k+1}}{k+1} \right) \Big|_a^b \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} c^{n-k} d^k \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{k+1} \right) \end{aligned}$$

Hai cách trên là như nhau nên từ đó ta có được

$$\sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} c^{n-k} d^k \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{k+1} \right) = \frac{1}{d} \frac{(c+dx)^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b$$

Tùy từng bài toán ta chọn các hệ số a, b, c, d thích hợp! Để dễ dàng nhận biết hơn thì ta có thể chú ý như sau.

Chú ý. Nếu trong tổng dãy tổ hợp, các số hạng chứa các phân số $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots; \frac{1}{n}$ và mẫu số được xếp theo thứ tự tăng hoặc giảm đều theo một quy luật nào đó, ta nghĩ ngay đến việc sử dụng tích phân. Khi đó, ta thực hiện theo các bước sau.

Bước 1. Tìm hàm để tích phân với các cận thích hợp.

Bước 2. Tính tích phân trong cả hai vế: vế chưa khai triển nhị thức Newton và vế đã khai triển.

Bước 3. Cho hai kết quả bằng nhau và kết luận.

Trước khi vào các bài toán cụ thể ta cần nhớ các đẳng thức tích phân sau

$$1. \int_a^b (x+1)^n dx = \int_a^b \left(\binom{n}{0} + x \binom{n}{1} + x^2 \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} x^n \right) dx, \text{ hay tương đương với}$$

$$\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \left(x \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \frac{x^2}{2} + \dots + \binom{n}{n} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_a^b$$

$$2. \int_a^b (1-x)^n dx = \int_a^b \left(\binom{n}{0} - x \binom{n}{1} + x^2 \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} x^n \right) dx \text{ hay tương đương với}$$

$$\frac{-(1-x)^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \left(x \binom{n}{0} - \binom{n}{1} \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_a^b$$

$$3. \int_a^b (x+1)^n dx = \int_a^b \left(\binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} \right) dx \text{ hay tương đương với}$$

$$\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \left(\binom{n}{0} \frac{x^{n+1}}{n+1} + \binom{n}{1} \frac{x^n}{n} + \binom{n}{2} \frac{x^{n-1}}{n-1} + \dots + \binom{n}{n} x \right) \Big|_a^b$$

$$4. \int_a^b (x-1)^n dx = \int_a^b \left(\binom{n}{0} x^n - \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \right) dx \text{ hay tương đương với}$$

$$\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \left(\binom{n}{0} \frac{x^{n+1}}{n+1} - \binom{n}{1} \frac{x^n}{n} + \binom{n}{2} \frac{x^{n-1}}{n-1} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} x \right) \Big|_a^b$$

Sau đây ta sẽ đi vào tìm hiểu các ví dụ minh họa.

BÀI 1.

Tính tổng

$$S = \binom{n}{0} + \frac{2^2 - 1}{2} \binom{n}{1} + \frac{2^3 - 1}{3} \binom{n}{2} + \dots + \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} \binom{n}{n} \quad (n \geq 1)$$

Chứng minh. Về trái có chứa các phân số, mẫu số được xếp theo thứ tự tăng đều một đơn vị, ta nghĩ ngay đến việc sử dụng tích phân. Bây giờ, ta suy nghĩ hàm lấy tích phân, các cận và số được thay vào cho biến. Vì số hạng cuối cùng có hệ số $\frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$ nên ta biết cận từ 1 đến 2 và tổng không đan dấu nên ta sử dụng $\int_1^2 (1+x)^n dx$. Ta có

$$\begin{aligned} (x+1)^n &= \binom{n}{0} + x \binom{n}{1} + x^2 \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} x^n \\ \Rightarrow \int_1^2 (x+1)^n dx &= \int_1^2 \left(\binom{n}{0} + x \binom{n}{1} + x^2 \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} x^n \right) dx \\ \Leftrightarrow \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \Big|_1^2 &= \left(x \binom{n}{0} + \frac{1}{2} \binom{n}{1} x^2 + \frac{1}{3} \binom{n}{2} x^3 + \dots + \frac{1}{n+1} \binom{n}{n} x^{n+1} \right) \Big|_1^2 \\ \Leftrightarrow \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1} &= \binom{n}{0} + \frac{2^2 - 1}{2} \binom{n}{1} + \frac{2^3 - 1}{3} \binom{n}{2} + \dots + \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} \binom{n}{n} = S \end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết. □

BÀI 2.

Chứng minh rằng

$$\binom{n}{0} + \frac{1}{2} \binom{n}{1} + \frac{1}{3} \binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \binom{n}{n} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

Chứng minh. Về trái có chứa các phân số, ta nghĩ ngay đến việc sử dụng tích phân. Tổng không đan dấu, ta sử dụng $\int_0^1 (x+1)^n dx$. Xét khai triển

$$(x+1)^n = \binom{n}{0} + x \binom{n}{1} + x^2 \binom{n}{2} + \dots + x^n \binom{n}{n}$$

Ta có đẳng thức sau

$$\int_0^1 (x+1)^n dx = \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

Và đẳng thức

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\binom{n}{0} + x \binom{n}{1} + \dots + x^n \binom{n}{n} \right) dx &= \left(x \binom{n}{0} + \frac{1}{2} x^2 \binom{n}{1} + \dots + \frac{1}{n+1} \binom{n}{n} x^{n+1} \right) \Big|_0^1 \\ &= \binom{n}{0} + \frac{1}{2} \binom{n}{1} + \frac{1}{3} \binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \binom{n}{n} \end{aligned}$$

Từ 2 đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. □

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ. Chứng minh rằng

$$2 \binom{n}{0} - \frac{1}{2} \binom{n}{1} 2^2 + \frac{1}{3} \binom{n}{2} 2^3 - \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1} \binom{n}{n} 2^{n+1} = \frac{1}{n+1} (1 + (-1)^n)$$

Hướng dẫn. Về trái có chứa các phân số, ta nghĩ ngay đến việc sử dụng tích phân. Vì số hạng cuối cùng có hệ số $\frac{2^{n+1}}{n+1}$ nên ta biết cận từ 0 đến 2 và tổng đan dấu nên ta sử dụng $\int_0^2 (1-x)^n dx$.

BÀI 3.

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2} \binom{n}{1} + \frac{2}{3} \binom{n}{2} + \frac{3}{4} \binom{n}{3} + \dots + \frac{n}{n+1} \binom{n}{n} = \frac{(n-1)2^n + 1}{n+1}$$

Chứng minh. Về trái có chứa các phân số, ta nghĩ đến việc sử dụng tích phân. Vì số hạng cuối cùng có hệ số $\frac{n}{n+1}$ nên ta không thể nghĩ ra ngay một hàm số nào đó để tính tích phân. Bằng cách phân tích số hạng tổng quát $\frac{k}{k+1} \binom{n}{k} = \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \binom{n}{k}$, cho ta tổng sau

$$\left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} \right) - \left(\frac{1}{2} \binom{n}{1} + \frac{1}{3} \binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \binom{n}{n} \right)$$

Từ đó sử dụng $2^n - \int_0^1 (x+1)^n dx$.

Cách 1. Xét số hạng tổng quát trong vế trái

$$\frac{k}{k+1} \binom{n}{k} = \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \binom{n}{k}, (k = \overline{0, n})$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{i}{i+1} \binom{n}{i} &= \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} \right) - \left(\frac{1}{2} \binom{n}{1} + \frac{1}{3} \binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \binom{n}{n} \right) \\ &= 2^n - \int_0^1 (x+1)^n dx = 2^n - \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} = \frac{(n-1)2^n + 1}{n+1} \end{aligned}$$

Cách 2. Xét khai triển $(x+1)^n = \binom{n}{0} + x \binom{n}{1} + x^2 \binom{n}{2} + \dots + x^n \binom{n}{n}$. Lấy đạo hàm 2 vế ta được

$$n(x+1)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} x + 3 \binom{n}{3} x^2 + \dots + n \binom{n}{n} x^{n-1}$$

Ta có đẳng thức

$$\begin{aligned} \int_0^1 nx(x+1)^{n-1} dx &= \int_0^1 \left(n(1+x-1)(x+1)^{n-1} \right) dx \\ &= n \int_0^1 \left((x+1)^n - (x+1)^{n-1} \right) dx \\ &= n \left[\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(x+1)^n}{n} \right] \Big|_0^1 \\ &= \frac{n}{n+1} (2^{n+1} - 1) - (2^n - 1) = \frac{(n-1)2^n + 1}{n+1} \end{aligned}$$

Và

$$\int_0^1 \left(\binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} x + 3 \binom{n}{3} x^2 + \dots + n \binom{n}{n} x^{n-1} \right) dx = \frac{1}{2} \binom{n}{1} + \frac{2}{3} \binom{n}{2} + \dots + \frac{n}{n+1} \binom{n}{n}$$

Từ 2 điều trên ta có điều phải chứng minh. □

BÀI 4.

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2} \binom{2n}{1} + \frac{1}{4} \binom{2n}{3} + \frac{1}{6} \binom{2n}{5} + \dots + \frac{1}{2n} \binom{2n}{2n-1} = \frac{2^{2n} - 1}{2n+1}$$

Chứng minh. Xét các khai triển

$$\begin{cases} (x+1)^{2n} = \binom{2n}{0} + x\binom{2n}{1} + x^2\binom{2n}{2} + \dots + x^{2n}\binom{2n}{2n} \\ (1-x)^{2n} = \binom{2n}{0} - x\binom{2n}{1} + x^2\binom{2n}{2} - \dots + x^{2n}\binom{2n}{2n} \end{cases}$$

Trừ 2 vế đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} (x+1)^{2n} - (1-x)^{2n} &= 2 \left(x\binom{2n}{1} + x^3\binom{2n}{3} + \dots + x^{2n-1}\binom{2n}{2n-1} \right) \\ &\Rightarrow \int_0^1 \frac{(x+1)^{2n} - (1-x)^{2n}}{2} dx = \int_0^1 \left(x\binom{2n}{1} + x^3\binom{2n}{3} + \dots + x^{2n-1}\binom{2n}{2n-1} \right) dx \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+1)^{2n+1} + (1-x)^{2n+1}}{2(2n+1)} \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{2}\binom{2n}{1}x^2 + \frac{1}{4}\binom{2n}{3}x^4 + \dots + \frac{1}{2n}\binom{2n}{2n-1}x^{2n} \right) \Big|_0^1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\binom{2n}{1} + \frac{1}{4}\binom{2n}{3} + \frac{1}{6}\binom{2n}{5} + \dots + \frac{1}{2n}\binom{2n}{2n-1} = \frac{2^{2n}-1}{2n+1} \end{aligned}$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Nếu phải tính tổng $\binom{2n}{0} + \frac{1}{3}\binom{2n}{2} + \frac{1}{5}\binom{2n}{4} + \dots + \frac{1}{2n+1}\binom{2n}{2n}$ thì khi đó ta xét

$$P(x) = \frac{(x+1)^{2n} + (1-x)^{2n}}{2} = \binom{2n}{0} + x^2\binom{2n}{2} + \dots + \binom{2n}{2n}x^{2n}$$

Sau đó tính tích phân $\int_0^1 P(x) dx$.

Còn nếu phải tính tổng $\frac{1}{2}\binom{2n}{0} + \frac{1}{4}\binom{2n}{2} + \frac{1}{6}\binom{2n}{4} + \dots + \frac{1}{2n+2}\binom{2n}{2n}$ thì khi đó ta xét

$$G(x) = xP(x) = \binom{2n}{0}x + \binom{2n}{2}x^3 + \dots + \binom{2n}{2n}x^{2n+1}$$

Sau đó tính tích phân $\int_0^1 G(x) dx$.

BÀI 5.

Chứng minh rằng

$$2\binom{2n}{0} + \frac{2}{3}\binom{2n}{2} + \frac{2}{5}\binom{2n}{4} + \dots + \frac{2}{2n+1}\binom{2n}{2n} = \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \quad (n \geq 1)$$

Chứng minh. Xét khai triển

$$(x+1)^{2n} = \binom{2n}{0} + x\binom{2n}{1} + \dots + x^{2n}\binom{2n}{2n}$$

Ta có $\int_{-1}^1 (x+1)^{2n} dx = \frac{(x+1)^{2n+1}}{2n+1} \Big|_{-1}^1 = \frac{2^{2n+1}}{n+1}$ và đồng thời ta có

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left(\binom{2n}{0} + x\binom{2n}{1} + \dots + x^{2n}\binom{2n}{2n} \right) dx &= \left(\binom{2n}{0}x + \frac{1}{2}\binom{2n}{1}x^2 + \dots + \frac{1}{2n+1}\binom{2n}{2n}x^{2n+1} \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= 2\binom{2n}{0} + \frac{2}{3}\binom{2n}{2} + \dots + \frac{2}{2n+1}\binom{2n}{2n} \end{aligned}$$

Từ 2 đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. $\square$

BÀI 6.

Cho tích phân $\int_0^1 x^2 (1+x^3)^n dx = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)} (n \geq 2)$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3} \binom{n}{0} + \frac{1}{6} \binom{n}{1} + \frac{1}{9} \binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{3(n+1)} \binom{n}{n} = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}$$

Chứng minh. Xét tích phân

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x^2 \left(\binom{n}{0} + x^3 \binom{n}{1} + \binom{n}{2} x^6 + \dots + \binom{n}{n} x^{3n} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\binom{n}{0} x^2 + \binom{n}{1} x^5 + \dots + \binom{n}{n} x^{3n+2} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \binom{n}{0} + \frac{1}{6} \binom{n}{1} + \frac{1}{9} \binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{3(n+1)} \binom{n}{n} \end{aligned}$$

Mặt khác ta lại có $\int_0^1 x^2 (1+x^3)^n dx = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)} (n \geq 2)$, như vậy ta có điều phải chứng minh. $\square$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ.

Câu 1. Chứng minh rằng

$$1 - \frac{1}{3} \binom{n}{1} + \frac{1}{5} \binom{n}{2} - \frac{1}{7} \binom{n}{3} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{n}{n} = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$$

Gợi ý. Ta có $\int_0^1 x(1-x^2)^n dx = \frac{1}{2(n+1)}$.

Câu 2. Chứng minh rằng

$$1 - \frac{1}{3} \binom{n}{1} + \frac{1}{5} \binom{n}{2} - \frac{1}{7} \binom{n}{3} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{n}{n} = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$$

Gợi ý. Ta có $\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{\prod_{i=1}^n 2i}{\prod_{i=1}^n (2i+1)}$.

Chú ý rằng khi bài toán cho mà số hạng tổng quát không phải là $\frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$ mà là $\frac{1}{k+2} \binom{n}{k}$ thì ta cần phải nhân thêm x vào hàm đa thức cơ bản trước khi tính tích phân, còn nếu là $\frac{1}{k+3} \binom{n}{k}$ thì ta phải nhân thêm x^2 vào hàm đa thức cơ bản trước khi tính tích phân. Sau đây ta sẽ cùng hiểu rõ hơn qua bài toán sau.

BÀI 7.

Chứng minh rằng $\frac{1}{2} \binom{n}{0} + \frac{1}{3} \binom{n}{1} + \frac{1}{4} \binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{n+2} \binom{n}{n} = \frac{n(2^{n+1}+1)}{(n+1)(n+2)} (n \geq 1)$.

Chứng minh. Về trái có chứa các phân số, ta nghĩ đến việc sử dụng tích phân. Vì số hạng cuối cùng có hệ số $\frac{1}{k+2} \binom{n}{k}$ thì ta phải nhân thêm x vào hàm số cơ bản trước khi tính tích phân. Khi đó, ta sử dụng $\int_0^1 x(x+1)^n dx$. Ta có đẳng thức

$$\begin{aligned} \int_0^1 x(x+1)^n dx &= \int_0^1 (x+1)^{n+1} dx - \int_0^1 (x+1)^n dx \\ &= \left(\frac{(x+1)^{n+2}}{n+2} - \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_0^1 = \frac{n2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Và $\int_0^1 x(x+1)^n dx = \int_0^1 x \left(\binom{n}{0} + x \binom{n}{1} + \dots + x^n \binom{n}{n} \right) dx = \frac{1}{2} \binom{n}{0} + \frac{1}{3} \binom{n}{1} + \dots + \frac{1}{n+2} \binom{n}{n}$.

Từ 2 đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. $\square$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2} \binom{n}{0} - \frac{1}{3} \binom{n}{1} + \frac{1}{4} \binom{n}{2} - \dots + \frac{(-1)^n \binom{n}{n}}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

BÀI 8.

Giả sử số tự nhiên $n \geq 2$ thỏa mãn đẳng thức dưới đây, hãy tìm n ?

$$\binom{2n}{0} + \frac{\binom{2n}{2}}{3} + \frac{\binom{2n}{4}}{5} + \frac{\binom{2n}{6}}{7} + \dots + \frac{\binom{2n}{2n-2}}{2n-1} + \frac{\binom{2n}{2n}}{2n+1} = \frac{4096}{13}$$

Chứng minh. Giả sử số tự nhiên $n \geq 2$ thỏa mãn

$$\binom{2n}{0} + \frac{\binom{2n}{2}}{3} + \frac{\binom{2n}{4}}{5} + \frac{\binom{2n}{6}}{7} + \dots + \frac{\binom{2n}{2n-2}}{2n-1} + \frac{\binom{2n}{2n}}{2n+1} = \frac{8192}{15}$$

Ta có

$$\begin{aligned} (1+x)^{2n} &= \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1}x + \binom{2n}{2}x^2 + \dots + \binom{2n}{2n}x^{2n} \\ \Leftrightarrow \int_0^1 (1+x)^{2n} dx &= \left(\binom{2n}{0}x + \frac{1}{2} \binom{2n}{1}x^2 + \frac{1}{3} \binom{2n}{2}x^3 + \dots + \frac{1}{2n+1} \binom{2n}{2n}x^{2n+1} \right) \Big|_0^1 \\ \Leftrightarrow \frac{(1+x)^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^1 &= \left(\binom{2n}{0}x + \frac{1}{2} \binom{2n}{1}x^2 + \frac{1}{3} \binom{2n}{2}x^3 + \dots + \frac{1}{2n+1} \binom{2n}{2n}x^{2n+1} \right) \Big|_0^1 \\ \Leftrightarrow \frac{2(2^{2n+1}-1)}{2n+1} &= 2 \binom{2n}{0} + \frac{2}{2} \binom{2n}{1} + \frac{2}{3} \binom{2n}{2} + \dots + \frac{2}{2n+1} \binom{2n}{2n} \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác ta lại có

$$\begin{aligned} \int_0^{-1} (1+x)^{2n} dx &= \left(\binom{2n}{0}x + \frac{1}{2} \binom{2n}{1}x^2 + \frac{1}{3} \binom{2n}{2}x^3 + \dots + \frac{1}{2n+1} \binom{2n}{2n}x^{2n+1} \right) \Big|_0^{-1} \\ \Leftrightarrow \frac{-2}{2n+1} &= -2 \binom{2n}{0} + \frac{2}{2} \binom{2n}{1} - \frac{2}{3} \binom{2n}{2} + \dots + \frac{2}{2n+1} \binom{2n}{2n} \end{aligned} \quad (2)$$

Lấy (1) trừ (2), ta được

$$\frac{2^{2n+1}}{2n+1} = 2 \left(\binom{2n}{0} + \frac{\binom{2n}{2}}{3} + \frac{\binom{2n}{4}}{5} + \frac{\binom{2n}{6}}{7} + \dots + \frac{\binom{2n}{2n-2}}{2n-1} + \frac{\binom{2n}{2n}}{2n+1} \right) \Leftrightarrow \frac{2^{2n+1}}{2n+1} = 2 \cdot \frac{4096}{13} \Leftrightarrow n = 6$$

Như vậy bài toán được giải quyết. □

BÀI 9.

Giả sử số tự nhiên $n \geq 2$ thỏa mãn đẳng thức dưới đây, hãy tìm n ?

$$\binom{2n}{0} + \frac{\binom{2n}{2}}{3} + \frac{\binom{2n}{4}}{5} + \frac{\binom{2n}{6}}{7} + \dots + \frac{\binom{2n}{2n-2}}{2n-1} + \frac{\binom{2n}{2n}}{2n+1} = \frac{4096}{13}$$

Chứng minh. Với bài này ta sẽ có 2 hướng giải quyết như sau.

Cách 1. Ta có

$$\frac{\binom{n}{k}}{(k+1)(k+2)} = \frac{n!}{k!(n-k)!(k+1)(k+2)} = \frac{(n+2)!}{(n-k)!(k+2)!(n+1)(n+2)} = \frac{\binom{n+2}{k+2}}{(n+1)(n+2)}$$

Từ đây suy ra được

$$\sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n+2}{k+2}}{(n+1)(n+2)} \quad (*)$$

Ta xét khai triển sau

$$(1+x)^{n+2} = \binom{n+2}{0} + x \cdot \binom{n+2}{1} + x^2 \cdot \binom{n+2}{2} + x^3 \cdot \binom{n+2}{3} + \dots + x^{n+2} \cdot \binom{n+2}{n+2}$$

Chọn $x = 1 \Rightarrow 2^{n+2} = \binom{n+2}{0} + \binom{n+2}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+2}{3} + \dots + \binom{n+2}{n+2}$. Do đó (*) tương đương với

$$\frac{2^{100} - n - 3}{(n+1)(n+2)} = \frac{2^{n+2} - \binom{n+2}{0} - \binom{n+2}{1}}{(n+1)(n+2)} \Leftrightarrow 2^{100} = 2^{n+2} \Leftrightarrow n = 98$$

Cách 2. Ta có

$$\begin{aligned} S &= \frac{\binom{n}{0}}{1.2} + \frac{\binom{n}{1}}{2.3} + \frac{\binom{n}{2}}{3.4} + \dots + \frac{\binom{n}{n}}{(n+1)(n+2)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) \binom{n}{0} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \binom{n}{1} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \binom{n}{2} + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \binom{n}{n} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} \binom{n}{i} - \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+2} \binom{n}{i} \end{aligned}$$

Mặt khác ta lại có

$$\int_0^1 (1+x)^n dx - \int_0^1 x(1+x)^n dx = \int_0^1 2(1+x)^n dx - \int_0^1 (1+x)^{n+1} dx$$

Từ đây ta suy ra

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} \binom{n}{i} - \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+2} \binom{n}{i} &= \frac{2}{n+1} (1+x)^{n+1} \Big|_0^1 - \frac{1}{n+2} (1+x)^{n+2} \Big|_0^1 \\ \Rightarrow S &= \frac{2 \cdot 2^{n+1} - 2}{n+1} - \frac{2^{n+2} - 1}{n+2} = \frac{2^{n+2} - n - 3}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết. □

BÀI 10.

Tính tổng $S = \frac{-\binom{n}{1}}{2.3} + \frac{2\binom{n}{2}}{3.4} - \frac{3\binom{n}{3}}{4.5} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot n \binom{n}{n}}{(n+1)(n+2)}$.

Chứng minh. Ta có số hạng tổng quát

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{(-1)^k k \binom{n}{k}}{(k+1)(k+2)} = (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{2}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right) = (-1)^k \frac{2\binom{n}{k}}{k+2} + (-1)^{k+1} \frac{\binom{n}{k}}{k+1} \\ \Rightarrow S &= \sum_{k=1}^n \left((-1)^k \frac{2\binom{n}{k}}{k+2} + (-1)^{k+1} \frac{\binom{n}{k}}{k+1} \right) = 2 \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\binom{n}{k}}{k+2} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{\binom{n}{k}}{k+1} \end{aligned}$$

Xét khai triển

$$\begin{aligned}
 (x+1)^n &= \binom{n}{0} + x\binom{n}{1} + \dots + x^n\binom{n}{n} \\
 \Rightarrow \int_{-1}^0 (x+1)^n dx &= \int_{-1}^0 \left(\binom{n}{0} + x\binom{n}{1} + \dots + x^n\binom{n}{n} \right) dx \\
 \Rightarrow \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \Big|_{-1}^0 &= \left(\frac{x\binom{n}{0}}{1} + \frac{x^2\binom{n}{1}}{2} + \dots + \frac{x^{n+1}\binom{n}{n}}{n+1} \right) \Big|_{-1}^0 \\
 \Rightarrow \frac{1}{n+1} &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{\binom{n}{k}}{k+1}
 \end{aligned}$$

Tương tự ta có

$$\begin{aligned}
 x(x+1)^n &= x\binom{n}{0} + x^2\binom{n}{1} + \dots + x^{n+1}\binom{n}{n} \\
 \Rightarrow \int_{-1}^0 x(x+1)^n dx &= \int_{-1}^0 \left(x\binom{n}{0} + x^2\binom{n}{1} + \dots + x^{n+1}\binom{n}{n} \right) dx \\
 \Rightarrow \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\binom{n}{k}}{k+2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Như vậy ta có } S = 2 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) - \frac{1}{n+1} = -\frac{n}{(n+1)(n+2)}.$$

□

Như vậy ta đã tìm hiểu xong các bài toán sử dụng tích phân để chứng minh đẳng thức tổ hợp. Sau đây sẽ là một công cụ khác để giải quyết những bài toán khó hơn, đó là số phức.

BÀI 11.

Chứng minh đẳng thức $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$, với n, k là các số nguyên dương

Chứng minh. Trước tiên bằng công thức **nhị thức Newton** thì ta suy ra được

$$(1-x)^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} x^i = 1 + \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n}{i} x^i$$

vì thế ta suy ra

$$\frac{(1-x)^n - 1}{x} = \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n}{i} x^{i-1}$$

Khi đó lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế thì ta thu được

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^n - 1}{x} dx = \int_0^1 \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n}{i} x^{i-1} dx = \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n}{i} \int_0^1 x^{i-1} dx = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i} \binom{n}{i} \quad (1)$$

Mà ta có

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^n - 1}{x} dx = \int_1^0 \frac{z^n - 1}{1-z} (-dz) \text{ trong đó ta đặt } 1-x=z$$

vì thế mà ta suy ra được

$$\int_1^0 \frac{z^n - 1}{z-1} dz = \int_1^0 (1+z+z^2+\dots+z^{n-1}) dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_1^0 z^i dz = (-1) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) thì ta thu được

$$\begin{aligned} (-1) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) &= \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i} \binom{n}{i} \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} &= (-1) \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i} \binom{n}{i} = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{i} \binom{n}{i} \end{aligned}$$

hay từ đây ta thu được đẳng thức cần chứng minh. $\square$

4.6 Ứng dụng số phức chứng minh đẳng thức tổ hợp.

Trước tiên ta sẽ nhắc lại một số tính chất của số phức sau.

1. Hai số phức $z = x + iy, w = x' + iy'$ bằng nhau khi và chỉ khi $x = x', y = y'$.

2. Công thức Moivre $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \Rightarrow z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$.

3. Giải phương trình $x^3 - 1 = 0$ ta được nghiệm là $x_1 = 1; x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}; x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$, các nghiệm đó chính là các căn bậc ba của 1.

Đặt $a = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a^2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ và a có các tính chất sau

- i) $a + a^2 = -1$.
- ii) $a^3 = 1$.
- iii) $a^{3k} = 1$.
- iv) $a^{3k+1} = a$.
- v) $a^{3k+2} = a^2$.

Ý tưởng của phương pháp này dựa trên các tính chất của số ảo i .

$$i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i, k \in \mathbb{N}$$

Từ đó, ta xét đa thức $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Đặt

$$S_0 = \sum_{i=4k} a_i, S_1 = \sum_{i=4k+1} a_i, S_2 = \sum_{i=4k+2} a_i, S_3 = \sum_{i=4k+3} a_i$$

Ta có

$$\begin{cases} f(1) = (S_0 + S_2) + (S_1 + S_3) \\ f(-1) = (S_0 + S_2) - (S_1 + S_3) \\ f(i) = (S_0 - S_2) + (S_1 - S_3)i \\ f(-i) = (S_0 - S_2) - (S_1 - S_3)i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_0 = \frac{f(1) + f(-1) + 2\operatorname{Re}(f(i))}{4} \\ S_1 = \frac{f(1) - f(-1) + 2\operatorname{Im}(f(i))}{4} \\ S_2 = \frac{f(1) + f(-1) - 2\operatorname{Re}(f(i))}{4} \\ S_3 = \frac{f(1) - f(-1) - 2\operatorname{Im}(f(i))}{4} \end{cases}$$

Với $\operatorname{Re}(f(i)), \operatorname{Im}(f(i))$ lần lượt là phần thực và phần ảo của $f(i)$.

Dấu hiệu. Đây là vấn đề lớn nhất cần chú ý. Ta dùng số phức để tính tổng của các $\binom{n}{k}$ khi tổng này có các đặc điểm.

- Các dấu trong tổng xen kẽ đều nhau.
- k luôn lẻ, hoặc luôn chẵn hoặc khi chia k cho một số ta luôn được cùng một số dư (trong chương trình phổ thông ta chỉ làm với $k = 3n, k = 3n + 1, k = 3n + 2$).

Sau đây ta sẽ cùng tìm hiểu phương pháp này qua các ví dụ sau.

Dạng 1. Khai triển $(x+1)^n$, cho x nhận giá trị là những số phức thích hợp hoặc khai triển trực tiếp các số phức.

BÀI 1.

Tính tổng

$$1. A = \binom{2009}{0} - \binom{2009}{2} + \binom{2009}{4} - \dots + \binom{2009}{2008}.$$

$$2. B = -\binom{2009}{1} + \binom{2009}{3} - \binom{2009}{5} + \dots - \binom{2009}{2009}.$$

Chứng minh. Xét khai triển

$$(x+1)^{2009} = \binom{2009}{0} + x\binom{2009}{1} + x^2\binom{2009}{2} + \dots + x^{2009}\binom{2009}{2009}$$

Cho $x = -i$ ta có

$$\begin{aligned} (1-i)^{2009} &= \binom{2009}{0} + i\binom{2009}{1} + i^2\binom{2009}{2} + \dots + i^{2009}\binom{2009}{2009} \\ &= \left(\binom{2009}{0} - \binom{2009}{2} + \binom{2009}{4} - \dots + \binom{2009}{2008} \right) \\ &\quad + \left(-\binom{2009}{1} + \binom{2009}{3} - \binom{2009}{5} + \dots - \binom{2009}{2009} \right) i \end{aligned}$$

Mặt khác ta lại có

$$\begin{aligned} (1-i)^{2009} &= (\sqrt{2})^{2009} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)^{2009} \\ &= (\sqrt{2})^{2009} \left(\cos\frac{2009\pi}{4} - i\sin\frac{2009\pi}{4} \right) \\ &= (\sqrt{2})^{2009} \left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} \right) = 2^{1004} - i2^{1004} \end{aligned}$$

So sánh phần thực và phần ảo của $(1-i)^{2009}$ trong hai cách tính trên ta được.

- $A = \binom{2009}{0} - \binom{2009}{2} + \binom{2009}{4} - \dots + \binom{2009}{2008} = 2^{1004}.$
- $B = -\binom{2009}{1} + \binom{2009}{3} - \binom{2009}{5} + \dots - \binom{2009}{2009} = -2^{1004}.$

Bài toán được giải quyết. □

BÀI 2.

Tính tổng $S = \frac{1}{2^{50}} \left(\binom{50}{0} - 3\binom{50}{2} + 3^2\binom{50}{4} - \dots + 3^{24}\binom{50}{48} - 3^{25}\binom{50}{50} \right).$

Chứng minh. Xét khai triển

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{50} &= \frac{1}{2^{50}} \left(\binom{50}{0} - (i\sqrt{3})\binom{50}{1} + (i\sqrt{3})^2\binom{50}{2} + \dots - (i\sqrt{3})^{49}\binom{50}{49} + (i\sqrt{3})^{50}\binom{50}{50} \right) \\ &= \frac{1}{2^{50}} \left(\binom{50}{0} - (\sqrt{3})^2\binom{50}{2} + \dots - (\sqrt{3})^{50}\binom{50}{50} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2^{50}} \left(-\sqrt{3}\binom{50}{1} + (\sqrt{3})^3\binom{50}{3} - \dots - (\sqrt{3})^{49}\binom{50}{49} \right) i \end{aligned}$$

Mặt khác ta lại có

$$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{50} = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right)^{50} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

So sánh phần thực của $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{50}$ trong hai cách tính trên ta được

$$S = \frac{1}{2^{50}} \left(\binom{50}{0} - 3 \binom{50}{2} + 3^2 \binom{50}{4} - \dots + 3^{24} \binom{50}{48} - 3^{25} \binom{50}{50} \right) = -\frac{1}{2}$$

Như vậy bài toán được giải quyết. $\square$

BÀI 3.

$$\text{Tính tổng } S = 3^{10} \binom{20}{0} - 3^9 \binom{20}{2} + 3^8 \binom{20}{4} - 3^7 \binom{20}{6} + \dots - 3 \binom{20}{18} + \binom{20}{20}.$$

Chứng minh. Tương tự bài toán trên, xét khai triển

$$\begin{aligned} (i + \sqrt{3})^{20} &= (\sqrt{3})^{20} \binom{20}{0} + i(\sqrt{3})^{19} \binom{20}{1} - \dots - i\sqrt{3} \binom{20}{19} + \binom{20}{20} \\ &= \left(3^{10} \binom{20}{0} - 3^9 \binom{20}{2} + \dots - 3 \binom{20}{18} + \binom{20}{20} \right) \\ &\quad + \left((\sqrt{3})^{19} \binom{20}{1} - (\sqrt{3})^{17} \binom{20}{3} + \dots - \sqrt{3} \binom{20}{19} \right) i \end{aligned}$$

Mặt khác $(i + \sqrt{3})^{20} = -2^{19} - i2^{19}\sqrt{3}$, so sánh phần thực của $(i + \sqrt{3})^{20}$ trong hai cách tính trên ta có

$$S = 3^{10} \binom{20}{0} - 3^9 \binom{20}{2} + 3^8 \binom{20}{4} - 3^7 \binom{20}{6} + \dots - 3 \binom{20}{18} + \binom{20}{20} = -2^{19}$$

Như vậy bài toán được giải quyết. $\square$

BÀI 4.

$$\text{Tính tổng } S = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{2k}.$$

Chứng minh. Xét khai triển $(1 + i)^{2n}$ ta có

$$\begin{aligned} (1 + i)^n &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} i^k = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} i^{2k} + \sum_{k=1}^n \binom{2n}{2k-1} i^{2k-1} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{2k} + \sum_{k=1}^n i \cdot (-1)^{k-1} \binom{2n}{2k-1} \end{aligned}$$

Từ đó ta suy ra được

$$S = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{2k} = \operatorname{Re} [(1 + i)^{2n}]$$

Và đồng thời

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{2n}{2k-1} = \operatorname{Im} [(1 + i)^{2n}]$$

Mặt khác ta lại có

$$(1 + i)^{2n} = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^{2n} = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2} \right)$$

Như vậy suy ra

$$S = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{2k} = 2^n \cos \frac{n\pi}{2}$$

Và

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{2n}{2k-1} = 2^n \sin \frac{n\pi}{2}$$

Bài toán được giải quyết. $\square$

BÀI 5.

Tính tổng $S = \sum_{k=0}^{3n} \binom{12n}{4k}$.

Chứng minh. Nhìn vào bài toán này ta sẽ nghĩ ngay tới khai triển $(1+i)^{12n}$, tuy nhiên sử dụng khai triển này có cho ta được kết quả của bài toán hay không? Ta thử xét

$$(1+i)^{12n} = \sum_{k=0}^{12n} \binom{12n}{k} i^k$$

Các số hạng của ta “cách đều” một khoảng bội của 4, như vậy một cách tự nhiên ta sẽ tách khai triển trên thành 4 tổng theo phân đoạn modulo 4 (theo $k \bmod 4$), ta có

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{12n} \binom{12n}{k} i^k &= \sum_{k=0}^{3n} \binom{12n}{4k} i^{4k} + \sum_{k=0}^{3n-1} \binom{12n}{4k+1} i^{4k+1} + \sum_{k=0}^{3n-1} \binom{12n}{4k+2} i^{4k+2} + \sum_{k=0}^{3n-1} \binom{12n}{4k+3} i^{4k+3} \\ &= \sum_{k=0}^{3n} \binom{12n}{4k} + i \sum_{k=0}^{3n-1} \binom{12n}{4k+1} - \sum_{k=0}^{3n-1} \binom{12n}{4k+2} - i \sum_{k=0}^{3n-1} \binom{12n}{4k+3} \end{aligned}$$

Đến đây, ta gặp một vướng mắc nhỏ, đó là

$$\operatorname{Re} \left[(1+i)^{12n} \right] = \sum_{k=0}^{3n} \binom{12n}{4k} - \sum_{k=0}^{3n-1} \binom{12n}{4k+2} \quad (1)$$

Như vậy là so với tổng cần tính giá trị của ta “thừa ra” một tổng ... tương tự. Không vấn đề gì, trở lại với số thực ta xét khai triển.

$$(1+x)^{12n} = \sum_{k=0}^{3n} \binom{12n}{4k} x^{4k} + \sum_{k=0}^{3n-1} \binom{12n}{4k+1} x^{4k+1} + \sum_{k=0}^{3n-1} \binom{12n}{4k+2} x^{4k+2} + \sum_{k=0}^{3n-1} \binom{12n}{4k+3} x^{4k+3}$$

Và

$$(1-x)^{12n} = \sum_{k=0}^{3n} \binom{12n}{4k} x^{4k} - \sum_{k=0}^{3n-1} \binom{12n}{4k+1} x^{4k+1} + \sum_{k=0}^{3n-1} \binom{12n}{4k+2} x^{4k+2} - \sum_{k=0}^{3n-1} \binom{12n}{4k+3} x^{4k+3}$$

Cho $x = 1$ thì ta được

$$2^{12n} = 2 \sum_{k=0}^{3n} \binom{12n}{4k} + 2 \sum_{k=0}^{3n-1} \binom{12n}{4k+2}$$

hay

$$2^{12n-1} = \sum_{k=0}^{3n} \binom{12n}{4k} + \sum_{k=0}^{3n-1} \binom{12n}{4k+2}$$

Cộng về theo về với (1) ta có

$$2^{12n-1} + \operatorname{Re} \left[(1+i)^{12n} \right] = 2 \sum_{k=0}^{3n} \binom{12n}{4k} = 2S$$

Việc còn lại ta chỉ phải tìm $\operatorname{Re} \left[(1+i)^{12n} \right]$, ta có

$$(1+i)^{12n} = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^{12n} = 2^{6n} (\cos(3n\pi) + i \sin(3n\pi)) = (-1)^n 2^{6n}$$

Từ đó suy ra được

$$S = \sum_{k=0}^{3n} \binom{12n}{4k} = 2^{12n-2} + (-1)^n 2^{6n-1}$$

Như vậy bài toán được giải quyết. □

Từ bài toán này ta chứng minh được đẳng thức sau

$$\operatorname{Im} \left[(1+i)^{12n} \right] = \sum_{k=0}^{3n-1} \binom{12n}{4k+1} - \sum_{k=0}^{3n-1} \binom{12n}{4k+3} = 0$$

BÀI 6.

Chứng minh rằng $\left[1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \dots\right]^2 + \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \dots\right]^2 = 2^n$.

Chứng minh. Ta có

$$(1+i)^n = \left[1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \dots\right] + i \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \dots\right]$$

Mặt khác ta lại có

$$(1+i)^n = \sqrt{2^n} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4}\right) = \sqrt{2^n} \cos \frac{n\pi}{4} + i \sqrt{2^n} \sin \frac{n\pi}{4}$$

Do đó ta suy ra

$$\begin{aligned} \left[1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \dots\right]^2 &= 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{4}\right)^2 \\ \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \dots\right]^2 &= 2^n \left(\sin \frac{n\pi}{4}\right)^2 \end{aligned}$$

Cộng 2 đẳng thức trên, ta có đẳng thức cần chứng minh.

Cách 2. Xét số phức $z = 1 + i$. Khi đó ta có

$$z^n = (1+i)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k = \left[1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \dots\right] + i \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \dots\right]$$

Do đó suy ra được

$$|z^n|^2 = \left[1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \dots\right]^2 + \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \dots\right]^2$$

Mặt khác ta lại có $|z^n| = |z|^n = (\sqrt{2})^n$, từ đây suy ra điều phải chứng minh. □

BÀI 7.

Tính tổng

1. $A = 3^n \binom{2n}{0} - 3^{n-1} \binom{2n}{2} + \dots + (-1)^{n-1} 3 \binom{2n}{2n-2} + (-1)^n \binom{2n}{2n}$.
2. $B = 3^{2m} \binom{4m}{0} + 3^{2m-2} \binom{4m}{4} + 3^{2m-4} \binom{4m}{8} + \dots + 3^2 \binom{4m}{4m-4} + \binom{4m}{4m}$.

Chứng minh. Xét các khai triển sau

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} + x)^{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (\sqrt{3})^{2n-k} x^k \\ (\sqrt{3} - x)^{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (\sqrt{3})^{2n-k} (-1)^k x^k \end{aligned}$$

Như vậy ta tính được

$$T = 3^n \binom{2n}{0} + 3^{n-1} x^2 \binom{2n}{2} + 3^{n-2} x^4 \binom{2n}{4} + \dots + x^{2n} \binom{2n}{2n} = \frac{1}{2} \left[(\sqrt{3} + x)^{2n} + (\sqrt{3} - x)^{2n} \right]$$

Cho $x = i$ thì ta thu được

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} + i)^{2n} &= 2^{2n} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^{2n} = 2^{2n} \left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3}\right) \\ (\sqrt{3} - i)^{2n} &= 2^{2n} \left[\cos \left(\frac{-\pi}{6}\right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{6}\right)\right]^{2n} = 2^{2n} \left(\cos \frac{n\pi}{3} - i \sin \frac{n\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Từ đó suy ra được $A = 2^{2n} \cos \frac{n\pi}{3}$. Với $n = 2m$, chọn $x = 1$ thì ta có

$$\begin{aligned} A' &= 3^{2m} \binom{4m}{0} + 3^{2m-1} \binom{4m}{2} + 3^{2m-2} \binom{4m}{4} + \dots + 3 \binom{4m}{4m-2} + \binom{4m}{4m} \\ &= 2^{2m-1} \left[(2 + \sqrt{3})^{2m} + (2 - \sqrt{3})^{2m} \right] \\ A &= 3^{2m} \binom{4m}{0} - 3^{2m-1} \binom{4m}{2} + 3^{2m-2} \binom{4m}{4} - \dots + \binom{4m}{4m} = 2^{4m} \cos \frac{2m\pi}{3} \end{aligned}$$

Như vậy ta có được

$$B = \frac{A + A'}{2} = 2^{2m-2} \left[(2 + \sqrt{3})^{2m} + (2 - \sqrt{3})^{2m} \right] + 4^{4m-1} \cos \frac{2m\pi}{3}$$

Bài toán được giải quyết. □

Dạng 2. Khai triển $(x + 1)^n$, đạo hàm hai vế theo x sau đó cho x nhận giá trị là những số phức thích hợp.

BÀI 1.

Tính tổng

1. $S = \binom{30}{1} - 3\binom{30}{3} + 5\binom{30}{5} - \dots - 27\binom{30}{27} + 29\binom{30}{29}$.
2. $S_1 = 2\binom{30}{2} - 4\binom{30}{4} + 6\binom{30}{6} - \dots - 28\binom{30}{28} + 30\binom{30}{30}$.

Chứng minh. Xét khai triển

$$(x + 1)^{30} = \binom{30}{0} + x\binom{30}{1} + x^2\binom{30}{2} + \dots + x^{30}\binom{30}{30}$$

Đạo hàm hai vế ta có

$$30(x + 1)^{29} = \binom{30}{1} + 2x\binom{30}{2} + 3x^2\binom{30}{3} + \dots + 30x^{29}\binom{30}{30}$$

Cho $x = i$ ta được

$$30(x + i)^{29} = \left(\binom{30}{1} - 3\binom{30}{3} + \dots + 29\binom{30}{29} \right) + \left(2\binom{30}{2} - 4\binom{30}{4} + \dots - 28\binom{30}{28} + 30\binom{30}{30} \right) i$$

Mặt khác $30(i + 1)^{29} = -15.2^{15} - i.15.2^{15}$, so sánh phần thực và ảo của $30(1 + i)^{29}$ trong hai cách tính trên ta có:

$$\begin{aligned} S &= \binom{30}{1} - 3\binom{30}{3} + 5\binom{30}{5} - \dots - 27\binom{30}{27} + 29\binom{30}{29} = -15.2^{15} \\ S_1 &= 2\binom{30}{2} - 4\binom{30}{4} + 6\binom{30}{6} - \dots - 28\binom{30}{28} + 30\binom{30}{30} = -15.2^{15} \end{aligned}$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh. □

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ.

Câu 1. Tính tổng $S = 2.3\binom{20}{2} - 4.3^2\binom{20}{4} + 6.3^3\binom{20}{6} - \dots + 18.3^9\binom{20}{18} - 20.3^{10}\binom{20}{20}$.

Gợi ý. Xét khai triển $(1 + \sqrt{3}x)^{20}$.

Câu 2. Tính tổng $S = 1\binom{8n}{1} - 3\binom{8n}{3} + \dots - (8n - 1)\binom{8n}{8n - 1}$.

Gợi ý. Xét khai triển $(1 + x)^{8n}$.

BÀI 2.

Tính tổng

$$1. M = \binom{15}{0} - 3\binom{15}{2} + 5\binom{15}{4} - 7\binom{15}{6} + \dots + 13\binom{15}{12} - 15\binom{15}{14}.$$

$$2. N = 2\binom{15}{1} - 4\binom{15}{3} + 6\binom{15}{5} - 8\binom{15}{7} + \dots + 14\binom{15}{13} - 16\binom{15}{15}$$

Chứng minh. Tương tự như bài toán ở trên, ta xét khai triển Xét khai triển

$$(x+1)^{15} = \binom{15}{0} + x\binom{15}{1} + x^2\binom{15}{2} + \dots + x^{14}\binom{15}{14} + x^{15}\binom{15}{15}$$

Nhân hai vế với x ta có

$$x(x+1)^{15} = x\binom{15}{0} + x^2\binom{15}{1} + x^3\binom{15}{2} + \dots + x^{15}\binom{15}{14} + x^{16}\binom{15}{15}$$

Đạo hàm hai vế ta được

$$(x+1)^{15} + 15x(x+1)^{14} = \binom{15}{0} + 2x\binom{15}{1} + 3x^2\binom{15}{2} + \dots + 16x^{15}\binom{15}{15}$$

Với $x = i$ ta có

$$\begin{aligned} (1+i)^{15} + 15i(i+1)^{14} &= \left(\binom{15}{0} - 3\binom{15}{2} + \dots + 13\binom{15}{12} - 15\binom{15}{14} \right) \\ &\quad + \left(2\binom{15}{1} - 4\binom{15}{3} + \dots + 14\binom{15}{13} - 16\binom{15}{15} \right) i \end{aligned}$$

Mặt khác $(1+i)^{15} = 7.2^8 - 2^7i$, so sánh phần thực và ảo của $(1+i)^{15} + 15i(i+1)^{14}$ trong hai cách tính trên ta có

$$M = \binom{15}{0} - 3\binom{15}{2} + 5\binom{15}{4} - 7\binom{15}{6} + \dots + 13\binom{15}{12} - 15\binom{15}{14} = 7.2^8$$

$$N = 2\binom{15}{1} - 4\binom{15}{3} + 6\binom{15}{5} - 8\binom{15}{7} + \dots + 14\binom{15}{13} - 16\binom{15}{15} = -2^7$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh. □

BÀI 3.

Tính tổng $S = 1\binom{8n}{1} - 3\binom{8n}{3} + \dots - (8n-1)\binom{8n}{8n-1}.$

Chứng minh. Trước tiên ta phải dùng đạo hàm để có được hệ số đứng trước tổ hợp. Xét đa thức

$$f(x) = (1+x)^{8n} = \binom{8n}{0} + \sum_{k=1}^{8n} \binom{8n}{k} x^k \Rightarrow f'(x) = 8n(1+x)^{8n-1} = \sum_{k=0}^{8n} k \binom{8n}{k} x^{k-1}$$

Lại nhân với x ta được

$$g(x) = 8nx(1+x)^{8n-1} = \sum_{k=0}^{8n} k \binom{8n}{k} x^k$$

Ta thấy rằng S chính là phần ảo của $g(i) = 8ni(1+i)^{8n-1} = 4n \cdot 16^n + 4n \cdot 16^n i$, do vậy mà $S = 4n \cdot 16^n$. □

Tương tự như bài này, ta có thể dùng đạo hàm 2 lần để tính tổng

$$2^2\binom{8n}{2} - 4^2\binom{8n}{4} + 6^2\binom{8n}{6} - \dots - (8n)^2\binom{8n}{8n}$$

Ta có $(1+x)^{8n} = \binom{8n}{0} + \sum_{k=1}^{8n} \binom{8n}{k} x^k$, lấy đạo hàm và nhân thêm x và 2 về sau khi lấy đạo hàm, ta được

$$\begin{aligned} 8nx(1+x)^{8n-1} &= \sum_{k=1}^{8n} k \binom{8n}{k} x^k \\ \Rightarrow 8n(1+x)^{8n-2}(1+8nx) &= \sum_{k=1}^{8n} k^2 \binom{8n}{k} x^{k-1} \\ \Leftrightarrow 8nx(1+x)^{8n-2}(1+8nx) &= \sum_{k=1}^{8n} k^2 \binom{8n}{k} x^k = f(X) \end{aligned}$$

Tổng cần tìm chính là phần thực của

$$f(i) = 8nf(1+i)^{8n-2}(1+8ni) = 16^{n-1} + 128n^2 \cdot 16^{n-2}i$$

Dạng 3. Khai triển $(x+1)^n$, cho x nhận giá trị là các căn bậc ba của đơn vị. Các bài toán ở đây sử dụng tính chất số 3 mà mình đã đề cập ở đầu! Chú ý $a = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Sau đây là các bài toán minh họa.

BÀI 1.

Tính tổng $S = \binom{20}{0} + \binom{20}{3} + \binom{20}{6} + \dots + \binom{20}{3k} + \dots + \binom{20}{15} + \binom{20}{18}$.

Chứng minh. Xét khai triển

$$(x+1)^{20} = \binom{20}{0} + x \binom{20}{1} + x^2 \binom{20}{2} + \dots + x^{19} \binom{20}{19} + x^{20} \binom{20}{20}$$

Cho $x = 1$ ta có

$$2^{20} = \binom{20}{2} + \binom{20}{1} + \binom{20}{2} + \dots + \binom{20}{19} + \binom{20}{20} \quad (1)$$

Cho $x = a$ ta có

$$(1+a)^{20} = \binom{20}{0} + a \binom{20}{1} + a^2 \binom{20}{2} + \dots + a \binom{20}{19} + a^2 \binom{20}{20} \quad (2)$$

Cho $x = a^2$ ta có

$$(1+a^2)^{20} = \binom{20}{0} + a^2 \binom{20}{1} + a \binom{20}{2} + \binom{20}{3} + \dots + a^2 \binom{20}{19} + a \binom{20}{20} \quad (3)$$

Cộng về theo về (1), (2), (3) ta được

$$2^{20} + (1+a)^{20} + (1+a^2)^{20} = 3S$$

Mặt khác ta lại có

$$(1+a)^2 = (-a^2)^{20} = a^{40} = a; \quad (1+a^2)^{20} = (-a)^{20} = a^2$$

Do vậy $3S = 2^{20} - 1 \Rightarrow S = \frac{2^{20} - 1}{3}$.

Như vậy bài toán được giải quyết. □

BÀI 2.

Tính tổng $S = \binom{20}{1} + \binom{20}{4} + \binom{20}{7} + \dots + \binom{20}{3k+1} + \dots + \binom{20}{16} + \binom{20}{19}$?

Chứng minh. Xét khai triển $(x+1)^{20} = \binom{20}{0} + x\binom{20}{1} + x^2\binom{20}{2} + \dots + x^{19}\binom{20}{19} + x^{20}\binom{20}{20}$.

Nhân hai vế với x^2 ta được

$$x^2(x+1)^{20} = x^2\binom{20}{0} + x^3\binom{20}{1} + x^4\binom{20}{2} + \dots + x^{21}\binom{20}{19} + x^{22}\binom{20}{20}$$

Cho $x = 1$ ta có

$$2^{20} = \binom{20}{2} + \binom{20}{1} + \binom{20}{2} + \dots + \binom{20}{19} + \binom{20}{20} \quad (1)$$

Cho $x = a$ ta có

$$a^2(1+a)^2 = a^2\binom{20}{0} + \binom{20}{1} + a\binom{20}{2} + a^2\binom{20}{3} + \binom{20}{4} + \dots + a^2\binom{20}{18} + \binom{20}{19} + a\binom{20}{20} \quad (2)$$

Cho $x = a^2$ ta có

$$a(1+a^2)^{20} = a\binom{20}{0} + \binom{20}{1} + a^2\binom{20}{2} + a\binom{20}{3} + \dots + a\binom{20}{18} + \binom{20}{19} + a^2\binom{20}{20} \quad (3)$$

Cộng vế theo vế (1), (2), (3) ta có $2^{20} + a^2(1+a)^{20} + a(1+a^2)^{20} = 3S$. Mặt khác ta lại có

$$a^2(1+a)^2 = a^{42} = 1; a(1+a^2)^{20} = a^{21} = 1 \Rightarrow S = \frac{2^{20} + 2}{3}$$

Như vậy bài toán được giải quyết. □

BÀI 3.

Tính tổng $S = \binom{20}{0} + 3\binom{20}{3} + 6\binom{20}{6} + \dots + 3k\binom{20}{3k} + \dots + 15\binom{20}{15} + 18\binom{20}{18}$.

Chứng minh. Xét khai triển $(x+1)^{20} = \binom{20}{0} + x\binom{20}{1} + x^2\binom{20}{2} + \dots + x^{19}\binom{20}{19} + x^{20}\binom{20}{20}$.

Đạo hàm hai vế ta có

$$20(x+1)^{19} = \binom{20}{1} + 2x\binom{20}{2} + 3x^2\binom{20}{3} + \dots + 19x^{18}\binom{20}{19} + 20x^{19}\binom{20}{20} \quad (*)$$

Nhân hai vế (*) với x ta có

$$20x(x+1)^{19} = x\binom{20}{1} + 2x^2\binom{20}{2} + 3x^3\binom{20}{3} + \dots + 19x^{19}\binom{20}{19} + 20x^{20}\binom{20}{20}$$

Cho $x = 1$ ta được

$$20 \cdot 2^{19} = \binom{20}{1} + 2\binom{20}{2} + 3\binom{20}{3} + \dots + 19\binom{20}{19} + 20\binom{20}{20} \quad (1)$$

Cho $x = a$ ta có

$$20a(1+a)^{19} = a\binom{20}{1} + 2a^2\binom{20}{2} + 3\binom{20}{3} + \dots + 19a\binom{20}{19} + 20a^2\binom{20}{20} \quad (2)$$

Cho $x = a^2$ ta có

$$20a^2(1+a^2)^{19} = a^2\binom{20}{1} + 2a\binom{20}{2} + 3\binom{20}{3} + 4a^2\binom{20}{4} + \dots + 19a^2\binom{20}{19} + 20a\binom{20}{20} \quad (3)$$

Cộng vế theo vế (1), (2), (3) ta thu được

$$20 \left[2^{19} + a(1+a)^{19} + a^2(1+a^2)^{19} \right] = 3S - \binom{20}{0}$$

Mặt khác ta lại có

$$\begin{cases} a(1+a)^{19} = a(-a^2)^{19} = -a^{39} = -1 \\ a^2(1+a^2)^{19} = a^2(-a)^{19} = -a^{21} = -1 \end{cases}$$

Từ đây ta suy ra được $S = \frac{10 \cdot 2^{20}}{3} - 13$. □

BÀI 4.

Chứng minh rằng $1 + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3} \right)$.

Chứng minh. Trước tiên ta có

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} \quad (1)$$

Xét số phức $\alpha = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ ta có

$$\alpha^3 = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^3 = 1 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$$

Mặt khác ta lại có

$$(1 + \alpha)^n = \binom{n}{0} + \alpha \binom{n}{1} + \alpha^2 \binom{n}{2} + \dots + \alpha^n \binom{n}{n} = \binom{n}{0} + \alpha \binom{n}{1} + \alpha^2 \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \alpha \binom{n}{4} + \alpha^2 + \dots \quad (2)$$

$$(1 + \alpha^2)^n = \binom{n}{0} + \alpha^2 \binom{n}{1} + \alpha^4 \binom{n}{2} + \dots + \alpha^{2n} \binom{n}{n} = \binom{n}{0} + \alpha^2 \binom{n}{1} + \alpha \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \alpha^2 \binom{n}{4} + \dots \quad (3)$$

Cộng 2 vế của (1), (2), (3) ta thu được

$$\begin{aligned} 2^n + (1 + \alpha)^n + (1 + \alpha^2)^n &= 3 \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots \right) + (1 + \alpha + \alpha^2) \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots \right) \\ &= 3 \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots \right) \end{aligned}$$

Mà $1 + \alpha = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$; $1 + \alpha^2 = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$ nên ta có điều phải chứng minh. $\square$

Với cách làm tương tự, ta sẽ chứng minh được các đẳng thức sau

$$\begin{aligned} \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \dots &= \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{(n-2)\pi}{3} \right) \\ \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \dots &= \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{(n-4)\pi}{3} \right) \\ \binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots &= \frac{1}{2} \left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4} \right) \\ \binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \dots &= \frac{1}{2} \left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4} \right) \\ \binom{n}{2} + \binom{n}{6} + \binom{n}{10} + \dots &= \frac{1}{2} \left(2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4} \right) \\ \binom{n}{3} + \binom{n}{7} + \binom{n}{11} + \dots &= \frac{1}{2} \left(2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

BÀI 5.

Với số tự nhiên $n \geq 1$, chứng minh rằng

$$\binom{n}{0} \cos \alpha + \binom{n}{1} \cos 2\alpha + \binom{n}{2} \cos 3\alpha + \dots + \binom{n}{n} \cos (n+1)\alpha = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \cos \frac{n+2}{2} \alpha$$

Chứng minh. Xét khai triển

$$(x+1)^n = \binom{n}{0} + x \binom{n}{1} + x^2 \binom{n}{2} + \dots + x^n \binom{n}{n} \Rightarrow x(x+1)^n = \sum_{k=0}^n x^{k+1} \binom{n}{k}$$

Thay $x = \cos \alpha + i \sin \alpha$ và sử dụng công thức Moivre ta có

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha) (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n &= \binom{n}{0} \cos \alpha + \binom{n}{1} \cos 2\alpha + \dots + \binom{n}{n} \cos (n+1)\alpha \\ &\quad + i \left(\binom{n}{0} \sin \alpha + \binom{n}{1} \sin 2\alpha + \dots + \binom{n}{n} \sin (n+1)\alpha \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác ta lại có

$$(1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \left(2\cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right)^n = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)^n$$

Theo công thức Moivre ta thu được

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha) \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)^n &= (\cos \alpha + i \sin \alpha) \left(\cos \frac{n\alpha}{2} + i \sin \frac{n\alpha}{2} \right) \\ &= \cos \frac{n+2}{2}\alpha + i \sin \frac{n+2}{2}\alpha \end{aligned}$$

Do đó ta được

$$(1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)^n = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \cos \frac{n+2}{2}\alpha + i 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \sin \frac{n+2}{2}\alpha \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có điều phải chứng minh. $\square$

BÀI 6.

$$\text{Tính tổng } \sum_{k=0}^n \binom{n}{6k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{6} + \binom{n}{12} + \binom{n}{18} + \binom{n}{24} \dots$$

Chứng minh. Khoảng cách của hai chỉ số trên liên tiếp là 6 nên xét số phức

$$\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{6} + i \sin \frac{2\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

Nhận thấy rằng $\varepsilon^k = 1$ khi và chỉ khi k là bội của 6, và với mọi k không chia hết cho 6 thì

$$1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} + \varepsilon^{3k} + \varepsilon^{4k} + \varepsilon^{5k} = \frac{1 - \varepsilon^{6k}}{1 - \varepsilon^k} = 0$$

Ta có

$$(1 + 1)^n + (1 + \varepsilon)^n + (1 + \varepsilon^2)^n + (1 + \varepsilon^3)^n + (1 + \varepsilon^4)^n + (1 + \varepsilon^5)^n = 6S$$

Rõ ràng là $\bar{\varepsilon} = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$, $\varepsilon^3 = -1$ và $\varepsilon^6 = 1 = \varepsilon \cdot \bar{\varepsilon}$ nên $\varepsilon^{6-p} = \bar{\varepsilon}^p$, do vậy ta được

$$(1 + \varepsilon^5)^n = (1 + \bar{\varepsilon})^n, (1 + \varepsilon^4)^n = (1 + \bar{\varepsilon}^2)^n$$

Ta có

$$\begin{aligned} 1 + \varepsilon &= \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ 1 + \bar{\varepsilon} &= \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ 1 + \varepsilon^2 &= \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \\ 1 + \bar{\varepsilon}^2 &= \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Từ đây suy ra

$$\begin{aligned} 6S &= 2^n + (1 + \varepsilon)^n + (1 + \bar{\varepsilon})^n + (1 + \varepsilon^2)^n + (1 + \bar{\varepsilon}^2)^n \\ &= 2^n + (\sqrt{3})^n \left(\cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6} \right) + (\sqrt{3})^n \left(\cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6} \right) \\ &= 2^n + 2 (\sqrt{3})^n \cos \frac{n\pi}{6} + 2 \cos \frac{n\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy ta được } S = \frac{1}{3} \left[2^{n-1} + (\sqrt{3})^n \cos \frac{n\pi}{6} + \cos \frac{n\pi}{3} \right]. \quad \square$$

! Tương tự ta sẽ tính được tổng $\sum_{k=0}^n \binom{n}{3k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \binom{n}{9} + \binom{n}{12} \dots$

BÀI 7.

Chứng minh đẳng thức sau, trong đó n là số nguyên dương

$$\left(\sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} \right)^2 + \left(\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \right)^2 = 2^n$$

T7/248-THTT

Chứng minh. Xét số phức $z = i + 1$, sử dụng khai triển nhị thức Newton ta có

$$z^n = (1+i)^n = \sum_{k=0}^n i^k \binom{n}{k} = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} + i \cdot \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$$

Lấy module hai vế ta được

$$|z^n| = \sqrt{\left(\sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} \right)^2 + \left(\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \right)^2}$$

Mặt khác ta lại có

$$z^n = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^n = \sqrt{2}^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

Từ đó ta có $|z^n|^2 = 2^n$, suy ra điều phải chứng minh. □

Với số phức $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ thì theo công thức Moivre ta có

$$z^n = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

Khi đó ta được

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} \cdot \cos^{n-2k} \varphi \sin^{2k} \varphi + i \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1} \varphi \sin^{2k+1} \varphi$$

Lấy module 2 vế, ta suy ra

!

$$\left(\sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} \cdot \cos^{n-2k} \varphi \sin^{2k} \varphi \right)^2 + \left(\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1} \varphi \sin^{2k+1} \varphi \right)^2 = 1$$

Với $\varphi = \frac{\pi}{4}$ thì ta có kết quả của bài toán này.

Với $\varphi = \frac{\pi}{3}$ và $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ta có đẳng thức

$$\left[\sum_{0 \leq 2k \leq n} (-3)^k \binom{n}{2k} \right]^2 + 3 \left[\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-3)^k \binom{n}{2k+1} \right]^2 = 4^n$$

BÀI 8.

Chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \cos kx = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \binom{2k}{k} \left(2 \cos \frac{x}{2} \right)^{n-2k} \left(\cos \frac{nx}{2} \right), x \in [0; \pi]$$

Chứng minh. Đặt $A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \cos kx$, $B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \sin kx$, khi đó ta có

$$A_n + iB_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (\cos kx + i \sin kx) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (\cos x + i \sin x)^k$$

Xét hệ số y^n từ hằng đẳng thức $(1+y)^n(1+zy)^n = [1+(1+z)y+zy^2]^n$ ta có

$$\sum_{\substack{k+l=n \\ 0 \leq k, l \leq n}} \binom{n}{k} \binom{n}{l} z^l = \sum_{\substack{k+l+s=n \\ 0 \leq k, l, s \leq n}} \frac{n!}{k!l!s!} (z+1)^l z^s$$

Hay viết lại dưới dạng

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 z^k = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \binom{2k}{k} (z+1)^{n-2k} z^k$$

Xét $z = \cos x + i \sin x$ thì $1+z = 1 + \cos x + i \sin x = 2 \cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2} \right)$ nên với $x \in [0; \pi]$ ta có

$$\begin{aligned} A_n + iB_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (\cos x + i \sin x)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 z^k = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \binom{2k}{k} (z+1)^{n-2k} z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \binom{2k}{k} \left(2 \cos \frac{x}{2} \right)^{n-2k} \left(\cos \frac{x(n-2k)}{2} + i \sin \frac{x(n-2k)}{2} \right) (\cos kx + i \sin kx) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \binom{2k}{k} \left(2 \cos \frac{x}{2} \right)^{n-2k} \left(\cos \frac{nx}{2} + i \sin \frac{nx}{2} \right) \end{aligned}$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \binom{2k}{k} \left(2 \cos \frac{x}{2} \right)^{n-2k} \left(\cos \frac{nx}{2} \right) \\ B_n &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \binom{2k}{k} \left(2 \cos \frac{x}{2} \right)^{n-2k} \left(\sin \frac{nx}{2} \right) \end{aligned}$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh. □

Theo kết quả trên thì

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \sin kx = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \binom{2k}{k} \left(2 \cos \frac{x}{2} \right)^{n-2k} \left(\sin \frac{nx}{2} \right)$$

! Nếu $x = 0$ thì

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \binom{2k}{k} 2^{n-2k} = \binom{2n}{n}.$$

Nếu $x = \pi$ thì

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2 = \begin{cases} 0, & n = 2m+1 \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \binom{n}{\frac{n}{2}}, & n = 2m \end{cases}, m \in \mathbb{N}$$

4.7 Đồng nhất hệ số.

Phương pháp làm dạng toán này là ta sẽ thực hiện khai triển theo hai cách, sau đó so sánh hệ số của lũy thừa x^k ở hai vế ta sẽ có điều phải chứng minh. Để hiểu rõ hơn ta đi vào các ví dụ sau.

BÀI 1.

Cho các số nguyên dương $m, n; 0 \leq p \leq \min \{m; n\}$. Chứng minh rằng

$$\binom{m}{p} + \binom{m}{p-1} \binom{n}{1} + \binom{m}{p-2} \binom{n}{2} + \dots + \binom{m}{p-q} \binom{n}{q} + \dots + \binom{m}{0} \binom{n}{p} = \binom{m+n}{p}$$

Chứng minh. Trước tiên ta xét khai triển

$$\begin{aligned}(x+1)^m &= \binom{m}{0} + x \binom{m}{1} + x^2 \binom{m}{2} + \dots + x^p \binom{m}{p} + \dots + x^m \binom{m}{m} \\ (x+1)^n &= \binom{n}{0} + x \binom{n}{1} + x^2 \binom{n}{2} + \dots + x^p \binom{n}{p} + \dots + x^n \binom{n}{n}\end{aligned}$$

Nhân theo về ta có

$$(x+1)^{m+n} = g(x) + \left(\binom{m}{p} \binom{n}{0} + \binom{m}{p-1} \binom{n}{1} + \dots + \binom{m}{p-q} \binom{n}{q} + \dots + \binom{m}{0} \binom{n}{p} \right) x^p$$

Trong đó $g(x)$ là biểu thức không chứa x^p , mặt khác hệ số của x^p trong khai triển $(x+1)^{m+n}$ là $\binom{m+n}{p}$, đến đây so sánh hệ số của x^p ta có

$$\binom{m+n}{p} = \binom{m}{p} \binom{n}{0} + \binom{m}{p-1} \binom{n}{1} + \dots + \binom{m}{p-q} \binom{n}{q} + \dots + \binom{m}{0} \binom{n}{p}$$

Đến đây bài toán đã được giải quyết hoàn toàn. □



Chú ý với $m = n = p \Rightarrow \left(\binom{n}{0} \right)^2 + \left(\binom{n}{1} \right)^2 + \left(\binom{n}{2} \right)^2 + \dots + \left(\binom{n}{n} \right)^2 = \binom{2n}{n}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ. Cho $\begin{cases} 0 \leq k, n \\ k, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$, chứng minh rằng

$$\binom{n}{0} \binom{n}{k} + \binom{n}{1} \binom{n}{k+1} + \dots + \binom{n}{n-k} \binom{n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+k)! (n-k)!}$$

Gợi ý. Viết lại đẳng thức cần chứng minh

$$\binom{n}{0} \binom{n}{n-k} + \binom{n}{1} \binom{n}{n-k-1} + \dots + \binom{n}{n-k} \binom{n}{0} = \frac{(2n)!}{(n+k)! (n-k)!}$$

Điều này làm ta gợi tới đến về trái là hệ số của x^{n-k} . Ta xét $(1+x)^n (1+x)^n = (1+x)^{2n}$, sau đó so sánh hệ số x^{n-k} ở 2 vế ta sẽ có điều phải chứng minh.

BÀI 2.

Cho 2 số n, k thỏa mãn $\begin{cases} 0 \leq k, n \\ k, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$. Chứng minh rằng

$$\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+2}{2} + \dots + \binom{k+n}{n} = \binom{n+k+1}{n}$$

Chứng minh. Viết lại đẳng thức cần chứng minh

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \dots + \binom{k+n}{k} = \binom{n+k+1}{k+1}$$

Điều này làm ta gợi đến về trái là tổng các hệ số chứa x^k . Xét đa thức

$$P(x) = (1+x)^k + (1+x)^{k+1} + (1+x)^{k+2} + \dots + (1+x)^{k+n} = \frac{(1+x)^{n+k+1} - (1+x)^k}{x}$$

So sánh hệ số của số hạng chứa x^k ở 2 vế ta suy ra điều phải chứng minh. □

BÀI 3.

Tính tổng

$$S = \left(\binom{n}{0} \frac{1}{1} \right)^2 + \left(\binom{n}{1} \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\binom{n}{2} \frac{1}{3} \right)^2 + \dots + \left(\binom{n}{n} \frac{1}{n+1} \right)^2$$

Chứng minh. Trước tiên ta sử dụng tới đẳng thức sau

$$\binom{n}{k} \frac{1}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)k!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1} \frac{1}{n+1}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^n \left(\binom{n+1}{k+1} \frac{1}{n+1} \right)^2 = \frac{1}{(n+1)^2} \left(\left(\binom{n+1}{1} \right)^2 + \left(\binom{n+1}{2} \right)^2 + \dots + \left(\binom{n+1}{n+1} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} \left(2^{2(n+1)} - 1 \right) \end{aligned}$$

Như vậy bài toán được giải quyết. □

BÀI 4.

Với các số nguyên dương n , tính tổng $S = \left(\binom{n}{1} \right)^2 + 2 \left(\binom{n}{2} \right)^2 + \dots + n \left(\binom{n}{n} \right)^2$.

Chứng minh. Đây là một bài toán khó hơn, ta sẽ phải sử dụng tới đạo hàm. Xét khai triển

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)^n \\ \Rightarrow f'(x) &= n(x+1)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2x \binom{n}{2} + 3x^2 \binom{n}{3} + \dots + nx^{n-1} \binom{n}{n} \\ \Rightarrow xf'(x) &= nx(x+1)^{n-1} = x \binom{n}{1} + 2x^2 \binom{n}{2} + 3x^3 \binom{n}{3} + \dots + nx^n \binom{n}{n} \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác ta lại có

$$(x+1)^n = x^n \binom{n}{0} + x^{n-1} \binom{n}{1} + x^{n-2} \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} \quad (2)$$

Nhân theo vế của 2 đẳng thức (1), (2) và so sánh hệ số của x^n ở cả 2 vế ta được

$$S = \left(\binom{n}{1} \right)^2 + 2 \left(\binom{n}{2} \right)^2 + \dots + n \left(\binom{n}{n} \right)^2 = n \binom{2n-1}{n-1} = n \binom{2n-1}{n}$$

Như vậy bài toán được giải quyết. □

BÀI 5.

Tính tổng $S = \frac{1}{2} \binom{2n}{1} - \frac{1}{3} \binom{2n}{2} + \dots + (-1)^k \binom{2n}{k-1} \frac{1}{k} + \dots + (-1)^{2n+1} \frac{1}{2n+1} \binom{2n}{2n}$.

Chứng minh. Với $k = \overline{2, 2n+1}$ ta có

$$\frac{1}{k} \binom{2n}{k-1} = \frac{(2n)!}{k(k-1)!(2n-k+1)!} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!} = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{k}$$

Dó đó ta có

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} \binom{2n}{k-1} = \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2n+1} \binom{2n+1}{k} \\
 &= \frac{1}{2n+1} \left(\sum_{k=2}^{2n+1} (-1)^k \binom{2n+1}{k} \right) \\
 &= \frac{1}{2n+1} \left(\sum_{k=2}^{2n+1} (-1)^k \binom{2n+1}{k} - \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} \right) \\
 &= \frac{1}{2n+1} \left((1-1)^{2n+1} - 1 + 2n+1 \right) = \frac{2n}{2n+1}
 \end{aligned}$$

Như vậy bài toán được giải quyết. □

BÀI 6.

Khai triển $(1+x+x^2+\dots+x^{10})^{11}$ được viết thành $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{110}x^{110}$. Tính tổng

$$S = \binom{11}{0}a_0 - \binom{11}{1}a_1 + \binom{11}{2}a_2 - \binom{11}{3}a_3 + \dots + \binom{11}{10}a_{10} - \binom{11}{11}a_{11}.$$

Chứng minh. Xét $x \neq 1$, từ khai triển nhân hai vế cho $(x-1)^{11}$, ta được

$$(x^{11}-1)^{11} = (x-1)^{11} \cdot [a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{110}x^{110}].$$

Ta có

- $VT = \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} (-1)^{11-k} x^{11k}$, suy ra hệ số của x^{11} bằng $\binom{11}{1} = 11$.
 - $VP = \left(\sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} x^{11-k} (-1)^k \right) \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{110}x^{110})$, suy ra hệ số của x^{11} bằng
- $$\binom{11}{0}a_0 - \binom{11}{1}a_1 + \binom{11}{2}a_2 - \binom{11}{3}a_3 + \dots + \binom{11}{10}a_{10} - \binom{11}{11}a_{11}.$$

Vậy $S = \binom{11}{0}a_0 - \binom{11}{1}a_1 + \binom{11}{2}a_2 - \binom{11}{3}a_3 + \dots + \binom{11}{10}a_{10} - \binom{11}{11}a_{11} = 11$. □

BÀI 7.

Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}$

Chứng minh. Ta xét đẳng thức

$$(1-x^2)^{2n} = (1-x)^{2n}(1+x)^{2n} \tag{1}$$

Khai triển vế trái của (1) ta được

$$(1-x^2)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k x^{2k} \binom{2n}{k}$$

Hệ số của x^{2n} trong khai triển trên tương ứng với số hạng $k = n$ là $(-1)^n \binom{2n}{n}$.

Khai triển vế phải của (1) ta được

$$\begin{aligned}
 (1-x)^{2n}(1+x)^{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k x^k \binom{2n}{k} \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} x^j \\
 &= \sum_{k=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \binom{2n}{j} x^{j+k}
 \end{aligned}$$

Như vậy hệ số của x^{2n} trong khai triển trên tương ứng với các số hạng thoả $k + j = 2n$ là

$$\sum_{k+j=2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \binom{2n}{j} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \binom{2n}{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2$$

Bài toán được giải quyết. □

BÀI 8.

1. Chứng minh rằng $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n}{2k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{3n}{n+k}$.
2. Tính giá trị của biểu thức S_{2m} ($m \in \mathbb{N}$).

Chứng minh. Chú ý tới các công thức tổ hợp trong tổng, điều này khiến ta liên tưởng tới phải xét đẳng thức

$$(1 - x^2)^n (1 + x)^{2n} = (1 - x)^n (1 + x)^{3n}$$

Khai triển đẳng thức này ra ta được

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^{2k} \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} x^j = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^k \sum_{j=0}^{2n} \binom{3n}{j} x^j$$

Tương đương với $\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{2n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n}{j} x^{2k+j} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{2n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{3n}{j} x^{k+j}$. Tìm hệ số của x^{2n} trong cả hai khai triển trên ta có

$$\begin{aligned} \sum_{2k+j=2n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n}{j} &= \sum_{k+j=2n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{3n}{2n-k} \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n}{2k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{3n}{n+k} \end{aligned}$$

Như vậy đẳng thức đầu tiên được chứng minh, bây giờ ta sẽ đi tính giá trị của S_{2m} .

Ta có

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{3n}{n+k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!(3n)!(-1)^k}{k!(n-k)!(n+k)!(2n-k)!} \\ &= \frac{n!(3n)!}{(2n)!(2n)!} \sum_{k=0}^n \frac{(2n)!(2n)!(-1)^k}{k!(2n-k)!(n+k)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(3n)!}{(2n)!(2n)!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{k} \binom{2n}{n-k} \end{aligned}$$

Từ đây suy ra được $S_{2m} = \frac{(2m)!(6m)!}{(4m)!(4m)!} \sum_{k+j=2m} (-1)^k \binom{4m}{k} \binom{4m}{j}$. Xét đẳng thức

$$\begin{aligned} (1 - x^2)^{4m} &= (1 - x)^{4m} (1 + x)^{4m} \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{4m} (-1)^k \binom{4m}{k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{4m} \sum_{j=0}^{4m} (-1)^k \binom{4m}{k} \binom{4m}{j} x^{k+j} \end{aligned}$$

Cân bằng hệ số của x^{2m} ở đẳng thức trên ta được

$$(-1)^m \binom{4m}{m} = \sum_{k+j=2m} (-1)^k \binom{4m}{k} \binom{4m}{j}$$

Như vậy ta có được

$$S_{2m} = \frac{(2m)!(6m)!}{(4m)!(4m)!} \cdot \frac{(-1)^m (4m)!}{m!(3m)!} = \frac{(-1)^m (2m)!(6m)!}{m!(3m)!(4m)!}$$

Đến đây bài toán được giải quyết. □

BÀI 9.

Với các số tự nhiên m, n thỏa mãn $m \leq n$, chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{k+n}{m} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k = (-1)^m \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n+k}{k} (-2)^k$$

Chứng minh. Với bài toán này ta sẽ đi tìm hệ số của x^n trong các khai triển

$$(-1)^m [1 - 2(1+x)]^m (1+x)^n = (1+2x)^m (1+x)^n = [x + (1+x)]^m (1+x)^n \quad (1)$$

Trước tiên ta có

$$(1+2x)^m (1+x)^n = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} 2^k x^k \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j = \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{m}{k} \binom{n}{j} 2^k x^{k+j}$$

Hệ số của x^n bao gồm các số hạng thỏa mãn $k+j=n$ hay $j=n-k$, đó là

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n}{n-k} 2^k \quad (2)$$

Mặt khác ta lại có

$$\begin{aligned} [x + (1+x)]^m (1+x)^n &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^{m-k} (1+x)^{k+n} \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^{m-k} \sum_{j=0}^{n+k} \binom{n+k}{j} x^j \\ &= \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^{n+k} \binom{m}{k} \binom{n+k}{j} x^{m-k+j} \end{aligned}$$

Hệ số của x^n bao gồm tổng các số hạng thỏa mãn $m-k+j=n$ hay $j=n+k-m$, đó là

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n+k}{n+k-m} \quad (3)$$

Tiếp theo ta xét tới khai triển

$$\begin{aligned} (-1)^m [1 - 2(1+x)]^m (1+x)^n &= (-1)^m \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-2)^k (1+x)^{k+n} \\ &= (-1)^m \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-2)^k \sum_{j=0}^{n+k} \binom{n+k}{j} x^j \\ &= (-1)^m \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^{n+k} \binom{m}{k} \binom{n+k}{j} (-2)^k x^j \end{aligned}$$

Như vậy hệ số của x^n tương ứng với $j=n$ là

$$(-1)^m \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n+k}{n} (-2)^k \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3) và (4) ta suy ra điều phải chứng minh. □

BÀI 10.

Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^n 4^{n-k} \binom{4n}{2n+2k} \binom{2n+2k}{k} = \binom{8n}{2n}$.

Chứng minh. Biểu thức của vế phải cho ta thấy đó là hệ số của số hạng thứ $2n + 1$ trong khai triển của nhị thức với bậc $8n$. Ta có

$$(x + y)^{8n} = \sum_{k=0}^{8n} \binom{8n}{k} x^{8n-k} y^k$$

Như vậy số hạng thứ $2n + 1$ (tương ứng với $k = 2n$) là $\binom{8n}{2n} x^{6n} y^{2n}$. Để cho đơn giản ta sẽ cho $y = x^{-1}$ tức là

$$\binom{8n}{2n} = \langle x^{4n} \rangle (x + x^{-1})^{8n}$$

Kí hiệu $\langle x^n \rangle f(x)$ ở đây nghĩa là hệ số của x^n trong khai triển $f(x)$. Ta có

$$\begin{aligned} \binom{8n}{2n} &= \langle x^{4n} \rangle (x + x^{-1})^{8n} = \langle x^{4n} \rangle (x^2 + x^{-2} + 2)^{4n} \\ &= \langle x^{4n} \rangle \sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k} (x^2 + x^{-2})^{4n-k} 2^k \\ &= \langle x^{4n} \rangle \sum_{k=0}^{4n} \sum_{j=0}^{4n-k} \binom{4n}{k} \binom{4n-k}{j} 2^k x^{8n-2k-2j} x^{-2j} \\ &= \langle x^{4n} \rangle \sum_{k=0}^{4n} \sum_{j=0}^{4n-k} \binom{4n}{k} \binom{4n-k}{j} 2^k x^{8n-4j-2k} \end{aligned}$$

Như vậy các số hạng chứa x^{4n} tương ứng k, j thỏa mãn $8n - 4j - 2k = 4n$ hay $k = 2n - 2j$, khi đó thì

$$0 \leq 2n - 2j \leq 2n \Rightarrow 0 \leq j \leq n$$

Thay giá trị $k = 2n - 2j$ và giới hạn của j vào biểu thức trên ta được

$$\binom{8n}{2n} = \sum_{j=0}^n 2^{2n-2j} \binom{4n}{2n-2j} \binom{2n+2j}{j} = \sum_{k=0}^n 4^{n-k} \binom{4n}{2n+2k} \binom{2n+2k}{k}$$

Bài toán được giải quyết. □



Cái hay của phương pháp này đó là bằng cách khai triển theo những cách khác nhau, ta có thể mở rộng được nhiều đẳng thức khác nhau từ bài toán ban đầu!

Ví dụ. Từ đẳng thức

$$\binom{8n}{2n} = \langle x^{4n} \rangle (x + x^{-1})^{8n}$$

Ta khai triển như sau

$$\begin{aligned} (x + x^{-1})^{8n} &= (2 + x^2 + x^{-2})^{4n} = \sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k} 2^{4n-k} (x^2 + x^{-2})^k \\ &= \sum_{k=0}^{4n} \sum_{j=0}^k \binom{4n}{k} \binom{k}{j} 2^{4n-k} x^{2k-2j} x^{-2j} \\ &= \sum_{k=0}^{4n} \sum_{j=0}^k \binom{4n}{k} \binom{k}{j} 2^{4n-k} x^{2k-4j} \end{aligned}$$

Suy ra $2k - 4j = 4n$ hay $0 \leq k = 2n - 2j \leq 2n \Rightarrow 0 \leq j \leq n$. Do đó hệ số x^{4n} của khai triển trên sẽ là

$$\langle x^{4n} \rangle \sum_{k=0}^{4n} \sum_{j=0}^k \binom{4n}{k} \binom{k}{j} 2^{4n-k} x^{2k-4j} = \sum_{j=0}^n \binom{4n}{2n-2j} \binom{2n-2j}{j} 4^{n+j}$$

Từ đó ta có thêm đẳng thức

$$\binom{8n}{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{4n}{2n+2k} \binom{2n+2k}{k} 4^{n+k}$$

Kết hợp với đề bài thì ta có đẳng thức

$$\sum_{k=0}^n 4^{n-k} \binom{4n}{2n+2k} \binom{2n+2k}{k} = \sum_{k=0}^n 4^{2n-k} \binom{4n}{2k} \binom{2k}{n-k}$$

Chú ý rằng $\binom{2n}{n-k}$ chỉ khác 0 khi $2k \geq n-k$ hay $k \geq \frac{n}{3}$. Như vậy ta được

$$\sum_{k=0}^n 4^{2n-k} \binom{4n}{2k} \binom{2k}{n-k} = \sum_{k=\lceil \frac{n+2}{3} \rceil}^n 4^{2n-k} \binom{4n}{2k} \binom{2k}{n-k}$$

BÀI 11.

Với các số nguyên dương n, m thỏa mãn $0 \leq m \leq n$. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n+m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}$$

Chứng minh. Quan sát về phải của đẳng thức cần chứng minh ta thấy rằng

$$\binom{n}{m} 2^{n-m} = \langle x^m \rangle (2+x)^n$$

Tuy nhiên ta thấy rằng về phải của đẳng thức chứa nhị thức $\binom{2n-2k}{n+m}$ điều này chứng tỏ biểu thức đó là hệ số bậc $(n+m)$ của một khai triển bậc cao hơn n . Do đó ta sẽ nhân thêm x^n vào khai triển trên

$$\begin{aligned} \langle x^m \rangle (2+x)^n &= \langle x^{n+m} \rangle (2x+x^2)^n = \langle x^{n+m} \rangle [(x+1)^2 - 1]^n \\ &= \langle x^{n+m} \rangle \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x+1)^{2(n-k)} (-1)^k \\ &= \langle x^{n+m} \rangle \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{2n-2k} \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{j} (-1)^k x^j \end{aligned}$$

Suy ra $j = n+m$ và do đó ta có

$$\binom{n}{m} 2^{n-m} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n+m}$$

Chú ý rằng với $k > \frac{n-m}{2}$ thì $2n-2k < n+m$, suy ra được $\binom{2n-2k}{n+m} = 0$.

Do vậy ta có điều phải chứng minh. □

BÀI 12.

Chứng minh đẳng thức $\sum_{k=0}^n 2^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} = \binom{2n+1}{n}$.

China 1994

Chứng minh. Ta có $\binom{k}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$ là hệ số tự do trong khai triển $(1+x)(x+x^{-1})^k$. Khi đó

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1+x) \left(x + \frac{1}{x}\right)^k 2^{n-k} &= (1+x) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(x + \frac{1}{x}\right)^k 2^{n-k} \\ &= (1+x) \left(2 + x + \frac{1}{x}\right)^n \\ &= \frac{1}{x^n} (1+x) (2x + x^2 + 1)^n \\ &= \frac{1}{x^n} (1+x)^{2n+1} \end{aligned}$$

So sánh hệ số tự do ta có $\sum_{k=0}^n 2^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} = \binom{2n+1}{n}$ Bài toán được giải quyết. $\square$

BÀI 13.

Tính tổng $\sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} \binom{2n-2r}{n-1}$.

Chứng minh. Ta thấy rằng $\binom{2n-2r}{n-1}$ là hệ số tự do trong khai triển $\frac{(1+x)^{2n-2r}}{x^{n-1}}$, do đó

$$\sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} \binom{2n-2r}{n-1}$$

là hệ số tự do trong khai triển

$$\frac{1}{x^{n-1}} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} (1+x)^{2n-2r} = \frac{(x^2+2x)^n}{x^{n-1}} = x(x+2)^n$$

Mà hệ số tự do của biểu thức này bằng 0, đến đây ta dễ dàng suy ra kết quả của bài toán. $\square$

BÀI 14.

Cho số tự nhiên n . Tính tổng $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} 2^k$.

Chứng minh. Ta có $\binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor}$ là hệ số tự do trong khai triển của $(x+1) \left(x + \frac{1}{x}\right)^{n-k}$. Do đó

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} 2^k$$

là hệ số tự do trong khai triển

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1+x) \left(x + \frac{1}{x}\right)^{n-k} 2^k = (1+x) \left(x + \frac{1}{x} + 2\right)^n = \frac{(1+x)^{2n+1}}{x^n}$$

Từ đây suy ra $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} 2^k = \binom{2n+1}{n}$. $\square$

BÀI 15.

Cho m, n là hai số tự nhiên. Tính tổng $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} x^k$.

Chứng minh. Chú ý rằng $\binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor}$ là hệ số tự do trong khai triển của $y^{n-m}(1+y) \left(y + \frac{1}{y}\right)^{n-k}$, do vậy

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} x^k$$

là hệ số tự do trong khai triển theo y của

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} y^{n-m}(1+y) \left(y + \frac{1}{y}\right)^{n-k} x^k &= (1+y) y^{n-m} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(y + \frac{1}{y}\right)^{n-k} x^k \\ &= (1+y) y^{n-m} \left(x + y + \frac{1}{y}\right)^n \\ &= \frac{(1+y)(xy + y^2 + 1)^n}{y^m} \end{aligned}$$

Từ đó ta có được cách tính tổng đã cho. □

BÀI 16.

Cho số tự nhiên n . Tính tổng $\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} 2^{2n-2k}$.

Chứng minh. Ta sẽ xử lý bài toán này theo 2 cách sau.

Cách 1. Ta có

$$\binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} = \frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!} \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2} = \frac{(2n)!}{(2n-k)!k!} \cdot \frac{(2n-k)!}{(2n-2k)!k!} = \binom{2n}{k} \binom{2n-k}{k}$$

Do đó $\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} 2^{2n-2k}$ là hệ số tự do trong khai triển

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \frac{2^{2n-2k}(x+1)^{2n-k}}{x^k} &= (2x+2)^{2n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \frac{1}{(4x^2+4x)^k} \\ &= (2x+2)^{2n} \left(1 + \frac{1}{4x^2+4x}\right)^{2n} \\ &= \frac{(2x+1)^{4n}}{(2x)^{2n}} \end{aligned}$$

Tức là $\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} 2^{2n-2k} = \binom{4n}{2n}$.

Cách 2. Ta có $\binom{2k}{k}$ là hệ số tự do trong khai triển $\frac{(x+1)^{2k}}{x^k}$.

Như vậy ta có $\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} 2^{2n-2k}$ là hệ số tự do trong khai triển của

$$2^{2n-1} \left(\left(1 + \frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)^{2n} + \left(1 - \frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)^{2n} \right) = \frac{(1+\sqrt{x})^{4n} + (1-\sqrt{x})^{4n}}{2x^n}$$

Ta có đáp số là $\binom{4n}{2n}$. Bài toán được giải quyết. □

4.8 Bài tập tự luyện.

Các bài toán sử dụng các tính chất đẳng thức đặc biệt.

Bài 1. Cho các số tự nhiên m, n thỏa mãn $m \leq n$. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^m \binom{2n}{2k} \binom{2n-2k}{m-k} 4^k = \binom{4n}{2m}$.

Bài 2. Cho các số tự nhiên m, n thỏa mãn $2m+1 \leq 3n$. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+2m-4k}{n-1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{2m+1-2k}$$

Bài 3. Chứng minh rằng $\binom{n}{m} \binom{n-m}{k} = \binom{n}{m+k} \binom{m+k}{m}, \forall n \geq m+k, m \geq 0, k \geq 0$.

Bài 4. Chứng minh rằng $n \binom{n}{k} = k \binom{n}{k} + (k+1) \binom{n}{k+1}, \forall n-1 \geq k \geq 0$.

Bài 5. Chứng minh rằng $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{2^k-1}{k}$.

Bài 6. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{n+2}$.

Bài 7. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{n+1} \binom{n}{m+1} (-1)^m + \frac{1}{n+1}$.

Bài 8. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1} - 1}{k+1}$.

Bài 9. Chứng minh rằng $\sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k+1} \frac{1}{k+1} = \frac{2^{n+1} - 2}{n+1}$.

Bài 10. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m} = 2^{n-m} \binom{n}{m}$.

Bài 11. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m} x^{n-k} y^{k-m} = (x+y)^{n-m} \binom{n}{m}$.

Bài 12. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^m \frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{\binom{n+1}{m}}{\binom{n}{m}} = \frac{n+1}{n+1-m}$.

Bài 13. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^m \frac{\binom{m}{k} \binom{k}{r}}{\binom{n}{k}} = \frac{\binom{n+1}{m-r}}{\binom{n}{m}}$.

Bài 14. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} k^2 = n \binom{n+m-1}{r-1} + n(n-1) \binom{n+m-2}{r-2}$.

Bài 15. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} k = n \binom{n+m-1}{r-1}$.

Bài 16. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{r+k}{m} (-1)^k = (-1)^n \binom{r}{m-n}$.

Bài 17. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n-k)^{n+1} (-1)^k = \frac{n(n+1)!}{2}$.

Bài 18. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{2n-k}{n} (-1)^k = 1$.

Bài 19. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n+m-k-1}{m} (-1)^k = \binom{m-1}{n-1}$.

Bài 20. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^n (-3)^k \binom{2n}{k} \binom{2n-k}{n-k} = (-2)^n \binom{2n}{n}$.

Bài 21. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} \binom{n-k}{k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n-k}$.

Bài 22. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^n (-1)^k 2^k \binom{n}{k}^2 = 2^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n}{k}$.

Các bài toán sử dụng đạo hàm, tích phân, số phức.

Bài 23. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k(k-1) x^{k-2} y^{n-k} = n(n-1)(x+y)^{n-2}$.

Bài 24. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 x^{k-1} y^{n-k} = n(x+y)^{n-2}(nx+y)$.

Bài 25. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n-k)^n (-1)^k = n!$.

Bài 26. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(x_2^{k+1} - x_1^{k+1}) y^{n-k}}{k+1} = \frac{(x_2+y)^{n+1} - (x_1+y)^{n+1}}{n+1}$.

Bài 27. Chứng minh rằng $\sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k} \frac{1}{2k+1} = \frac{2^n}{n+1}$.

Bài 28. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{n+2}$.

Bài 29. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{(x_3^{k+2} - x_2^{k+2}) y^{n-k}}{(k+1)(k+2)} - \frac{(x_3 - x_2) x_1^{k+1} y^{n-k}}{k+1} \right) \\ &= \frac{(x_3 + y)^{n+2} - (x_2 + y)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} - \frac{(x_3 - x_2)(x_1 + y)^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

Bài 30. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(x_2^{k+1} - x_1^{k+1})(y_2^{n+1-k} - y_1^{n+1-k})}{(k+1)(n+1-k)} \\ &= \frac{(x_2 + y_2)^{n+2} - (x_2 + y_1)^{n+2} - (x_1 + y_2)^{n+2} + (x_1 + y_1)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Bài 31. Nếu n chẵn, chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(k+1)(n+1-k)} = \frac{1 + (-1)^n}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

Bài 32. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(x_2^k - x_1^k) y^{n-k}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{((x_2 + y)^k - (x_1 + y)^k) y^{n-k}}{k}$$

Bài 33. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(x_2^{k+1} - x_1^{k+1}) y^{n-k}}{(k+1)^2} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{((x_2 + y)^{k+1} - (x_1 + y)^{k+1}) y^{n-k}}{k+1}$$

Bài 34. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1} - 1}{k+1}$.

Bài 35. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^3 = n^2(n+3)2^{n-3}$.

Bài 36. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k 2^{k-1} (-1)^k = n(-1)^n$.

Bài 37. Cho n, k là hai số nguyên dương với $n > 2k + 1$, chứng minh rằng

$$\begin{aligned} 1. & \sum_{j \geq 0} \binom{n}{j(2k+1)} = \frac{2^n}{2k+1} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^k \left(\cos \frac{m\pi}{2k+1} \right)^n \cos \frac{mn\pi}{2k+1} \right]. \\ 2. & \sum_{j \geq 0} \binom{n}{2jk} = \frac{2^n}{2k} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^k \left(\cos \frac{m\pi}{2k+1} \right)^n \cos \frac{mn\pi}{2k+1} \right]. \\ 3. & \sum_{r \geq 0} \binom{n}{j+rk} = \frac{2^n}{k} \sum_{m=0}^{k-1} \left(\cos \frac{m\pi}{k} \right)^n \cos \frac{(n-2j)m\pi}{k}. \end{aligned}$$

Bài 38. Cho các dãy số a_n, b_n, c_n được xác định theo công thức

$$\begin{aligned} a_n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots \\ b_n &= \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \dots \\ c_n &= \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \dots \end{aligned}$$

Chứng minh rằng

1. $a_n^3 + b_n^3 + c_n^3 - 3a_nb_nc_n = 2^n$.
2. $a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 - a_nb_n - b_nc_n - a_nc_n = 1$.

Bài 39. Cho số nguyên dương n và các số thực x, y . Chứng minh rằng

1. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos[(n-k)x + ky] = 2^n \cos^n \frac{x-y}{2} \cos \frac{n(x+y)}{2}$.
2. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin[(n-k)x + ky] = 2^n \cos^n \frac{x-y}{2} \sin \frac{n(x+y)}{2}$.

Bài 40. Chứng minh rằng $\binom{n}{k}^{-1} = (n+1) \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx$.

5 Bất đẳng thức liên quan tới công thức tổ hợp.

5.1 Lí thuyết và ví dụ minh họa.

Trước tiên ta nhắc lại 2 bất đẳng thức quan trọng sau.

ĐỊNH LÝ.

(5.1)

Bất đẳng thức AM - GM. Cho n số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ khi đó ta có $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$.

Ngoài ra ta có dạng cộng mẫu số cho n số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$, ta có $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n a_i}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz. Cho 2 bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Khi đó ta có

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2$$

Ngoài ra cần phải chú ý đến bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng cộng mẫu Engel, ta có

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2}{\sum_{i=1}^n b_i}$$

Dấu "=" xảy ra khi các bộ số tỷ lệ với nhau.

Sau đây ta sẽ xét các ví dụ liên quan tới dạng toán này.

BÀI 1.

Chứng minh rằng $\forall n, m \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N} : n < m \Rightarrow \frac{1}{n^i} \binom{n}{i} \leq \frac{1}{m^i} \binom{m}{i}$

Chứng minh. Với $i = 0$ hoặc $i > m$ thì cả 2 vế của đẳng thức đều bằng 0, nếu $n < i \leq m$ thì vế trái sẽ bằng 0 trong khi vế còn lại luôn dương, do vậy ta sẽ xét trường hợp $0 < i \leq n$, ta giả sử $m > n$, với mọi $1 \leq r \leq i$ ta có

$$mr > nr \Rightarrow mn - nr > mn - mr \Rightarrow \frac{m-r}{m} > \frac{n-r}{n}$$

Vì vậy

$$\begin{aligned} \frac{\frac{m}{m} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-2}{m} \cdots \frac{m-i+1}{m}}{\frac{1}{m^i} \frac{m(m-1)(m-2) \cdots (m-i+1)}{i!}} &> \frac{\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-i+1}{n}}{\frac{1}{n^i} \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-i+1)}{i!}} \\ \Rightarrow \frac{1}{m^i} \binom{m}{i} &> \frac{1}{n^i} \binom{n}{i} \end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết. □

BÀI 2.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, k thì ta có $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{k}{2n}\right)^{k-1}$.

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n}{k!} ((n-1)(n-k+1))((n-2)(n-k+2)) \cdots \\ &\leq \frac{n}{k!} \left(n - \frac{k}{2}\right)^{k-1} = \frac{n^k}{k!} \left(1 - \frac{k}{2n}\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết. □

BÀI 3.

Cho $n > 4$ là số tự nhiên, chứng minh rằng $6 + \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leq \binom{2n}{n}$.

Chứng minh. Sử dụng phương pháp quy nạp, ta có

$$\begin{aligned} \binom{2n+1}{n+1} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \binom{2n}{n} \\ &= \frac{2(2n+1)}{(n+1)} \binom{2n}{n} \\ &\geq \frac{2(2n+1)}{(n+1)} \left(6 + \frac{4^n}{2\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

Ta thấy rằng $\frac{2(2n+1)}{(n+1)} \cdot 6 \geq 6$, bây giờ ta chỉ cần chỉ ra rằng

$$\frac{2(2n+1)}{(n+1)} \cdot \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \geq \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}$$

Điều này tương đương $2n+1 \geq 2\sqrt{n(n+1)}$, tuy nhiên điều này đúng, do vậy theo quy nạp ta có điều phải chứng minh. □

BÀI 4.

Cho k, n là 2 số nguyên dương thỏa mãn $n \geq k$. Chứng minh rằng $\binom{2n}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^k \leq \binom{2n}{n+k}$

Chứng minh. Nếu $0 < a \leq b$ thì $\frac{a}{b} \leq \frac{a+1}{b+1}$, do đó $\frac{n-k}{n} \leq \frac{n-k+i}{n+i}$ với mọi $i \geq 0$ và $1 \leq i \leq k$, khi đó ta được

$$\left(\frac{n-k}{n}\right)^k \leq \frac{n-k+1}{n+1} \frac{n-k+2}{n+2} \cdots \frac{n}{n+k} = \frac{n! n!}{(n-k)!(n+k)!}.$$

Do vậy mà

$$\binom{2n}{n} \left(\frac{n-k}{n} \right)^k \leq \frac{(2n)!}{n! n!} \frac{n! n!}{(n-k)!(n+k)!} = \frac{(2n)!}{(n-k)!(n+k)!} = \binom{2n}{n+k}.$$

Bài toán được giải quyết. $\square$

BÀI 5.

Chứng minh rằng $\binom{2m}{m} \leq \frac{2^{2m}}{\sqrt{2m}}$.

Chứng minh. Với bài toán này ta sẽ sử dụng phương pháp quy nạp. Hiển nhiên ta có $\binom{2(1)}{(1)} \leq \frac{2^{2(1)}}{\sqrt{2(1)}}$ bởi vì

$\binom{2}{1} = 2 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \leq \frac{4}{\sqrt{2}}$ và $\sqrt{2} < 2$, giả sử mệnh đề đúng với m , ta sẽ đi chứng minh mệnh đề đúng với $m+1$, tức là $\binom{2(m+1)}{(m+1)} \leq \frac{2^{2(m+1)}}{\sqrt{2(m+1)}}$. Ta có

$$\begin{aligned} \binom{2(m+1)}{(m+1)} &= \frac{(2(m+1))!}{(m+1)!(2(m+1)-(m+1))!} \\ &= \frac{(2m+2)!}{(m+1)!(m+1)!} \\ &= \frac{(2m+2)(2m+1)(2m)!}{(m+1)(m+1)m!m!} \\ &= \frac{(2m+2)(2m+1)}{(m+1)(m+1)} \left(\frac{(2m)!}{m!m!} \right) \\ &= \frac{(2m+2)(2m+1)}{(m+1)(m+1)} \binom{2m}{m} \\ &\leq \frac{(2m+2)(2m+1)}{(m+1)(m+1)} \frac{2^{2m}}{\sqrt{2m}} \\ &= \frac{2(m+1)(2m+1)}{(m+1)(m+1)} \frac{2^{2m}}{\sqrt{2m}} \\ &= \frac{(2m+1)}{(m+1)} \frac{2^{2m+1}}{\sqrt{2m}} \end{aligned}$$

Với mọi m là số tự nhiên, ta có

$$m^2(m+2) > 1 \Rightarrow 2m^3 + 4m^2 > 2 \Rightarrow 2m^3 + 4m^2 + 2m > 2m + 2$$

Do vậy mà

$$2m^3 + 4m^2 + 2m > 2m + 2 \Rightarrow (m^2 + 2m + 1)(2m) > 2(m+1) \Rightarrow (m+1)\sqrt{2m}$$

Như thế ta có được

$$\binom{2(m+1)}{(m+1)} \leq \frac{(2m+1)}{(m+1)} \frac{2^{2m+1}}{\sqrt{2m}} \leq (2m+1) \frac{2^{2m+1}}{\sqrt{2(m+1)}}$$

Bài toán được giải quyết. $\square$

BÀI 6.

Cho $2 \leq n \in \mathbb{Z}$, chứng minh rằng $\prod_{i=0}^n \binom{n}{i} \leq \left(\frac{2^n - 1}{n-1} \right)^n$.

Chứng minh. Ta có $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 \dots + \binom{n}{n}x^n$.

Cho $x = 1$ ta được $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$, áp dụng bất đẳng thức AM – GM với n số ta có

$$2^n - 2 = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \geq n \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \binom{n}{k}}$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh. □

BÀI 7.

Cho $\begin{cases} 0 \leq k \leq n \\ k, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$. Chứng minh rằng $\binom{2n+k}{n} \cdot \binom{2n-k}{n} \leq \binom{2n}{n}^2$.

Chứng minh. Với $0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{Z}$, ta đặt

$$a_k = \binom{2n+k}{n} \binom{2n-k}{n} \Rightarrow \begin{cases} a_k = \frac{(2n+k)!}{n!(n+k)!} \cdot \frac{(2n-k)!}{n!(n-k)!} \\ a_{k+1} = \frac{(2n+k+1)!}{n!(n+k+1)!} \cdot \frac{(2n-k-1)!}{n!(n-k-1)!} \end{cases}$$

Để chứng minh bất đẳng thức trên ta cần chứng minh dãy a_k giảm bằng cách chứng minh

$$\begin{aligned} a_k > a_{k+1} &\Leftrightarrow \frac{(2n+k)!}{n!(n+k)!} \cdot \frac{(2n-k)!}{n!(n-k)!} > \frac{(2n+k+1)!}{n!(n+k+1)!} \cdot \frac{(2n-k-1)!}{n!(n-k-1)!} \\ &\Leftrightarrow \frac{2n-k}{n-k} > \frac{2n+k+1}{n+k+1} \Leftrightarrow 1 + \frac{n}{n-k} > 1 + \frac{n}{n+k+1} \end{aligned}$$

Như vậy suy ra $a_k > a_{k+1}$ hay dãy a_k giảm, do vậy $a_0 > a_1 > \dots > a_k > a_{k+1} \Rightarrow a_0 > a_k$.

Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

BÀI 8.

Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}$ và $n > 2$ thì ta có $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i \binom{n}{i} < n!$.

Chứng minh. Xét khai triển $(x+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i$, đến đây ta sẽ đạo hàm 2 vế, ta được

$$n(x+1)^{n-1} = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} i x^{i-1}$$

Cho $x = 1$ ta được $n2^{n-1} = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} i$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\frac{1}{n} (n \cdot 2^{n-1}) < n! \Leftrightarrow 2^{n-1} < n! \quad (*)$$

Bây giờ ta sẽ dùng phương pháp quy nạp để chứng minh (*) đúng.

Với $n = 3 \Rightarrow n! \geq 2^{n-1} \Leftrightarrow 3! = 6 > 2^{3-1} = 4$, đúng.

Giả sử (*) đúng với $n = k$, với $k > 3 \Rightarrow k! > 2^{k-1}$, khi đó vì $k > 3 \Rightarrow k+1 > 4$ nên ta có

$$(k+1)k! > (k+1)2^{k-1} \Leftrightarrow (k+1)! > 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$$

Vậy theo nguyên lý quy nạp ta có $n! > 2^{n-1}, \forall n \geq 3$, do đó ta có điều phải chứng minh. □

BÀI 9.

1. Cho $3 \leq n \in \mathbb{Z}$, chứng minh rằng $n^{n+1} > (n+1)^n$.
2. Chứng minh rằng $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < 3$.
3. Cho $2 \leq n \in \mathbb{Z}$, chứng minh rằng $2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.
4. Với mọi số nguyên dương $m > n$, chứng minh rằng $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Chứng minh. 1. Ta có $n^{n+1} > (n+1)^n \Leftrightarrow n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, mặt khác theo công thức khai triển nhị thức thì

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{n^i} \binom{n}{i} = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ &< 2 + \underbrace{1 + \dots + 1}_{(n-2) \text{ số } 1} = n \end{aligned}$$

Như thế thì ta có điều phải chứng minh.

2. Trước tiên ta có

$$1 + \frac{1}{1!} = 2; \frac{1}{2!} = 1 - \frac{1}{2}; \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \frac{1}{4!} < \frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

Từ đó không khó để chứng minh rằng $\frac{1}{n!} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, do vậy mà

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < 3 - \frac{1}{n} < 3$$

3. Ta chú ý rằng $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n^i} \binom{n}{i} > 2$, mặt khác

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \Rightarrow \frac{1}{n^k} \binom{n}{k} = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!}$$

Theo kết quả của câu 2 thì

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 3$$

Như vậy ta suy ra điều phải chứng minh.

4. Xét khai triển

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{n} \left(\frac{1}{n^{n-1}} + \frac{1}{n^n}\right) \\ &= 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)\dots 2}{(n-1)!} \frac{1}{n^{n-1}} + \frac{n(n-1)\dots 1}{n!} \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \quad (*) \end{aligned}$$

Tương tự ta có

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{(n-1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \quad (**) \end{aligned}$$

Kết hợp (*) và (**) ta có $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. □

BÀI 10.

Cho m, n là các số tự nhiên khác 0, trong đó $m \geq 3$. Chứng minh rằng $\sum_{i=0}^n \binom{m+i}{i+1}^{-1} < \frac{1}{m-2}$.

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} \binom{m+k}{k+1}^{-1} &= \frac{(k+1)!m!}{(m+k)!} = \frac{(k+1)!(m-1)!}{(m+k)!(m-2)!} [m+k-(k+2)] \\ &= \frac{(m-1)}{(m-2)} \left[\frac{(m-1)!(k+1)!}{[(m-1)+k]!} - \frac{(m-2)!(k+2)!}{(m+k)!} \right] \\ &= \frac{(m-1)}{(m-2)} \left[\binom{k+m-1}{k+1}^{-1} - \binom{m+k}{k+2}^{-1} \right] \end{aligned}$$

Từ đây suy ra được

$$\sum_{i=0}^n \binom{m+i}{i+1}^{-1} = \frac{(m-1)}{(m-2)} \left[\binom{m-1}{1}^{-1} - \binom{m+n}{n+2}^{-1} \right] < \frac{(m-1)}{(m-2)} \cdot \binom{m-1}{1}^{-1} = \frac{1}{m-2}$$

Bài toán được giải quyết. □

BÀI 11.

Chứng minh rằng

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
2. Nếu $m > 0$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{m} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 2$.

Chứng minh. Đặt $m = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$, khi đó ta suy ra

$$\begin{aligned} n &= (m+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} m^k \geq \binom{n}{2} m^2 = \frac{n(n-1)}{2} m^2 \\ \Rightarrow n &\geq \frac{n(n-1)}{2} m^2 \Rightarrow 0 < m = \sqrt[n]{n} - 1 \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \\ \Rightarrow 1 &< \sqrt[n]{n} \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}} \end{aligned}$$

Mặt khác ta lại có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh.

Áp dụng kết quả câu 1, ta sử dụng nguyên lý kẹp, khi đó sẽ suy ra kết quả của câu 2. □

BÀI 12.

Cho a, b là các số nguyên dương, chứng minh rằng $\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$

Chứng minh. Ta có $(a^{n-i} + b^{n-i})(a^i + b^i) \Rightarrow a^n + b^n \geq a^{n-i}b^i + b^{n-i}a^i, \forall 0 \leq i \leq n$. Mặt khác

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^{n-k} a^k$$

Từ đây suy ra được

$$2(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a^{n-k} \cdot b^k + b^{n-k} \cdot a^k) = 2^n (a+b)^n \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a^n + b^n) \Rightarrow \frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$$

Bài toán được giải quyết. $\square$

BÀI 13.

Với mọi $n \geq 2$, chứng minh rằng $\sum_{k=1}^n k \sqrt{\binom{n}{k}} \leq \sqrt{2^{n-1} n^3}$

Chứng minh. Trước tiên ta có

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n \Rightarrow \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k = x \frac{d}{dx} (1+x)^n = nx(1+x)^{n-1} \Rightarrow \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy - Schwarz* ta có

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} \right) &\geq \left(\sum_{k=1}^n k \sqrt{\binom{n}{k}} \right)^2 \\ \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} \cdot n2^{n-1} &\geq \left(\sum_{k=1}^n k \sqrt{\binom{n}{k}} \right)^2 \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^n k \sqrt{\binom{n}{k}} &\leq n2^{\frac{n}{2}-1} \sqrt{n+1} \end{aligned}$$

Từ đây ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh. $\square$

BÀI 14.

Chứng minh rằng $\sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{k \binom{n}{k}} \geq \frac{n}{2^{n-1}}$.

Chứng minh. Trước tiên ta có đẳng thức $\sum_{k=1}^n (2k-1)k \binom{n}{k} = n^2 \cdot 2^{n-1}$, bạn đọc tìm hiểu ở phần trên.

Khi đó theo bất đẳng thức *Cauchy - Schwarz* ta có

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{k \binom{n}{k}} \right) \left(\sum_{k=1}^n (2k-1)k \binom{n}{k} \right) \geq \left(\sum_{k=1}^n (2k-1) \right)^2 = n^4$$

Từ đây ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh. $\square$

BÀI 15.

Cho các số nguyên dương m và n sao cho $n \leq m$. Chứng minh rằng

$$2^n \cdot n! \leq \frac{(m+n)!}{(m-n)!} \leq (m^2 + m)^n$$

Chứng minh. Ta có

$$\frac{(m+n)!}{(m-n)!} = (m+n)(m+n-1)\dots(m-n+2)(m-n+1) = \prod_{i=1}^n (m+1-i)(m+i)$$

Ngoài ra ta có $2^n \cdot n! \cdot n = 2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n = (2 \cdot 1)(2 \cdot 2) \dots (2 \cdot n) = \prod_{i=1}^n 2i$ và

$$(m^2 + m)^2 = (m^2 + m)(m^2 + m) \dots (m^2 + m) = \prod_{i=1}^n (m^2 + m)$$

Do đó, các bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\prod_{i=1}^n 2i \leq \prod_{i=1}^n (m+1-i)(m+i) \leq \prod_{i=1}^n (m^2 + m)$$

Ta có $2i = i^2 + i - i^2 + i \leq m^2 + m - i^2 + i = (m+1-i)(m+i) \leq m(m+1) = m^2 + m$ vì i là số nguyên nằm giữa 1 và n nên ta suy ra

$$2i \leq (m+1-i)(m+i) \leq m^2 + m$$

do đó ta được

$$\prod_{i=1}^n 2i \leq \prod_{i=1}^n (m+1-i)(m+i) \leq \prod_{i=1}^n (m^2 + m)$$

Vậy các bất đẳng thức đã cho là đúng. □

BÀI 16.

Cho n nguyên dương, $n \geq 2$ và $a, b > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{(a+b)^n - a^n - b^n}{2^n - 2} \geq \sqrt{(ab)^n}$$

Chứng minh. Ta có $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$ và khai triển nhị thức

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)^n - a^n - b^n}{2^n - 2} &= \frac{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i - a^n - b^n}{2^n - 2} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i}{2^n - 2} \\ &= \frac{1}{2^n - 2} \cdot \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \left(a^{n-i} b^i \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} b^{n-i} a^i \right) \right) \\ &\geq \frac{1}{2^n - 2} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \sqrt{a^n \cdot b^n} = \frac{1}{2^n - 2} [2^n - 2] \cdot \sqrt{a^n \cdot b^n} = \sqrt{(ab)^n} \end{aligned}$$

Vậy bài toán được giải quyết. □

BÀI 17.

Chứng minh bất đẳng thức $\binom{2n}{n} > \frac{4^n}{2n}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Chứng minh. Ta sẽ dùng phương pháp quy nạp để chứng minh bất đẳng thức trên

Với $n = 2$ thì ta thu được $\binom{4}{2} = 6 > 4 = \frac{4^2}{2 \cdot 2}$, hiển nhiên đúng. Giả sử bất đẳng thức đã đúng đến $n = k$ tức là ta đã có bất đẳng thức sau

$$\binom{2k}{k} > \frac{4^k}{2k}$$

Bây giờ ta cần chứng minh bất đẳng thức cũng đúng với $n = k + 1$ tức là cần chứng minh

$$\binom{2k+2}{k+1} > \frac{4^{k+1}}{2k+2}$$

Thật vậy ta có các biến đổi đại số sau đây

$$\binom{2k+2}{k+1} = \binom{2k}{k} \left[\frac{2(2k+1)}{(k+1)} \right] > \binom{2k}{k} \left(\frac{4k}{k+1} \right) > \binom{4k}{2k} \left(\frac{4k}{k+1} \right) = \frac{4^{k+1}}{2k+2}$$

vậy từ đây theo nguyên lý quy nạp bất đẳng thức được chứng minh. $\square$

BÀI 18.

Cho $x_1 \geq x_2 \geq 0; y_1 \geq y_2 \geq 0$ và n là số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$(x_1 + y_1)^n + (x_2 + y_2)^n \geq (x_1 + y_2)^n + (x_2 + y_1)^n$$

Chứng minh. Vì $x_1 \geq x_2 \geq 0$ nên $x_1^m \geq x_2^m$, trong đó $m \in \mathbb{N}$. Cũng vì $y_1 \geq y_2 \geq 0$ nên $y_1^k \geq y_2^k; k \in \mathbb{N}$.

Do đó $(x_1^m - x_2^m)(y_1^k - y_2^k) \geq 0$ hay $x_1^m y_1^k + x_2^m y_2^k \geq x_1^m y_2^k + x_2^m y_1^k$.

Lấy $m = n - k; n \geq k \geq 0$ ta được

$$x_1^{n-k} y_1^k + x_2^{n-k} y_2^k \geq x_1^{n-k} y_2^k + x_2^{n-k} y_1^k \Rightarrow \binom{n}{k} (x_1^{n-k} y_1^k + x_2^{n-k} y_2^k) \geq \binom{n}{k} (x_1^{n-k} y_2^k + x_2^{n-k} y_1^k) \quad (1)$$

Từ bất đẳng thức (1) cho k lần lượt bằng $0, 1, \dots, n, n+1$ ta được

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} (x_1^n + x_2^n) &= \binom{n}{0} (x_1^n + x_2^n) \\ \binom{n}{1} (x_1^{n-1} y_1 + x_2^{n-1} y_2) &\geq \binom{n}{1} (x_1^{n-1} y_2 + x_2^{n-1} y_1) \\ &\dots \\ \binom{n}{n-1} (x_1 y_1^{n-1} + x_2 y_2^{n-1}) &\geq \binom{n}{n-1} (x_1 y_2^{n-1} + x_2 y_1^{n-1}) \\ \binom{n}{n} (y_1^n + y_2^n) &= \binom{n}{n} (y_2^n + y_1^n) \end{aligned}$$

Cộng tất cả các bất đẳng thức trên với nhau và sử dụng công thức nhị thức Newton ta được

$$(x_1 + y_1)^n + (x_2 + y_2)^n \geq (x_1 + y_2)^n + (x_2 + y_1)^n$$

Đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2$ hoặc $y_1 = y_2$. $\square$

BÀI 19.

Chứng minh rằng nếu $x_k \geq 0, y_k \geq 0 (k = 1, 2, \dots, m)$ thì

$$\sum_{k=1}^m (x_k + y_k)^n \geq m \left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^m x_k} + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^m y_k} \right)^n$$

Chứng minh. Vì $x_k \geq 0, y_k \geq 0$, nên theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\sum_{k=1}^m x_k^{n-j} y_k^j \geq m \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=1}^m x_k^{n-j} y_k^j}$$

Nhân 2 vế của bất đẳng thức trên với $\binom{n}{j}$ rồi cho j lần lượt chạy từ 0 đến n và được $n+1$ bất đẳng thức cùng chiều, sau đó cộng vế theo vế các bất đẳng thức đó lại với nhau, cuối cùng áp dụng công thức nhị thức Newton thì ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán tương tự. Cho a_1, a_2, b_1, b_2 là các số không âm, chứng minh rằng

$$\sqrt[n]{a_1^n + b_1^n} + \sqrt[n]{a_2^n + b_2^n} \geq \sqrt[n]{(a_1 + a_2)^n + (b_1 + b_2)^n}$$

5.2 Bài tập tự giải.

Bài 1. Chứng minh rằng $\binom{m+n}{m} \geq \frac{(n+1)^m}{m!}$.

Bài 2. Cho các số nguyên dương $2 \leq k \leq n-2$, chứng minh rằng $k(n-k) < \binom{n}{k} - 1$.

Bài 3. Cho 3 số nguyên dương $l \leq k \leq n$, chứng minh rằng $\binom{\binom{n}{k}}{a} \binom{\binom{n}{k-l}}{b} < \binom{\binom{n}{k}}{a+b}$.

Bài 4. Chứng minh rằng $\binom{n}{r} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Bài 5. Chứng minh rằng $\binom{2n}{n} \geq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Bài 6. Chứng minh rằng $\binom{2N}{N} < 2^N \binom{N}{\frac{N}{2}} < 2 \binom{2N}{N}$.

Bài 7. Chứng minh rằng $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k}$.

Bài 8. Chứng minh rằng $\binom{\lceil 2^{\frac{k}{2}} \rceil}{k} \leq 2^{\binom{k}{2}-1}$ với mọi $k \geq 2$.

Bài 9. Chứng minh rằng $\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \leq 2 \binom{n}{k}$.

Bài 10. Với $1 \leq k \leq n$ là các số tự nhiên, chứng minh rằng

$$\sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \left(\frac{k}{n+1}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)^{n-i} \leq 1 - \frac{1}{e}$$

Bài 11. Chứng minh rằng $\binom{n}{k-1-a} + \binom{n}{a} \leq \binom{n}{k}$ với mọi $k \leq \frac{n}{2}$ và $0 \leq a < k$.

Bài 12. Với a, b, c là các số nguyên dương sao cho $a, b < c$, chứng minh rằng

$$\binom{a+n-1}{n} + \binom{b+n-1}{n} \geq \binom{c+n-1}{n}$$

Bài 13. Chứng minh rằng $\frac{4^m}{4\sqrt{m}} \leq \binom{2m}{m}$.

Bài 14. Cho bất đẳng thức $\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \leq n! \leq e n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$, khi đó chứng minh rằng

$$\binom{n}{k} \leq \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}}$$

Bài 15. Chứng minh rằng $\binom{n}{s} \leq n^n$.

Bài 16. Chứng minh rằng $\frac{n^k}{k^k} \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$.

Bài 17. Chứng minh rằng $\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$.

Bài 18. Chứng minh rằng $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} > 31$.

Bài 19. Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng

$$1. \left(\frac{2n}{n}\right)^{\frac{1}{n}} > 2.$$

$$2. \left(\frac{2n}{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

$$3. n! \binom{2n}{n} < (2n)^n.$$

Bài 20.

$$1. \text{ Chứng minh đẳng thức } (n-2k) \binom{n}{k} = n \left[\binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k-1} \right].$$

2. Từ đẳng thức trên, chứng minh rằng $\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \binom{n}{2} < \dots < \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Bài 21. Với $n, l \in \mathbb{N}, l \leq n$ là hằng số cố định. Cho $k \in \mathbb{N}$ với $0 \leq k \leq l$, chứng minh rằng

$$\binom{2n-l}{n-k} \leq \binom{2n-l}{\frac{2n-l}{2}}$$

Bài 22. Chứng minh rằng $\binom{k+n-1}{k} \times \binom{k+n+1}{k} \leq \binom{k+n}{k}^2$.

Bài 23. Chứng minh rằng $\sum_{i=82}^{8564} \binom{8564}{i} < 2^{8564}$.

Bài 24. Chứng minh rằng $\frac{1!2! + 2!3! + \dots + n!(n+1)!}{n \sqrt[n]{(1!)^2 \dots (n!)^2}} \geq 2 \sqrt[n]{n!}$.

Bài 25. Cho $\begin{cases} S = a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0 \\ 1 \leq n \in \mathbb{Z} \end{cases}$. Chứng minh rằng

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \leq 1 + \frac{S}{1!} + \frac{S^2}{2!} + \dots + \frac{S^n}{n!}$$

Bài 26. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{m}\right)^m$.

Bài 27. Cho n là số tự nhiên và $m \in [-n, n]$. Với $p = 0, \dots, \frac{n+m}{2}$, chứng minh rằng

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n+m}{2} \rfloor} \geq \frac{2^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{n-\frac{m}{2}}}$$

Bài 28. Chứng minh rằng $\binom{n}{m} < \frac{n^n}{(m^m)(n-m)^{n-m}}$.

Bài 29. Với mọi $n \geq 2$, chứng minh rằng $2^n < \binom{2n}{n} < 4^n$.

Bài 30. Chứng minh rằng $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$.

6 Tính chất số học của hệ số nhị thức.

Trong chủ đề này mình sẽ chỉ dừng ở mức độ giới thiệu lịch sử cũng như một vài bài toán để các bạn mở mang thêm chút kiến thức, nên sẽ không đề cập sâu. Các bạn muốn tham khảo thêm về chủ đề này có thể tìm đọc cuốn *Khai thác một số chủ đề số học hay và khó* của fanpage bọn mình. Bây giờ chúng ta cùng bắt đầu.

6.1 Đôi nét về lịch sử nghiên cứu tính chất số học của hệ số nhị thức.

Từ thế kỉ XIX các nhà toán học nổi tiếng như Babbage, Cauchy, Cayley, Gauss, Hensel, Hermite, Kummer, Legendre, Lucas and Stickelberger,... đã bắt đầu nghiên cứu những tính chất số học liên quan giữa hệ số nhị thức và lũy thừa của một số nguyên tố. Và đến tận bây giờ, vấn đề này vẫn đang được nghiên cứu và phát triển hơn nữa, việc này giúp chúng ta phát hiện rất nhiều những kết quả có ý nghĩa to lớn và đóng góp hữu ích cho tổ hợp, xác suất, giải tích...

Năm 1773, nhà toán học John Wilson đã chứng minh được kết quả

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

Sau đó vào năm 1819, nhà toán học Charles Babbage đã chỉ ra được rằng

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}, \text{ với mọi số nguyên tố } p \geq 3$$

Năm 1852 nhà toán học Kummer đã chứng minh được kết quả.

Cho $m \geq n$ là hai số nguyên dương và p là một số nguyên tố. Khi đó lũy thừa của p trong $\binom{m}{n}$ bằng số lần nhớ khi thực

hiện phép cộng $m - n$ và n trong hệ cơ sở p .

Vào năm 1862, một kết quả khác mạnh hơn kết quả của Charles Babbage được Wolstenholme đưa ra, nó chỉ ra rằng

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 \pmod{p^3}, \text{ với mọi số nguyên tố } p \geq 5$$

Một trong những kết quả mạnh nhất phải kể đến kết quả của nhà toán học Lucas, kết quả này được phát biểu như sau.

Cho m, n là hai số nguyên dương và p là số nguyên tố. Gọi m_0 và n_0 tương ứng là các số dư của m, n khi chia cho p . Khi đó thì ta có kết quả sau

$$\binom{m}{n} \equiv \binom{\left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor} \binom{m_0}{n_0} \pmod{p}$$

Khi đó nếu ta viết $m = m_0 + m_1p + \dots + m_sp^s, n = n_0 + n_1p + \dots + n_sp^s$ thì **định lý Lucas** được phát biểu một cách tương đương như sau.

Cho m, n là hai số nguyên dương và p là số nguyên tố. Gọi m_0 và n_0 tương ứng là các số dư của m và n khi chia cho p . Giả sử biểu diễn cơ sở p của m, n là

$$\begin{aligned} m &= m_0 + m_1p + \dots + m_sp^s \\ n &= n_0 + n_1p + \dots + n_sp^s \end{aligned}$$

với $0 \leq m_i, n_i \leq p-1, \forall i = \overline{0, k}$. Khi đó thì ta được

$$\binom{m}{n} \equiv \binom{m_0}{n_0} \binom{m_1}{n_1} \dots \binom{m_s}{n_s} \pmod{p}$$

Một số các kết quả quan trọng khác có thể kể đến như kết quả của

1. Frank Morley vào năm 1895. $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \binom{p-1}{p-1} \equiv 4^{p-1} \pmod{p^3}, \forall p \geq 5$, và p là số nguyên tố.
2. James W.L. Glaisher vào năm 1900. $\binom{mp-1}{p-1} \equiv 1 \pmod{p^3}$.
3. Wilhelm Ljunggren vào năm 1952. $\binom{ap}{bp} \equiv \binom{a}{b} \pmod{p^3}$.
4. Ernst Jacobsthal vào năm 1952. $\binom{mp}{np} \equiv \binom{m}{n} \pmod{p^t}$, trong đó t là lũy thừa của p trong $p^3mn(m-n)$.

Ngoài ra còn rất nhiều kết quả khác, bạn đọc có thể tham khảo ở link <https://arxiv.org/pdf/1111.3057.pdf>. Sau đây ta sẽ đi tìm hiểu một số bài toán ở mức độ sử dụng những tính chất cơ bản, không đi sâu.

6.2 Các bài toán minh họa.

BÀI 1.

Cho $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Chứng minh rằng số $T_n = \binom{2^{n+1}}{2^n} - \binom{2^n}{2^{n-1}}$ chia hết cho 2^{2n+2} .

Chứng minh. Bây giờ ta xét đa thức $P(x) = (1+x)^{2^{n+1}} - (1-x^2)^{2^n}$ thì ta thấy rằng đa thức này có hệ số của số hạng chứa x^{2^n} là T_n . Mặt khác ta có

$$\begin{aligned} P(x) &= (1+x)^{2^n} \left[(1+x)^{2^n} - (1-x)^{2^n} \right] \\ &= 2 \left[1 + \binom{2^n}{1}x + \dots + \binom{2^n}{2^n}x^{2^n} \right] \left[\binom{2^n}{1}x + \binom{2^n}{3}x^3 + \dots + \binom{2^n}{2^n-1}x^{2^n-1} \right] \end{aligned}$$

Bằng phương pháp đồng nhất hệ số hai vế ta được hệ số của x^{2^n} ta được

$$T_n = 2 \left[\binom{2^n}{1} \binom{2^n}{2^n-1} + \binom{2^n}{3} \binom{2^n}{2^n-3} + \dots + \binom{2^n}{2^n-1} \binom{2^n}{1} \right]$$

Mà từ kết quả quen thuộc ta thấy rằng các số $\binom{2^n}{1}, \binom{2^n}{3}, \dots, \binom{2^n}{2^n-1}$ đều chia hết cho 2^n nên từ đó T_n chia hết cho 2^{2n+2} .

Vậy từ đó ta suy ra điều phải chứng minh. $\square$

BÀI 2.

Chứng minh dãy $\binom{k}{k}, \binom{k+1}{k}, \binom{k+2}{k}$ là dãy tuần hoàn nếu xét trong modulo k .

Chứng minh. Ta có một phép đặt rất hay $m = k.k!$. Khi đó ta biến đổi

$$\begin{aligned}\binom{x+m}{k} &= \frac{(x+m)(x+m-1)\dots(x+m-k+1)}{k!} \\ &= \frac{x(x-1)\dots(x-k+1) + t \cdot m}{k!} \\ &= \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!} = \binom{x}{k} \pmod{k}\end{aligned}$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh. $\square$

BÀI 3.

Cho các số nguyên dương n, k tùy ý. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên dương

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > k$$

$$\text{sao cho } n = \pm \binom{a_1}{3} \pm \binom{a_2}{3} \pm \binom{a_3}{3} \pm \binom{a_4}{3} \pm \binom{a_5}{3}.$$

Romania TST 2010

Chứng minh. Với bài toán này ta sẽ xét $n > k$ là số nguyên dương sao cho $n + \binom{m}{3}$ là số lẻ. Cụ thể, nếu n lẻ ta chọn $m \equiv 0 \pmod{4}$ và nếu n chẵn thì ta chọn $m \equiv 3 \pmod{4}$. Ta có $n + \binom{m}{3} = 2a + 1$, mặt khác

$$2a + 1 = \binom{a}{3} - \binom{a+1}{3} - \binom{a+2}{3} + \binom{a+3}{3}$$

Do vậy ta được

$$n = \binom{a}{3} - \binom{a+1}{3} - \binom{a+2}{3} + \binom{a+3}{3} - \binom{m}{3}$$

$$\text{Đồng thời } a = \frac{n-1 + \binom{m}{3}}{2} > m, \text{ từ đây ta suy ra điều phải chứng minh. } \square$$

BÀI 4.

Tìm số tự nhiên k nhỏ nhất sao cho với mọi $n \geq m$ thì ta có $\frac{k}{m+n+1} \binom{2n}{n+m} \in \mathbb{N}$.

Chứng minh. Đầu tiên ta sẽ chứng minh rằng $\frac{1}{m+1} \binom{2m}{m} \in \mathbb{Z}$. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{m+1} \binom{2m}{m} &= \left(1 - \frac{m}{m+1}\right) \binom{2m}{m} = \binom{2m}{m} - \frac{(2m)!}{(m-1)!(m+1)!} \\ &= \binom{2m}{m} - \binom{2m}{m-1} \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Giả sử cho trước $m \in \mathbb{N}$. Vì với $n = m$ thì $\frac{k}{m+n+1} \binom{2n}{n+m} = \frac{k}{2m+1}$ phải là số tự nhiên nên giá trị phải tìm $k \in \mathbb{N}$ phải chia hết cho $2m+1$, do đó $k \geq 2m+1$.

Giả sử rằng $k = 2m+1$ thì với $n = m$ số dương $\frac{k}{m+n+1} \binom{2n}{n+m}$ là số tự nhiên và với $n > m$ nó bằng

$$\begin{aligned} \frac{2m+1}{n+m+1} \binom{2n}{n+m} &= \left(1 - \frac{n-m}{n+m+1}\right) \binom{2n}{n+m} \\ &= \binom{2n}{n+m} - \frac{(2n)!}{(n+m+1)!(n-m-1)!} \\ &= \binom{2n}{n+m} - \binom{2n}{n+m+1} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Vậy giá trị k nhỏ nhất bằng $2m+1$. □

BÀI 5.

Cho $n > 1$ và k thỏa mãn $0 < k < n$. Chứng minh rằng $\gcd\left(\binom{n}{k}, n\right) > 1$

Chứng minh. Ta chú ý rằng

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{\gcd(k, n)} \frac{\gcd(k, n)}{k} \binom{n-1}{k-1} \quad (1)$$

Do đó từ (1) ta có

$$\frac{k}{\gcd(k, n)} \mid \frac{n}{\gcd(k, n)} \binom{n-1}{k-1} \quad (2)$$

Tuy nhiên ta lại có

$$\gcd\left(\frac{n}{\gcd(k, n)}, \frac{k}{\gcd(k, n)}\right) = 1 \quad (3)$$

Điều (2) ám chỉ rằng

$$\frac{k}{\gcd(k, n)} \mid \binom{n-1}{k-1} \quad (4)$$

Như vậy từ (1) và (4) ta có

$$\frac{n}{\gcd(k, n)} \mid \binom{n}{k} \quad (5)$$

và từ đó ta suy ra

$$\frac{n}{\gcd(k, n)} \mid \gcd\left(\binom{n}{k}, n\right) \quad (6)$$

Nếu $0 \leq k \leq n$ thì $\gcd(k, n) \leq n$, do đó $\frac{n}{\gcd(k, n)} \geq 1$.

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

BÀI 6.

Cho $1 < a < n$ và $1 < b < n$, chứng minh rằng $\binom{n}{a}, \binom{n}{b}$ không nguyên tố cùng nhau.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng a, b khác 0 và không lớn hơn $\frac{1}{2}$. Vì

$$\frac{\binom{n}{a} \binom{n}{b}}{a! b! (n-a-b)!} = \frac{n! (n-a-b)!}{(n-a)! (n-b)!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-a+1)}{(n-b)(n-b-1) \cdots (n-b-a+1)} > 1$$

Nên ta có $\text{lcm} \left(\binom{n}{a}, \binom{n}{b} \right) \mid \frac{n!}{a!b!(n-a-b)!}$ và $\binom{n}{a} \binom{n}{b} > \frac{n!}{a!b!(n-a-b)!}$.

Nếu $\binom{n}{a}, \binom{n}{b}$ thì

$$\text{lcm} \left(\binom{n}{a}, \binom{n}{b} \right) = \binom{n}{a} \binom{n}{b} > \frac{n!}{a!b!(n-a-b)!} \geq \text{lcm} \left(\binom{n}{a}, \binom{n}{b} \right)$$

Mâu thuẫn, do vậy ta có điều phải chứng minh. $\square$

BÀI 7.

Cho m, n, k là các số nguyên dương thỏa mãn $0 < m \leq k < n$. Chứng minh rằng các số $\binom{n}{k}$ và $\binom{n}{m}$ không nguyên tố cùng nhau.

Chứng minh. Ta sẽ sử dụng phản chứng, giả sử rằng $\binom{n}{k}$ và $\binom{n}{m}$ nguyên tố cùng nhau.

Ta có $n - m > 0$ và $0 \leq k - m < n - m$ do đó $\binom{n-m}{k-m}$ là một số nguyên.

Chú ý rằng

$$\binom{n-m}{k-m} = \frac{(n-m)!}{(k-m)!((n-m)-(k-m))!} = \frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!}$$

Suy ra

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{k}{m} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k!}{m!(k-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!} = \binom{n}{m} \cdot \binom{n-m}{k-m}$$

Do vậy mà $\binom{n}{k} \cdot \binom{k}{m}$ chia hết cho $\binom{n}{m}$. Mặt khác ta lại giả sử rằng $\binom{n}{k}$ và $\binom{n}{m}$ nguyên tố cùng nhau, điều này chứng tỏ rằng $\binom{k}{m}$ chia hết cho $\binom{n}{m}$. Như thế thì $\binom{k}{m} \geq \binom{n}{m}$, tuy nhiên từ điều kiện $k < n$ lại có

$$\binom{k}{m} = \frac{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-m+1)}{m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot 1} < \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot 1} = \binom{n}{m}$$

Từ điều này ta chỉ ra được nó mâu thuẫn với giả sử phản chứng.

Vậy ta có điều phải chứng minh. $\square$

BÀI 8.

Chứng minh rằng với p là một số nguyên tố bất kì thì ta có $\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p^2}$

Chứng minh. Trước hết thì ta có **đẳng thức Vandermonde** khá quen thuộc sau đây

$$\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

Ta xét $m = n = k = p$ thì đẳng thức trên tương đương với

$$\binom{2p}{p} = \binom{p}{0} \binom{p}{p} + \binom{p}{1} \binom{p}{p-1} + \dots + \binom{p}{p-1} \binom{p}{1} + \binom{p}{p} \binom{p}{0}$$

Do p là số nguyên tố nên ta có $\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p}, \forall k = \overline{1, p-1}$ nên từ đó ta suy ra

$$\binom{p}{1} \binom{p}{p-1} + \dots + \binom{p}{p-1} \binom{p}{1} \equiv 0 \pmod{p}$$

Vậy từ đây ta thu được

$$\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p^2}$$

hay ta có điều phải chứng minh. $\square$

BÀI 9.

Với số tự nhiên m nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1991} \binom{1991}{0} - \frac{1}{1991} \binom{1991}{1} + \frac{1}{1991} \binom{1991}{2} - \dots + \frac{(-1)^m}{1991-m} \binom{1991-m}{m} = \frac{1}{1991}$$

Chứng minh. Với $n = 1, 2, \dots$, ta đặt $S(n) = \sum_m (-1)^m \binom{n-m}{m}$ trong đó tổng được lấy từ $m = 0$ cho đến hết những số hạng khác 0. Ta có

$$\sum_{k=m}^n \binom{m}{k} = \binom{n-m-1}{m+1} = 1 - S(n)$$

Ta có

1. $S(n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-2} S(k)$, suy ra $S(n+1) = S(n) - S(n-1)$ (1)
2. $S(0) = S(1) = 1$, từ đó $S(2) = 0, S(3) = -1, S(4) = -1, S(5) = 0, S(6) = 1, S(7) = 1$

Từ (1) ta có $S(m) = S(n)$ nếu $m \equiv n \pmod{6}$.

Do $\frac{n}{n-m} \binom{n-m}{n} = \binom{n-m}{m} + \binom{n-m-1}{m-1}$ nên ta được

$$1991. \left[\frac{1}{1991} \binom{1991}{0} - \frac{1}{1991} \binom{1991}{1} + \frac{1}{1991} \binom{1991}{2} - \dots + \frac{(-1)^m}{1991-m} \binom{1991-m}{m} + \dots - \frac{1}{996} \binom{996}{995} \right] = 1$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

BÀI 10.

Chứng minh rằng với mọi $m, n \in \mathbb{N}$ luôn tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $(\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^n = \sqrt{k} + \sqrt{k-1}$.

Chứng minh. Ta có $x = (\sqrt{m} \pm \sqrt{m-1})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sqrt{m})^{n-k} (\pm \sqrt{m-1})^k$, khi đó ta xét các trường hợp.

- Nếu $n = 2p$, ta có

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=0}^p \binom{n}{2k} (\sqrt{m})^{2p-2k} (\sqrt{m-1})^{2k} \pm \sum_{k=1}^p \binom{n}{2k-1} (\sqrt{m})^{2p-2k+1} (\sqrt{m-1})^{2k-1} \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{n}{2k} m^{p-k} (m-1)^k \pm \sqrt{m(m-1)} \sum_{k=1}^p \binom{n}{2k-1} m^{p-k} (m-1)^{k-1} \\ &= a \pm b \sqrt{m(m-1)} = \sqrt{a^2} \pm \sqrt{b^2 m(m-1)} \end{aligned}$$

trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$.

- Nếu $n = 2p-1$, ta có

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{2k} (\sqrt{m})^{2p-2k-1} (\sqrt{m-1})^{2k} \pm \sum_{k=1}^p \binom{n}{2k-1} (\sqrt{m})^{2p-2k} (\sqrt{m-1})^{2k-1} \\ &= \sqrt{m} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{2k} m^{p-k-1} (m-1)^k \pm \sqrt{m-1} \sum_{k=1}^p \binom{n}{2k-1} m^{p-k} (m-1)^{k-1} \\ &= c \sqrt{m} \pm d \sqrt{m-1} = \sqrt{c^2 m} \pm \sqrt{d^2 (m-1)} \end{aligned}$$

trong đó $c, d \in \mathbb{Z}$

Tóm lại trong các trường hợp ta luôn có $(\sqrt{m} \pm \sqrt{m-1})^n = \sqrt{k} \pm \sqrt{l}$, suy ra

$$k-l = (\sqrt{k} + \sqrt{l})(\sqrt{k} - \sqrt{l}) = (\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^n (\sqrt{m} - \sqrt{m-1})^n = 1 \Rightarrow l = k-1$$

Do đó $(\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^n = \sqrt{k} + \sqrt{k-1}$. □

BÀI 11.

Chứng minh rằng x là số tự nhiên chia hết cho 2002 với $x = \sqrt{1001} \left[\left(\sqrt{1001} + 1 \right)^{2000} - \left(\sqrt{1001} - 1 \right)^{2000} \right]$.

Chứng minh. Đặt $a = \left(\sqrt{1001} + 1 \right)^{2000}$, $b = \left(\sqrt{1001} - 1 \right)^{2000}$.

Ta có $\left(\sqrt{1001} + x \right)^{2000} = \binom{2000}{0} \left(\sqrt{1001} \right)^{2000} + \binom{2000}{1} \left(\sqrt{1001} \right)^{1999} x + \binom{2000}{2000} x^{2000}$, khi đó

- Với $x = 1$, ta có $a = \binom{2000}{0} \left(\sqrt{1001} \right)^{2000} + \binom{2000}{1} \left(\sqrt{1001} \right)^{1999} + \dots + \binom{2000}{2000}$.
- Với $x = -1$, ta có $b = \binom{2000}{0} \left(\sqrt{1001} \right)^{2000} - \binom{2000}{1} \left(\sqrt{1001} \right)^{1999} + \dots + \binom{2000}{2000}$

Như vậy ta suy ra

$$a - b = 2\sqrt{1001} \left(\binom{2000}{1} + \binom{2000}{3} \cdot 1001 + \dots + \binom{2000}{1999} 1001^{1999} \right) = 2\sqrt{1001} \cdot A \Rightarrow x = 2002A \Rightarrow x \vdots 2002$$

trong đó $A \in \mathbb{N}$. Bài toán được giải quyết. □

Tài liệu

- [1] Đẳng thức tổ hợp – VMF.
- [2] Tuyển tập các chuyên đề tổ hợp - MathScope.
- [3] Chuyên đề tổ hợp bồi dưỡng học sinh giỏi – Lê Hoàng Phò.
- [4] Nhị thức Newton và ứng dụng - Nguyễn Văn Lâm, Lê Hoàng Nam.
- [5] The Art of Proving Binomial Identities - Michael Z. Spivey.
- [6] Câu chuyện về nhị thức Newton - Nguyễn Công Sứ - Trường ĐH Kỹ thuật mật mã.
- [7] <https://vuontoanblog.blogspot.com/2012/09/pascal-triangle.html>
- [8] <https://vuontoanblog.blogspot.com/2012/09/binomial-identity.html>
- [9] Notes on the combinatorial fundamentals of algebra - Darij Grinberg.
- [10] Dẫn đàn <https://math.stackexchange.com/>
- [11] Dẫn đàn <https://artofproblemsolving.com/community>

Ngoài ra có một số tài liệu tham khảo khác mình có sử dụng nhưng không kiểm chứng được tác giả cũng như nguồn gốc các bài toán, mong tác giả thật sự của các bài viết đó đọc được thông cảm.

Mục lục

1	Kí hiệu tổ hợp.	1
1.1	Hệ số nhị thức.	1
1.2	Công thức tổ hợp.	1
2	Tam giác Pascal và sự hình thành của công thức nhị thức Newton.	2
2.1	Sự hình thành của công thức nhị thức.	2
2.2	Câu chuyện về nhị thức Newton.	2
2.3	Tam giác Pascal.	3
2.4	Chứng minh công thức tổng quát $p_{n,k}$ và công thức nhị thức Newton.	4
2.5	Chứng minh công thức nhị thức Newton.	5
3	Một số tính chất cơ bản.	6
3.1	Nhắc lại khai triển nhị thức Newton.	6
3.2	Dấu hiệu các bài toán sử dụng nhị thức Newton trong các bài toán chứng minh đẳng thức.	7
4	Các dạng toán liên quan tới nhị thức newton.	8
4.1	Bài toán khai triển nhị thức và chứng minh đẳng thức cơ bản.	8
4.2	Bài toán về hệ số lớn nhất.	23
4.3	Chứng minh các đẳng thức.	27
4.3.1	Các đẳng thức cơ bản.	27
4.3.2	Ứng dụng một số tính chất đẳng thức đặc biệt.	30
4.4	Ứng dụng đạo hàm trong chứng minh đẳng thức tổ hợp.	40
4.5	Ứng dụng tích phân trong chứng minh đẳng thức tổ hợp.	46
4.6	Ứng dụng số phức chứng minh đẳng thức tổ hợp.	55
4.7	Đồng nhất hệ số.	67
4.8	Bài tập tự luyện.	76
5	Bất đẳng thức liên quan tới công thức tổ hợp.	79
5.1	Lí thuyết và ví dụ minh họa.	79
5.2	Bài tập tự giải.	88
6	Tính chất số học của hệ số nhị thức.	89
6.1	Đôi nét về lịch sử nghiên cứu tính chất số học của hệ số nhị thức.	89
6.2	Các bài toán minh họa.	90

NHỊ THỨC NEWTON
TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

